

98

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

9

*ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ*

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ

ТОМ XXX

№ 11

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗДАНИЕ ЛЕНИНГРАДСКОГО ИНСТИТУТА
ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
1987

СОВМЕСТНАЯ ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ И ШИРИНЫ СПЕКТРА МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

А. П. ТРИФОНОВ, Е. П. НЕЧАЕВ

Воронежский государственный университет

Предложен способ аппаратурной реализации оптимального измерителя величины и ширины спектра мощности гауссовского случайного сигнала. Получены асимптотически точные выражения для характеристик оценки.

В [1] предложен способ аппаратурной реализации и исследована эффективность квазиоптимального измерителя ширины спектра мощности гауссовского случайного сигнала. При этом величина спектральной плотности сигнала была определена приближенно, что приводило к существенному снижению точности квазиоптимальной оценки. Точность измерения ширины спектра мощности можно повысить, используя устройство, реализующее совместную оценку величины и ширины спектра мощности случайного сигнала.

Положим, аналогично [1], что на интервале времени $[0, T]$ наблюдается реализация гауссовского случайного процесса: $x(t) = s(t) + n(t)$. Здесь $s(t)$ — гауссовский стационарный центрированный случайный сигнал со спектром мощности

$$G(\omega, N_{s0}, \Omega_0) = \begin{cases} N_{s0}/2, & |\omega| \leq \Omega_0/2, \\ 0, & |\omega| > \Omega_0/2. \end{cases}$$

Величина N_{s0} и ширина $\Omega_0 \in [\Omega_{\min}; \Omega_{\max}]$ спектра мощности случайного сигнала являются неизвестными параметрами, которые надо измерить. Аддитивную помеху $n(t)$ будем считать гауссовским белым шумом с односторонней спектральной плотностью N_0 , причем $s(t)$ и $n(t)$ статистически независимы.

Для обработки процесса $s(t)$ используем метод максимального правдоподобия [1, 2]. Если время наблюдения T достаточно велико, так что

$$\mu \gg 1, \quad \mu = T\Omega_0/2\pi, \quad (1)$$

то логарифм функционала отношения правдоподобия имеет вид [1]:

$$M(\Omega, N_s) = \frac{TN_s}{\pi N_0(N_s + N_0)} \int_0^{\Omega/2} s_T(\omega) d\omega - \frac{T\Omega}{4\pi} \ln\left(1 + \frac{N_s}{N_0}\right), \quad (2)$$

где $s_T(\omega) = \left| \int_0^T x(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 / T$ — периодограмма реализации $x(t)$.

Совместная оценка максимального правдоподобия величины $\hat{N}_s$ и ширины $\hat{\Omega}$ спектра мощности сигнала $s(t)$ представляет собой положение абсолютного максимума функции (2). Максимизируя $M(\Omega; N_s)$ по N_s ,

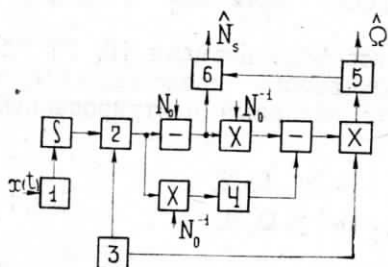
получаем, что логарифм функционала отношения правдоподобия достигает максимума, когда

$$N_s = N_s(\Omega) = \frac{4}{\Omega} \int_0^{\Omega/2} s_T(\omega) d\omega - N_0. \quad (3)$$

При этом

$$\max_{N_s} M(\Omega, N_s) = M(\Omega) = \frac{T}{\pi N_0} \int_0^{\Omega/2} s_T(\omega) d\omega - \frac{T\Omega}{4\pi} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{4}{N_0\Omega} \int_0^{\Omega/2} s_T(\omega) d\omega \right] \right\}. \quad (4)$$

Следовательно, измеритель должен вырабатывать функцию (4) для всех возможных значений $\Omega \in [\Omega_{\min}; \Omega_{\max}]$ и определять положение $\hat{\Omega}$ абсолютного максимума $M(\Omega)$. Оценка величины спектра мощности $\hat{N}_s = N_s(\hat{\Omega})$, где $N_s(\Omega)$ определяется формулой (3). Один из способов



построения измерителя (последовательный) поясняет рисунок, где 1 — последовательный спектроанализатор, анализирующий за время $\Delta t \gg T$ диапазон частот $[0, \Omega_{\max}]$ [3]; 2 — делитель, вырабатывающий отношение входных сигналов; 3 — генератор, формирующий линейно изменяющееся напряжение $u(t) = t\Omega_{\max}/4\Delta t$ на интервале времени $[\Delta t\Omega_{\min}/\Omega_{\max}; \Delta t]$; 4 — усилитель с логарифмической характеристикой; 5 — решающее устройство, которое фиксирует положение t_m абсолютного максимума выходного сигнала на интервале $[\Delta t\Omega_{\min}/\Omega_{\max}; \Delta t]$; 6 — стробирующее устройство, которое открывается сигналом блока 5 в момент t_m . Оценка ширины спектра мощности $\hat{\Omega}$ однозначно связана с t_m соотношением $\hat{\Omega} = t_m\Omega_{\max}/\Delta t$, а амплитуда сигнала на выходе блока 6 является оценкой величины спектра мощности $\hat{N}_s$.

Рассмотрим характеристики оценок величины и ширины спектра мощности. С этой целью введем вспомогательные функции

$$S_1(\Omega) = \frac{4}{N_0\Omega} \int_0^{\Omega/2} \langle s_T(\omega) \rangle d\omega; \quad N_1(\Omega) = \frac{4}{N_0\Omega} \int_0^{\Omega/2} [s_T(\omega) - \langle s_T(\omega) \rangle] d\omega$$

и преобразуем (4) к виду

$$M(\Omega) = \frac{T\Omega}{4\pi} [S_1(\Omega) + N_1(\Omega) - 1 - \ln [S_1(\Omega) + N_1(\Omega)]]. \quad (5)$$

При выполнении (1) оценка $\hat{\Omega}$ характеризуется высокой апостериорной точностью, поэтому достаточно ограничиться исследованием поведения

функции (5) в окрестности истинного значения ширины спектра мощности Ω_0 [1, 2]. В этой окрестности при выполнении (1) функцию (5) представим как

$$M(\Omega) \simeq \frac{T\Omega}{4\pi} [S_1(\Omega) + N_1(\Omega) - 1 - \ln S_1(\Omega) - N_1(\Omega)/S_1(\Omega)] = S(\Omega) + N(\Omega), \quad (6)$$

где

$$S(\Omega) = T\Omega[S_1(\Omega) - 1 - \ln S_1(\Omega)]/4\pi, \\ N(\Omega) = T\Omega[N_1(\Omega) - N_1(\Omega)/S_1(\Omega)]/4\pi -$$

— сигнальная и шумовая функции на выходе измерителя, функционирующего в соответствии с (4). Точность приближенного равенства (6) возрастает с увеличением времени наблюдения, поскольку при выполнении (1) $\langle N_1^2(\Omega_0) \rangle / S_1^2(\Omega_0) = 2\mu^{-1} \ll 1$.

Так же как и выходной сигнал измерителя [1], процесс (6) с увеличением времени наблюдения становится асимптотически марковским гауссовским процессом. Решая аналогично [4] соответствующее уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова, находим совместное распределение оценок $\hat{\Omega}$ и $\hat{N}_s$. В результате для условных смещения (систематической ошибки) и рассеяния (среднего квадрата ошибки) оценок имеем:

$$d(\hat{N}_s | \Omega_0, N_{s0}) = \langle \hat{N}_s - N_{s0} \rangle = 0; \quad (7)$$

$$d(\hat{\Omega} | \Omega_0, N_{s0}) = \langle \hat{\Omega} - \Omega_0 \rangle = \\ = (2\pi/Tq_0^2) [\Gamma_1^3(2\Gamma_2 - \Gamma_1)(1+q_0)^2 - \\ - (\Gamma_2 - \Gamma_1)^3(\Gamma_1 + \Gamma_2)] \Gamma_1^{-2} \Gamma_2^{-2} (\Gamma_2 - \Gamma_1)^{-2}; \quad (8)$$

$$V(\hat{N}_s | \Omega_0, N_{s0}) = \langle (\hat{N}_s - N_{s0})^2 \rangle = \\ = 4\pi(N_0 + N_{s0})^2/T\Omega_0; \quad (9)$$

$$V(\hat{\Omega} | \Omega_0, N_{s0}) = \langle (\hat{\Omega} - \Omega_0)^2 \rangle = \\ = (8\pi^2/T^2q_0^4) \{ [2\Gamma_2^3 - \Gamma_1^2(\Gamma_2 + \Gamma_1)] (\Gamma_2 - \Gamma_1)^4 + \\ + \Gamma_1^4(1+q_0)^4 [2\Gamma_2^3 - (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2(2\Gamma_2 - \Gamma_1)] \} \Gamma_1^{-4} \Gamma_2^{-3} (\Gamma_2 - \Gamma_1)^{-4}, \quad (10)$$

где $q_0 = N_{s0}/N_0$, $\Gamma_1 = [q_0 - \ln(1+q_0)]/q_0^2$, $\Gamma_2 = (2+q_0)\ln(1+q_0)/q_0 - 1$. Точность выражений (7)–(10) возрастает с увеличением времени наблюдения. Коэффициент корреляции оценок $\hat{N}_s$ и $\hat{\Omega}$ имеет порядок малости $\mu^{-1/2}$. Таким образом, совместные оценки величины и ширины спектра мощности являются асимптотически некоррелированными. Характеристики (7)–(10) совместных оценок совпадают с аналогичными характеристиками отдельных оценок каждого из неизвестных параметров Ω и N_s случайного сигнала, полученных при условии, что второй параметр точно известен. Действительно, рассеяние (10) совпадает с рассеянием оптимальной оценки ширины спектра мощности при известном априори значении величины спектра мощности N_{s0} [1, 5].

Следовательно, кривые на рис. 3, приведенном в [1], характеризуют выигрыш в точности измерения ширины спектра мощности при использовании измерителя (3), (4) вместо квазиоптимального измерителя [1]. Этот выигрыш может быть значительным, особенно в случае малых значений q_0 , представляющем основной практический интерес. Кроме того, рассмотренный здесь измеритель позволяет определить величину спектра мощности случайного сигнала.

Таким образом, полученные соотношения позволяют сделать обоснованный выбор между измерителями в зависимости от точности, с которой априори может быть известна мощность случайного сигнала, а также в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценки ширины спектра мощности и к степени простоты технической реализации измерителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трифонов А. П., Галун С. А. Квазиоптимальная оценка ширины спектра мощности случайного процесса. — Изв. вузов СССР — Приборостроение, 1981, № 5, с. 21—25.
2. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
3. Мирский Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. — М.: Энергия, 1972. — 456 с.
4. Трифонов А. П., Бутейко В. К. Прием сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью на фоне белого шума. — Изв. вузов СССР — Радиоэлектроника, 1984, № 8, с. 28—34.
5. Трифонов А. П., Галун С. А. Прием случайного сигнала с неизвестной шириной спектра мощности. — Радиотехника и электроника, 1982, № 8, с. 1554—1562.

Рекомендована кафедрой
радиофизики

Поступила в редакцию
10 ноября 1986 г.