ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

ВГУ

ВОРОНЕЖ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ВОРОНЕЖСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1978

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

ВГУ

ВОРОНЕЖ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ВОРОНЕЖСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1978

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt$ – интеграл вероятности.

Анализ выражений (6) и (8) показал, что полученные формулы позволяют определять численные значения параметров обобщенной вероятностной модели с неравномерным распределением фаз элементарных волн.

Литература

1. Поздняк С.И., Мелитицкий В.А. Введение в статистическую теорию поляризации радиоволн. М., 1974.
2. Поздняк С.И., Енина Е.П. Совместная плотность вероятности огибающих и фаз ортогонально поляризованных радиоволн в случае неравномерного распределения фаз элементарных волн. – В кн.: Вопросы рассеяния и оптимального приема радиоволн. Воронеж, 1975.
3. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М., 1966.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1970.

УДК 621.396

А.В.Зюльков

ОБНАРУЖЕНИЕ РАДИОИМПУЛЬСА С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОГИБАЮЩЕЙ НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА

Разрывные модели сигналов находят довольно широкое применение в радиосвязи, радиолокации и т.д., однако изучены они далеко не так полно, как дифференцируемые [1, 2] и др. Представляет интерес проанализировать обнаружение радиоимпульса с прямоугольной огибающей и неизвестным временным положением.

Пусть на вход приемного устройства в течение времени $[0,T]$ поступает реализация случайного процесса $x(t) = n(t)$ или $x(t) = S(t-\tau_0) + n(t)$, где $n(t)$ – реализация белого гауссова шума с односторонней спектральной плотностью N_0; $S(t-\tau) = S_0(t-\tau)\cos(\omega_0 t - \varphi)$; ω_0 – несущая частота; φ – неизвестная фаза; $S(t-\tau) = a_0$ при $\tau \leq t \leq \tau + \Delta$ $S(t-\tau) = 0$; при $t < \tau$ или $t > \tau + \Delta$.

Как известно, приемник максимального правдоподобия узкополосного радиосигнала со случайной начальной фазой вырабатывает функцию

$$R(\tau) = \sqrt{X^2(\tau) + Y^2(\tau)} \qquad (1)$$

для всех $\tau \in [T_1 T_2]$, абсолютный максимум которой сравнивается с порогом R_0 . Здесь

$$\left.\begin{matrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \end{matrix}\right\} = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) S_0(t-\tau) \begin{Bmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{Bmatrix} dt.$$

Подставляя принятую реализацию $x(t)$ в (1), при наличии сигнала получаем:

$$R(\tau) = \left\{ \left[Z^2 S(\tau_0 - \tau) \cos\varphi + Z X_N(\tau) \right]^2 + \left[Z^2 S(\tau_0 - \tau) \sin\varphi + Z Y_N(\tau) \right]^2 \right\}^{1/2}, \qquad (2)$$

где

$$\left.\begin{matrix} X_N(\tau) \\ Y_N(\tau) \end{matrix}\right\} = \frac{2}{Z N_0} \int_0^T n(t) S(t-\tau) \begin{Bmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{Bmatrix} dt;$$

$$S(\tau_1 \tau_2) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau_1 - \tau_2|}{\Delta}, & |\tau_1 - \tau_2| \leq \Delta, \\ 0, & |\tau_1 - \tau_2| > \Delta; \end{cases} \qquad (3)$$

$Z^2 = 2a_0^2 \Delta / N_0$ — отношение сигнал/шум.

При отсутствии сигнала

$$R(\tau) = Z R_N(\tau) = \sqrt{X_N^2(\tau) + Y_N^2(\tau)}. \qquad (4)$$

Здесь $X_N(\tau)$ и $Y_N(\tau)$ — реализации независимых гауссовых процессов с нулевыми средними значениями и функциями корреляции (3).

Вероятности ошибок первого (ложная тревога) α и второго (пропуск сигналов) β рода можно записать в виде $\alpha = P(H_N > R_0)$ и $\beta = P(H_S < R_0)$, где H_N и H_S — величины абсолютных максимумов $R(\tau)\,(T_1 < \tau < T_2)$ соответственно при наличии и отсутствии сигнала в принятой реализации $x(t)$. Обозначив положение абсолютного максимума (1) через τ_m , получаем:

$$\alpha = P\left[R_N(\tau_m) > R_0 / z \right]. \qquad (5)$$

Для того чтобы вычислить вероятность ложной тревоги по формуле (5), надо знать $F_N(H) = P[R_N(\tau_m) < H]$, т.е. функцию распределения величины абсолютного максимума реализаций случайного процесса $R_N(\tau)$. Так как $X_N(\tau)$ и $Y_N(\tau)$ – реализации независимых гауссовых процессов с нулевыми средними значениями и функциями корреляции (3), то, следовательно, $R_N(\tau)$ – релеевский процесс.

В связи с тем, что точное выражение для $F_N(H)$ неизвестно, получим соответствующую приближенную формулу. В [3] высказано предположение об асимптотическом совпадении вероятностных характеристик превышения достаточно высокого уровня для марковского и локально марковского стационарных процессов. Сравним вероятности непревышения некоторого уровня для двух стационарных нормальных процессов – марковского и локально марковского. Функция корреляции марковского процесса

$$r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}. \tag{6}$$

Локально марковским называется процесс, функцию корреляции которого при $\tau \to 0$ представим в виде

$$r(\tau) = 1 - \alpha|\tau| + 0(|\tau|).$$

Сравнивая асимптотическое выражение для вероятности непревышения порога, полученное в [4, 5] для стационарного нормального локально марковского процесса с аналогичным результатом для стационарного нормального марковского процесса [6], убеждаемся, что они асимптотически (при $H \to \infty$) совпадают. Таким образом, в данном случае вместо рассмотрения локального марковского процесса можно оперировать соответствующим марковским процессом, учитывая, что H должно быть велико. Пусть

$$\xi(\tau) = \sqrt{X_1^2(\tau) + Y_1^2(\tau)}, \tag{7}$$

где $X_1(\tau)$, $Y_1(\tau)$ – гауссовы стационарные случайные процессы со средними значениями, равными нулю, и функциями корреляции (6), т.е. $\xi(\tau)$ – релеевский марковский процесс. Как было показано выше, характеристики потока выбросов процесса (7) за уровень при $H \to \infty$ асимптотически совпадают с аналогичными характеристиками случайного процесса $R_N(\tau)$ (4), если в (6) положить $\alpha = 1/\Delta$.

Плотность вероятности случайного процесса (4) удовлетворяет дифференциальному уравнению Фоккера–Планка, в результате решения которого [6]

$$P(H) \simeq \exp(-\lambda_0 T_0),$$

где $T_0 = T_2 - T_1$; $\quad \frac{1}{\lambda_0} = \frac{2}{K}\int_{x_1}^{H}\frac{dx}{W_{st}(x)}$;

$P(H)$ – вероятность непревышения некоторого уровня H [illegible] случайным процессом на отрезке $[T_1, T_2]$; $W_{st}(x) = xe^{-x^2/2}$ – стационарная плотность вероятности распределения случайного процесса $\xi(\tau)$, которая совпадает с плотностью вероятности $R_N(x)$ [illegible] $K = 2\alpha = 2/\Delta$. Величина x_1 лежит в области максимальной вероятности значений процесса (4). Формула получена при условии $W_{st}(H) \ll 1$, которое здесь выполняется, так как предполагается, что $H \gg 1$. Выбирая $x_1 = 1$, имеем

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\alpha}\int_1^H e^{x^2/2}\,\frac{dx}{x}.$$

Удерживая лишь первый член в асимптотическом разложении этого интеграла при $H \to \infty$, получаем

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\alpha H^2}\left[1 + O(H^{-2})\right]\exp(H^2/2).$$

Следовательно, при $H \gg 1$

$$P(H) \simeq \exp\left\{-\alpha T_0 H^2 \exp\left(-\frac{H^2}{2}\right)\right\} \qquad (8)$$

Для конечных значений H будем аппроксимировать $F_N(H)$ его предельным значением (8). Поскольку правая часть (8) является неубывающей функцией H лишь при $H \geq \sqrt{2}$, положим

$$F_N(H) \simeq \begin{cases} \exp\left[-\vartheta H^2 \exp(-H^2/2)\right], & H \geq \sqrt{2}, \\ 1, & H < \sqrt{2}. \end{cases} \qquad (9)$$

Здесь $\vartheta = \alpha(T_2 - T_1) = T_0/\Delta$. Выражение (5) для вероятности ложной тревоги принимает вид:

$$\alpha \simeq \begin{cases} 1 - \exp\left[-\vartheta R_0^2/z^2 \exp(-R_0^2/2z^2)\right], & R_0 \geq \sqrt{2}\,z, \\ 0, & R_0 < \sqrt{2}\,z. \end{cases} \qquad (10)$$

Определим вероятность ошибок второго рода $\beta(\varepsilon_0)$. Полагаем, что в принятой реализации $x(t)$ присутствует сигнал и $z \to \infty$. Тогда оценка максимального правдоподобия величины положения сигнала стремится к его истинному значению, т.е. $\tau_m \to \tau_0$. Следовательно, величина абсолютного максимума (2) $H_0 = R(\tau_m) \approx R(\tau_0)$. Поэтому

$$W_0(H) \approx \frac{H}{Z^2} \exp\left[-\frac{H^2+Z^4}{2Z^2}\right] I_0(H),$$

где $I_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента, поэтому

$$\beta(\tau_0) \approx P_0(R_0) = \int_0^{R_0/Z} \frac{H}{Z^2} \exp\left(-\frac{H^2+Z^4}{2Z^2}\right) I_0(H)\, dH.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\beta(\tau_0) \approx 1 - Q(Z, R_0), \tag{11}$$

где $Q(u,v) = \int_v^\infty x \exp\left(-\frac{x^2+u^2}{2}\right) I_0(ux)\, dx$ – известная табулированная функция [1].

Точность формул (9), (10), (11) растет с увеличением параметра ν, отношения сигнал/шум и нормированного порога R_0/Z. По определению эквивалентной длительности сигнала

$$T_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt / \max S^2(t).$$

Следовательно, $\nu = T_0/\Delta = T_0/T_\varepsilon$, т.е. ν показывает, во сколько раз априорный интервал значений неизвестного временного положения больше эквивалентной длительности сигнала.

Сравним характеристики обнаружения недифференцируемого радиосигнала с аналогичными характеристиками дифференцируемого. В качестве последнего удобно выбрать колокольный радиоимпульс

$$S_1(t,\tau,\varphi) = a_1 \exp\left[-\frac{(t-\tau)^2}{\gamma^2}\right] \cos\left[\omega_0(t-\tau) - \varphi\right]. \tag{12}$$

Его эквивалентная длительность $T_\varepsilon = \gamma\sqrt{\pi/2}$. Из формул, полученных в [2] для характеристик обнаружения сигнала, содержащего векторный неэнергетический параметр применительно к сигналу (12) получаем

$$\alpha_1 = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\frac{\nu}{2}\, \frac{R_0}{Z} \exp\left(-R_0^2/2Z^2\right)\right], & R_0 \geq Z, \\ 1, & R_0 < Z. \end{cases} \tag{13}$$

Величины вероятности пропуска для недифференцируемого и дифференцируемого сигналов при сделанных предположениях практически совпадают, т.е. $\beta_1 \simeq \beta_0$.

Согласно (10) и (13), $\alpha/\alpha_1 \to 2R_0/Z$ при $Z \to \infty$ и $R/Z \to \infty$. Так как $\alpha \to 0$ при $R_0/Z \to \infty$, то относительные потери при обнаружении разрывного сигнала по сравнению с дифференцируемым возрастают с уменьшением требуемого уровня ложных тревог.

Литература

1. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М., 1966.
2. Маршаков В.К., Трифонов А.П. Теоретическое и экспериментальное исследование приемника максимального правдоподобия. - "Радиотехника и электроника", 1974, т. 19, № 11.
3. Беляев Ю.К. Новые результаты и обобщения задач типа пересечений. М., 1969.
4. Pickands J. Cross-section probability for the S.G.P. - Trans Amer. Math. Soc.", 1969, v. 145.
5. Питербарг В.И. О работе Д.Пикандса "Вероятности пересечения для стационарного гауссовского процесса".- "Вестник МГУ. Сер. Математика, механика", 1972, № 5.
6. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., 1961.

УДК 621.396.029

А.К.Сенаторов

РАЗЛИЧЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Пусть в интервале времени $[0; T]$ на вход приемного устройства поступает реализация

$$x(t) = S(t-\tau_{01}) + n(t) \tag{1}$$

или

$$x(t) = S(t-\tau_{02}) + n(t),$$

где $n(t)$ – аддитивная помеха, которую будем считать белым ш-

ИБ № 438

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ
ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Редактор Г.Н.Рахманина
Корректор М.Г.Шигрева

ЛЕ 03598	Подп. в печ. 31.10.78.	Форм.бум. 70x108/16
Бумага № 2.	Усл. п. л. 13,3.	Уч.-изд.л. 7,32.
Тираж 250.	Заказ 3738.	Цена 1 р. 10 к.

Издательство Воронежского университета
Воронеж, ул. Ф.Энгельса, 8
Ротапринт типографии издательства ВГУ
Воронеж, ул. Пушкинская, 3