

037

к

03

РАДИОТЕХНИКА
1987, № 2

А. П. Трифонов, Т. М. Овчинникова

УДК 621.396.22.039

Предельная точность оценки параметра оптического сигнала

Найдены вторые приближения смещения и дисперсии оценки в результате решения уравнения правдоподобия методом малого параметра. Рассчитаны характеристики оценок временного положения и длительности оптического импульса.

Оценка максимального правдоподобия (ОМП) параметра оптического сигнала рассматривалась в [1—3 и др.]. В этих работах в качестве дисперсии ОМП фактически принималась дисперсия эффективной оценки. В связи с этим возникает вопрос, насколько близка полученная таким образом дисперсия оценки к истинному ее значению в зависимости от отношения сигнал-шум, времени наблюдения, вида сигнала и характера оцениваемого параметра.

Считаем, что на интервале времени $[-T/2; T/2]$ наблюдается реализация пуассоновского процесса $\xi(t)$ с интенсивностью $\lambda(t, l) = \lambda_s(t, l) + \lambda_n$, где λ_n — постоянная интенсивность фона; $\lambda_s(t, l)$ — интенсивность полезного оптического сигнала, зависящая от неизвестного параметра l , подлежащего оценке. Для получения ОМП приемник должен вырабатывать логарифм функционала отношения правдоподобия (ЛФОП)

$$[4] \quad L(l) = \int_{-T/2}^{T/2} \ln[1 + \lambda_s(t, l)/\lambda_n] d\xi(t) - \int_{-T/2}^{T/2} \lambda_s(t, l) dt. \quad \text{Согласно [5] ОМП } \hat{l} \text{ опреде-}$$

ляется из решения уравнения правдоподобия

$$[dL(l)/dl]_{\hat{l}} = 0. \quad (1)$$

Поскольку параметр l , как правило, является аргументом трансцендентной функции, получить точное решение (1) не представляется возможным. Поэтому, полагая в дальнейшем, что оценка обладает высокой апостериорной точностью, находим приближенное решение (1) методом малого параметра. Считаем, что ЛФОП обладает необходимым числом непрерывных в среднеквадратическом производных.

Представим ЛФОП в виде суммы двух составляющих [5]:

$$L(l) = S_m[S(l, l_0) + \epsilon N(l)], \quad (2)$$

где $S_m = \langle L(l_0) \rangle$; $S(l, l_0) = \langle L(l) \rangle S_m^{-1}$ — нормированная сигнальная, а $N(l) = [L(l) - \langle L(l) \rangle] \sigma_N^{-1}$ — нормированная шумовая функции; $\sigma_N^2 = \langle [L(l_0) - \langle L(l_0) \rangle]^2 \rangle$ — дисперсия ЛФОП, $\epsilon = z^{-1}$; $z^2 = S_m^2 / \sigma_N^2$ — отношение сигнал-шум на выходе приемника, а l_0 — истинное значение оцениваемого параметра. При этом $\max S(l, l_0) = S(l_0, l_0) = \langle N^2(l_0) \rangle = 1$, а ϵ при больших отношениях сигнал-шум является малым параметром.

Подставляя (2) в (1), получаем уравнение

$$[dS(l, l_0)/dl + \epsilon dN(l)/dl]_{\hat{l}} = 0. \quad (3)$$

Решение (3) находим в виде ряда по степеням ϵ [5]:

$$\hat{l} = l_0 + \epsilon l_1 + \epsilon^2 l_2 + \epsilon^3 l_3 + \dots \quad (4)$$

Ограничимся определением вторых приближений для смещения и дисперсии [5]. Поэтому в (4) учитываем только члены ряда, содержащие ϵ в степени не выше третьей.

Разложим функцию в скобках в левой части (3) в ряд Тейлора по l в окрестности точки l_0 и подставим в него $\hat{l}$ из (4). Приравнявая нулю коэффициенты при ϵ в одинаковых степенях, получаем систему уравнений, решая которую находим явные выражения для l_1, l_2, l_3 , совпадающие по своему виду с аналогичными формулами в [5]. Однако использовать результаты [5] для расчета смещения и дисперсии ОМП параметра оптического сигнала нельзя, так как нормированная шумовая функция $N(l)$ в (2) и (3) является негауссовским случайным процессом. Поэтому для усреднения в выражения для смещения и дисперсии [5] необходимо найти первые четыре момента нормированной шумовой функции. С этой целью введем в рассмотрение обобщенную случайную функцию

$$\xi'(t) dt = d\xi(t) - \langle d\xi(t) \rangle. \quad (5)$$

Тогда нормированную шумовую функцию перепишем как

$$N(I) = \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t, I) \xi'(t) dt, \quad \psi(t, I) = \sigma_N^{-1} \ln [1 + \lambda_S(t, I)/\lambda_N]. \quad (6)$$

Используя (6), а также значения моментов процесса (5), приведенные в [6], находим

$$\begin{aligned} \langle N(I) \rangle &= 0, \quad \langle N(I_1) N(I_2) \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t, I_1) \psi(t, I_2) \lambda(t, I_0) dt, \\ \langle N(I_1) N(I_2) N(I_3) \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t, I_1) \psi(t, I_2) \psi(t, I_3) \lambda(t, I_0) dt, \\ \langle N(I_1) N(I_2) N(I_3) N(I_4) \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t, I_1) \psi(t, I_2) \psi(t, I_3) \psi(t, I_4) \lambda(t, I_0) dt + \\ &+ \langle N(I_1) N(I_2) \rangle \langle N(I_3) N(I_4) \rangle + \langle N(I_1) N(I_4) \rangle \langle N(I_2) N(I_3) \rangle + \\ &+ \langle N(I_1) N(I_3) \rangle \langle N(I_2) N(I_4) \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя (7) и [5], получаем для условных смещения и дисперсии ОМП параметра оптического сигнала

$$\begin{aligned} b(\hat{I} | I_0) = \langle \hat{I} - I_0 \rangle &= -\beta^2 I (\alpha \lambda_2)/2 + \beta^3 I (2\alpha^4 \lambda_1 - 7\alpha^3 \lambda_2/2 + \alpha^2 \lambda_3/2 + \alpha \lambda_2^2 \lambda_0^{-1}) + \\ &+ \beta^4 [I (9\alpha \lambda_2) I (\alpha^3 \lambda_1 - \alpha^2 \lambda_2)/2 - I (\alpha^2 \lambda_1) I (\alpha^3 \lambda_1 - 13\alpha^2 \lambda_2/3 + \alpha \lambda_3/3)] + \\ &+ \beta^5 I (\alpha^2 \lambda_1/2) I^2 (2\alpha^2 \lambda_1 - 3\alpha \lambda_2), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D(\hat{I} | I_0) = \langle (\hat{I} - I_0)^2 \rangle &= \beta + \beta^3 I (\alpha^3 \lambda_1 - \alpha^2 \lambda_2 - \alpha \lambda_3) + \beta^4 [7I^2 (\alpha \lambda_2/2) - \\ &- I^2 (\alpha^2 \lambda_1) + I (5\alpha^5 \lambda_1 - 9\alpha^4 \lambda_2 + \alpha^2 \lambda_3 \lambda_0^{-1} + 3\alpha^2 \lambda_2^2 \lambda_0^{-1})] - \beta^5 [4I (\alpha^4 \lambda_1 - \\ &- \alpha^3 \lambda_2) I (2\alpha^2 \lambda_1 - 3\alpha \lambda_2) + I (\alpha^3 \lambda_1) I (2\alpha^3 \lambda_1 - 4\alpha^2 \lambda_2 + 4\alpha \lambda_3/3 + \lambda_2^2 \lambda_0^{-1})] + \\ &+ 5\beta^6 I (\alpha^3 \lambda_1) I^2 (\alpha^2 \lambda_1 - 3\alpha \lambda_2/2). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$I(f) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt; \quad \lambda_0 \equiv \lambda(t, I_0); \quad \beta = \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} [\partial \lambda(t, I)/\partial I]^2 \lambda^{-1}(t, I) dt \right\}_{I_0}^{-1};$$

$$\lambda_k \equiv [\partial^k \lambda(t, I)/\partial I^k]_{I_0}; \quad \alpha \equiv [(\partial \lambda(t, I)/\partial I)/\lambda(t, I)]_{I_0};$$

Относительная погрешность полученных формул имеет порядок $\epsilon^3 = z^{-3}$. Если ограничиться первым приближением, т. е. считать допустимой относительную погрешность порядка $\epsilon = z^{-1}$ и отбросить в (4) члены, содержащие ϵ в степени выше первой, то полученные выражения совпадут с известными [1—3 и др.].

Для иллюстрации найдем характеристики ОМП параметров оптического сигнала с интенсивностью в форме лоренцевской кривой:

$$\lambda_S(t, I) = \lambda_0 [1 + (t - \tau)^2/\gamma^2]^{-1}. \quad (10)$$

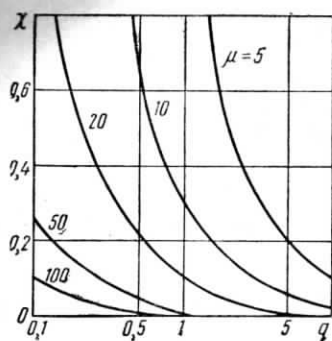


Рис. 1

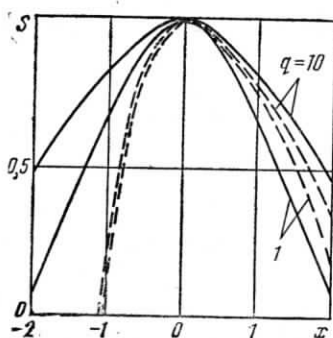


Рис. 2

Параметр τ определяет временное положение импульса, а γ — его длительность. Для сигнала (10) были рассчитаны вторые приближения характеристик ОМП параметров τ и γ согласно (8), (9), а также первое приближение по [1—3]. Оценка временного положения τ оказывается несмещенной и во втором приближении. Однако ОМП длительности γ , являясь несмещенной в первом приближении, во втором оказалась смещенной.

На рис. 1 приведены зависимости относительного смещения $\chi = b(\hat{\gamma}|\gamma_0)/\gamma_0$ от отношения сигнал-фон $q = \lambda_0/\lambda_N$ для различных значений параметра $\mu = \lambda_0\gamma_0$. Согласно рис. 1 при не слишком больших значениях μ и q смещение ОМП длительности сигнала (10) может быть значительным и достигать 30...40 % длительности импульса.

На рис. 2 сплошной линией показана нормированная сигнальная функция $S(\tau, \tau_0) = S[(\tau - \tau_0)/\gamma_0] = S_1[x]$ при оценке временного положения сигнала (10), а штриховой линией — $S(\gamma, \gamma_0) = S[(\gamma - \gamma_0)/\gamma_0] = S_2[x]$ при оценке его длительности. Как и при приеме сигнала на фоне гауссовского шума [5], появление смещения оценки во втором приближении связано с асимметрией сигнальной функции относительно истинного значения оцениваемого параметра.

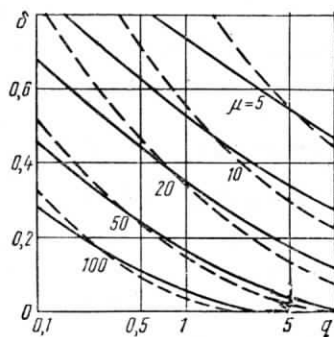


Рис. 3

На рис. 3 приведены зависимости $\delta_i(q) = [D(\hat{i}|t_0) - D_E(t_0)] D_E^{-1}(t_0)$ относительного отклонения дисперсии ОМП от дисперсии эффективной оценки $D_E(t_0) = \beta$ [1—3]. Сплошными кривыми нанесены зависимости $\delta_\tau(q)$ для ОМП временного положения сигнала (10), а штриховыми — $\delta_\gamma(q)$ для ОМП длительности. Кривые рис. 3 показывают, что при не слишком больших значениях μ и q дисперсия ОМП может заметно превосходить дисперсию эффективной оценки. Тем не менее с ростом μ и q дисперсия ОМП сходится к дисперсии эффективной оценки. Полученные здесь выражения позволяют оценить скорость этой сходимости и тем самым определить границы применимости известных формул [1—3 и др.] для характеристик ОМП.

Список литературы

1. Бакут П. А. и др. Проблемы передачи информации, 1966, т. 2, № 4.
2. Волохатюк В. А., Кочетков В. М., Красовский Р. Р. Вопросы оптической локации. — М.: Сов. радио, 1971.
3. Гальярди Р. М., Карп Ш. Оптическая связь. — М.: Связь, 1978.
4. Большаков И. А., Ракошиц В. С. Прикладная теория случайных потоков. — М.: Сов. радио, 1978.
5. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978.
6. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.

Поступила после доработки 26 июня 1986 г.