(91)

(91)

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ
МВ и ССО СССР
РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИЕВ — 1986

УДК 621.391.1

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ КООРДИНАТ СЛОЖНОГО ДИСКРЕТНОГО ИСТОЧНИКА СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

А. П. ТРИФОНОВ, В. Б. МАНЕЛИС

Найдена корреляционная матрица оценок максимального правдоподобия координат источника гауссовских стационарных узкополосных сигналов. Рассмотрено влияние априорной информации о пространственной структуре источника на точность оценки.

В [1, 2] найдена предельная точность оценки координат точечного источника узкополосного гауссовского случайного сигнала. Однако в пассивной радиолокации, радиоастрономии, теплолокации, гидролокации и др. часто встречаются сложные дискретные источники (СДИ), представляющие собой совокупность p точечных излучателей случайного сигнала. Рассмотрим здесь оценку неизвестных параметров такого источника, полагая, что форма функции корреляции (или спектральной плотности) каждого из p элементарных излучаемых сигналов известна.

Пусть $\vec{l}_i=\{l_{ik}\}$, $k=\overline{1, N}$; $i=\overline{1, p}$ — координаты i-го излучателя сложного источника в выбранной системе координат, связанной с приемной антенной. В соответствии с размерностью задачи $N=2$ (излучатели источника расположены в одной плоскости) или $N=3$ (пространственно распределенный источник). Будем считать, что перемещением источника и его отдельных излучателей за время наблюдения $[0, T]$ можно пренебречь, а случайные сигналы каждого излучателя являются взаимно статистически независимыми. Обозначим $\vec{\rho}_i$ — вектор, соединяющий i-й излучатель с точкой антенны, координаты которой $\vec{r}\in V$, V — область пространства, занятая антенной. Пусть каждый элементарный источник излучает узкополосный гауссовский стационарный случайный процесс со спектральной плотностью, симметричной относительно несущей частоты ω_0. Тогда в предположениях [1] корреляционную функцию принимаемого сигнала можно записать как

$$K(t_1, t_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{L})=\sum_{i=1}^{p} B_i(t_1-t_2)\cos[\omega_0(t_1-t_2)-\omega_0(\rho_{1i}-\rho_{2i})/c]. \quad (1)$$

Здесь $\rho_{ki}=|\vec{\rho}_i[\vec{r}_k, \vec{l}_i(\vec{L})]|$, $k=1, 2$; $B_i(t_1-t_2)$ — огибающая корреляционной функции случайного сигнала i-го излучателя; c — скорость распространения электромагнитных колебаний; $\vec{L}$ — вектор неизвестных пространственных параметров СДИ, компоненты которого полностью или частично подлежат оценке. Такими неизвестными параметрами могут быть координаты некоторой характерной точки СДИ, определяющей его местоположение, размер СДИ и т. д.

Положим, что сигнал с корреляционной функцией (1) принимается на фоне аддитивного гауссовского пространственно-временного белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0. Оценка максимального правдоподобия (ОМП) $\vec{L}_m$ неизвестных параметров СДИ определяется как положение точки, в которой логарифм функционала отношения правдоподобия $M(\vec{L})$ достигает абсолютного максимума. В рассматриваемом случае, опуская несущественные слагаемые, имеем [1, 3, 4]

$$M(\vec{L})=\iint_0^T\iint_V x(t_1, \vec{r}_1)\, x(t_2, \vec{r}_2)\, \theta(t_1, t_2, \vec{r}_1 \vec{r}_2, \vec{L})\, dt_1 dt_2 d\vec{r}_1 d\vec{r}_2/2, \quad (2)$$

где $x(t, \vec{r})$ — наблюдаемая сумма сигнала и помехи, а $\theta(t_1, t_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{L})$ — решение интегрального уравнения [4]

$$(N_0/2)\theta(t_1, t_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{L}) + \int_0^T \int_V \theta(t_1, t, \vec{r}_1, \vec{r}, \vec{L}) K(t, t_2, \vec{r}, \vec{r}_2, \vec{L})\, dt d\vec{r} = (2/N_0) K(t_1, t_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{L}). \tag{3}$$

Решение этого уравнения, аналогично [1, 4], будем искать в виде, структурно-подобном корреляционной функции (1):

$$\theta(t_1, t_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{L}) = \sum_{i=1}^{p} \theta_{0i}(t_1 - t_2) \cos[\omega_0(t_1 - t_2) - \omega_0(\rho_{1i} - \rho_{2i})/c]. \tag{4}$$

Следуя [2], введем в рассмотрение функции

$$\left.\begin{matrix} A_c(\vec{l}_i, \vec{l}_j) \\ A_s(\vec{l}_i, \vec{l}_j) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{V_0} \int_V \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \frac{\omega_0}{c} [\rho_i(\vec{r}, \vec{l}_i) - \rho_j(\vec{r}, \vec{l}_j)]\, d\vec{r},$$

$$G(\vec{l}_i, \vec{l}_j) = [A_c^2(\vec{l}_i, \vec{l}_j) + A_s^2(\vec{l}_i, \vec{l}_j)]^{1/2}, \quad V_0 = \int_V d\vec{r}, \tag{5}$$

которые определяют пространственную корреляцию сигналов i-го и j-го излучателей. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением СДИ, для которых

$$G(\vec{l}_i, \vec{l}_j) \ll 1, \quad i, j = \overline{1, p}, \quad i \neq j, \tag{6}$$

и назовем их разрешаемыми. Подставив (1) и (4) в уравнение (3), отбросим в полученном выражении интегралы от функций, осциллирующих с частотой $2\omega_0$, и учтем (6). В результате уравнение (3) переходит в систему уравнений вида

$$(N_0/2)\theta_{0i}(t_1 - t_2) + (V_0/2)\int_0^T \theta_{0i}(t_1 - t) B_i(t - t_2) dt = (2/N_0) B_i(t_1 - t_2), \quad i = \overline{1, p}. \tag{7}$$

Считая, что время наблюдения T много больше времени корреляции случайного сигнала каждого излучателя, решение этой системы находим с помощью преобразования Фурье

$$\theta_{0i}(t_1 - t_2) = \frac{2}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_i(\omega) \exp[j\omega(t_1 - t_2)]}{N_0 + V_0 B_i(\omega)}\, d\omega, \tag{8}$$

где $B_i(\omega)$ — спектр функции $B_i(t_1 - t_2)$.

Рассмотрим потенциальную точность ОМП параметров $\vec{L}$ СДИ случайного сигнала. Ограничимся анализом случая больших отношений сигнал/шум, когда корреляционная матрица ОМП близка к корреляционной матрице совместно-эффективных оценок [3, 4]. Поэтому предельную точность оценки параметров $\vec{L}$ сложного дискретного источника можно охарактеризовать матрицей [3]

$$\hat{K}(\vec{L}_m \mid \vec{L}_0) = \left\| \left[- \frac{\partial^2 S(\vec{L}, \vec{L}_0)}{\partial L_k \partial L_n} \right]_{\vec{L}_0} \right\|^{-1}, \tag{9}$$

$k, n = \overline{1, \mu}$; μ — число неизвестных параметров СДИ; $\vec{L}_0$ — вектор истинных значений неизвестных параметров;

$$S(\vec{L},\vec{L}_0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}Z_i^2G^2[\vec{l}_i(\vec{L}),\vec{l}_i(\vec{L}_0)],\quad z_i^2=\frac{V_0^2T}{\pi N_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{B_i^2(\omega)}{N_0+V_0B_i(\omega)}d\omega. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9) и выполняя дифференцирование, находим

$$\widehat{K}(\vec{L}_m\,|\,\vec{L}_0)=\frac{c^2}{\omega_0^2}\left\|\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}z_i^2\,(g_{i\nu\beta}-g_{i\nu}g_{i\beta})\,\frac{\partial l_{i\nu}}{\partial L_n}\,\frac{\partial l_{i\beta}}{\partial L_k}\right\|^{-1}. \quad \mathbf{(11)}$$

Здесь введены обозначения, аналогичные [1, 5],

$$g_{i\nu\beta}=\frac{1}{V_0}\int\limits_{V}\left[\frac{\partial\rho_i(\vec{r},\vec{l}_i)}{\partial l_{i\nu}}\,\frac{\partial\rho_i(\vec{r},\vec{l}_i)}{\partial l_{i\beta}}\right]_{\vec{L}_0}d\vec{r},\quad g_{i\nu}=\frac{1}{V_0}\int\limits_{V}\left[\frac{\partial\rho_i(\vec{r},\vec{l}_i)}{\partial l_{i\nu}}\right]_{\vec{L}_0}d\vec{r}. \quad \mathbf{(12)}$$

Заметим, что полагая в (11), (12) $p=1$ и $\vec{L}=\vec{l}$, т. е. переходя к оценке координат одного излучателя, получаем, как частный случай, результаты [1].

В качестве примера найдем характеристики ОМП координат СДИ, все излучатели которого находятся в одной плоскости ($N=2$), а прием ведется на линейную антенну длиной $2X$ (рис. 1). Положим, что СДИ расположен не ближе зоны Френеля приемной антенны и одновременно антенна расположена не ближе зоны Френеля СДИ. Местоположение СДИ определим через координаты (R,θ) точки O', относительно которой априори с точностью до масштаба α известно расположение отдельных излучателей источника. Обозначим $(\alpha b_i,\ \psi_i)$ — координаты излучателей в полярной системе координат, ось $O'x'$ которой образует

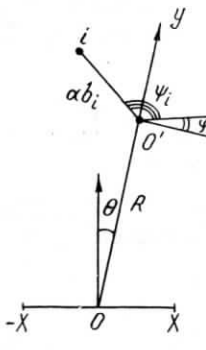

Рис. 1

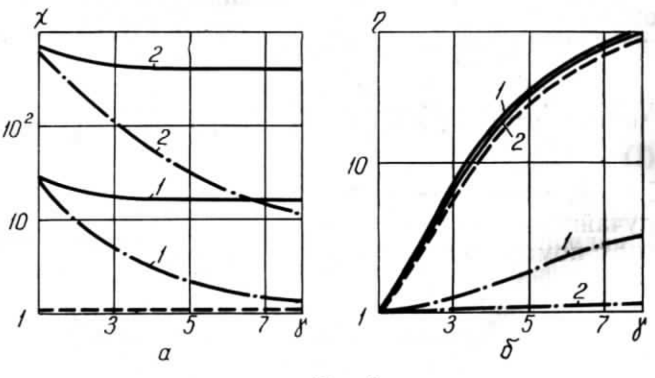

Рис. 2

угол φ (ракурс) с направлением $O'x$, ортогональным линии визирования $OO'y$. Таким образом, вектор неизвестных общегрупповых параметров СДИ $\vec{L}$ может иметь четыре компоненты, среди которых: $L_1\equiv R$, $L_2\equiv\theta$ — определяют местоположение, $L_3\equiv\varphi$ — ракурс и $L_4\equiv\alpha$ — масштаб (размер) сложного дискретного источника.

Для определения характеристик оценки местоположения разложим $\rho_i(\vec{r},\vec{l}_i)$ в (12) в ряд по малым величинам $\alpha b_i/R$ и X/R. Учитывая сделанные предположения, отбросим в этом разложении члены порядка малости $(\alpha b_i/R)^3$ и $(X/R)^3$. Произведя необходимые преобразования, получаем выражения для элементов корреляционной матрицы ОМП неизвестных параметров СДИ. Дисперсии оценок дальности R и углового положения θ при этом равны соответственно

$$D_h(R_m) = 2c^2R^4/5\omega_0^2 d^4 A_h \sum_{i=1}^{p} z_i^2; \qquad (13) \qquad D_h(\theta_m) = c^2/5\omega_0^2 d^2 B_h \sum_{i=1}^{p} z_i^2, \quad (14)$$

где $d^2 = X^2 \cos^2\theta/15$, $A_1 = 1 + I_{cc}/d^2$, $A_2 = 1 + (I_{cc} - I_c^2)/d^2$,

$$A_3 = 1 + [(I_{cc} - I_c^2)(I_{ss} - I_s^2) - (I_{cs} - I_c I_s)^2]/d^2 (I_{ss} - I_s^2), \quad A_4 = A_5 = B_1 = 1,$$

$$B_2 = 1 - I_c^2/\hat{I}_{cc}, \quad B_3 = 1 - (I_s^2 \hat{I}_{cc} + I_c^2 I_{ss} - 2I_c I_s I_{cs})/(I_{ss}\hat{I}_{cc} - I_{cs}^2),$$

$$B_4 = 1 - I_c^2/I_{cc}, \quad B_5 = 1 - (I_s^2 I_{cc} + I_c^2 I_{ss} - 2I_c I_s I_{cs})/(I_{ss} I_{cc} - I_{cs}^2).$$

Случаю $h = 1$ соответствует единственный неизвестный параметр — $\vec{L} = (R)$ или $\vec{L} = (\theta)$, $h = 2$ — $\vec{L} = (R, \theta)$, $h = 3$ — $\vec{L} = (R, \theta, \varphi)$, $h = 4$ — $\vec{L} = (R, \theta, \alpha)$, $h = 5$ — $\vec{L} = (R, \theta, \varphi, \alpha)$. Здесь введены обозначения:

$$\left.\begin{matrix} I_c \\ I_s \end{matrix}\right\} = \alpha \sum_{i=1}^{p} \tilde{z}_i^2 b_i \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\psi_i + \varphi), \quad \left.\begin{matrix} I_{cc} \\ I_{ss} \end{matrix}\right\} = \alpha^2 \sum_{i=1}^{p} \tilde{z}_i^2 b_i^2 \begin{Bmatrix} \cos^2 \\ \sin^2 \end{Bmatrix} (\psi_i + \varphi),$$

$$I_{cs} = \alpha^2 \sum_{i=1}^{p} \tilde{z}_i^2 b_i^2 \cos(\psi_i + \varphi) \sin(\psi_i + \varphi), \quad \tilde{z}_i^2 = z_i^2 / \sum_{i=1}^{p} z_i^2, \quad \hat{I}_{cc} = I_{cc} + d^2.$$

Воспользуемся аналогией с механикой твердого тела, интерпретируя $\tilde{z}_i^2$ как приведенную массу материальной точки, совмещенной с i-м излучателем. Тогда величины I_c, I_s представляют собой координаты центра тяжести СДИ в системе координат $xO'y$, I_{cc}, I_{ss}, I_{cs} — его моменты инерции относительно осей $O'x$ и $O'y$ соответственно [6]. Таким образом, для расчета точности оценки неизвестных параметров сложного разрешаемого дискретного источника необходимо определить положение центра тяжести и моменты инерции дискретного твердого тела, повторяющего пространственную структуру СДИ, дискретные массы которого равны $\tilde{z}_i^2$, $i = \overline{1, p}$.

Для иллюстрации полученных выражений рассмотрим конкретный СДИ в виде четырех точечных излучателей полосового гауссовского случайного сигнала, расположенных в вершинах квадрата. Относительно центра квадрата, местоположение которого (R, θ) неизвестно, источники имеют полярные координаты $(r, \pi/2)$, (r, π), $(r, 3\pi/2)$, $(r, 0)$ и обладают спектральными плотностями $B(\omega)$, $B(\omega)$, $\gamma^2 B(\omega)$, $\gamma^2 B(\omega)$ соответственно, причем

$$B(\omega) = \begin{cases} B_s, & |\omega| \leqslant \Omega/2, \\ 0, & |\omega| > \Omega/2. \end{cases}$$

На рис. 2, *а* и *б* приведены зависимости $\chi_h = D_5(R_m)/D_h(R_m)$ и $\eta_h = D_5(\theta_m)/D_h(\theta_m)$ от γ при $\theta_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ и $B_s X/N_0 = 0{,}05$. Зависимости $\chi_h(\gamma)$ и $\eta_h(\gamma)$ рассчитаны для двух значений отношения размеров СДИ и антенны. Именно, кривые *1* — для $r/X = 2$, а кривые *2* — для $r/X = 10$.

Сплошные кривые соответствуют вектору неизвестных параметров $\vec{L} = (R, \theta)$, т. е. $h=2$, штрих-пунктирные — $\vec{L} = (R, \theta, \varphi)$, т. е. $h=3$, и штриховые — $\vec{L} = (R, \theta, \alpha)$, т. е. $h=4$. Рис. 2, *а* и *б* иллюстрируют выигрыш в точности оценки дальности R и углового положения θ за счет наличия априорной информации о размерах и ракурсе СДИ. При оценке дальности этот выигрыш возрастает с увеличением размера СДИ (т. е. с ростом отношения r/X) и относительно слабо зависит от степени неравномерности распределения средней мощности СДИ между отдельными излучателями, т. е. от γ. В то же время для углового положения выигрыш в точности оценки возрастает с увеличением γ и относительно слабо зависит от отношения r/X. Из рис. 2, *а* следует, что априорное знание размера СДИ позволяет существенно повысить точность оценки дальности, в то время как незнание ракурса СДИ практически не влияет на точность оценки дальности. Применительно к оценке углового положения (рис. 2, *б*) более ценной является априорная информация о ракурсе СДИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трифонов А. П., Федоров В. И. Предельная точность совместной оценки координат и их производных источника случайного сигнала.— Изв. вузов МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника, 1981, т. 24, № 3, с. 34—40.
2. Трифонов А. П., Федоров В. И., Шарапов С. И. Анализ пороговых эффектов при оценке местоположения источника случайного сигнала.— Изв. вузов МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника, 1983, т. 26, № 4, с. 48—54.
3. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М. : Сов. радио, 1978.—296 с.
4. Бакут П. А., Большаков И. А., Герасимов Б. М. и др. Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Г. П. Тартаковского.— М. : Сов. радио, 1963, т. 1.—424 с.
5. Кремер А. И., Трифонов А. П. Предельная точность совместной оценки координат и их производных радиолокационными методами.— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 1, с. 67—75.
6. Аппель П. Теоретическая механика.— М. : Физматгиз, 1960, т. 2.—487 с.

Поступила в редакцию 08.07.85.

УДК 621.3.011.73

ПОЛИНОМЫ Е. И. ЗОЛОТАРЕВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

А. Ф. БЕЛЕЦКИЙ

Приведено приближенное с контролируемой точностью решение полиномиальной задачи Е. И. Золотарева и показано его применение в задачах синтеза электрических цепей.

Выдающийся русский математик Е. И. Золотарев сформулировал и решил задачу отыскания полиномов с двумя заданными коэффициентами, наименее уклоняющихся в заданном интервале от нуля [1]. Напомним, что все нули полиномов Золотарева вещественны и сосредоточены, за исключением, возможно, одного, внутри интервала наименьшего уклонения от нуля. В качестве примера на рис. 1 приведены графики полиномов Золотарева с нормированным к единице наименьшем уклонением для полиномов четной ($n=4$) и нечетной ($n=5$) степеней.

Можно показать, что из всех полиномов степени n, абсолютные значения которых в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ не превышают некоторой величины $L > 0$ и которые имеют один простой общий нуль при $x = x_0 < -1$, наибольшие по абсолютной величине значения вне указанного интервала принимает полином Золотарева, что и важно в задачах оптимального синтеза многих селективных и согласующих цепей.

К сожалению, строгое решение задачи Золотарева выражается через нетиповые эллиптические функции и мало пригодно для практического применения.

Ниже излагается приближенное с контролируемой точностью решение задачи Золотарева и приводятся примеры его использования в задачах синтеза полиномиальных цепей.