АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXXIII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

5

МОСКВА · 1988

УДК 621.396.96.01

ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА СТАТИСТИЧЕСКИ-ШЕРОХОВАТОГО ОБЪЕКТА ПРИ НАЛИЧИИ ФОНА

Трифонов А.П., Зюльков А.В.

Для двух моделей взаимодействия случайных полей, рассеянных объектом и фоном, найдены характеристики оценки максимального правдоподобия неэнергетического параметра объекта при наличии шума.

Положим, что как исследуемый объект, так и окружающий его фон описываются моделью статистически-шероховатой поверхности и облучаются монохроматическим колебанием с частотой ω_0. Ограничимся моделью статистически-шероховатой поверхности [1], для которой поля, рассеянные объектом и фоном, имеют одинаковые пространственные корреляционные свойства, но отличаются своей интенсивностью. Оценке подлежат параметры пространственной области, соответствующей объекту в картинной плоскости (плоскости, расположенной у объекта и перпендикулярной направлению наблюдения). Такая задача возникает при измерении пространственных параметров различных объектов с помощью информационных оптических систем, радиолокационных станций обзора земной поверхности и т.п. (см., например, [1, 2]). Таким образом, в результате облучения исследуемой поверхности в области Ω картинной плоскости формируется рассеянное случайное поле с комплексной амплитудой $\dot{E}(\vec{r})$, $\vec{r} \in \Omega$. Область картинной плоскости, ограниченную контуром изображения объекта, обозначим $\Omega_S(\lambda)$, где λ – неизвестный параметр, подлежащий оценке. Ограничимся оценкой параметров, для которых площадь $S_0 = S[\Omega_S(\lambda)]$ не зависит от λ [1, 3]. Найдем предельную точность одного из наиболее распространенных алгоритмов оценки – метода максимального правдоподобия [4].

Положим сначала, что исследуемый объект отсутствует в области Ω. В результате облучения монохроматической волной формируется лишь фоновое излучение с комплексной амплитудой $\dot{E}_F(\vec{r})$, $\vec{r} \in \Omega$. Итак, воспользуемся рассмотренной в [1] моделью статистически-шероховатой поверхности. Тогда фоновое излучение представляет собой реализацию гауссовского квазиоднородного поля, для комплексной амплитуды которого имеем

$$\langle \dot{E}_F(\vec{r}) \rangle = \langle \dot{E}_F(\vec{r}_1)\dot{E}_F(\vec{r}_2) \rangle = \langle \dot{E}_F(\vec{r}_1)\dot{E}^*_F(\vec{r}_2) \rangle = 0;$$

$$\langle \dot{E}_F(\vec{r}_1)\dot{E}^*_F(\vec{r}_2) \rangle = G_F I[\vec{r}_1, \Omega]\, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Здесь G_F – локальная пространственная спектральная плотность фонового излучения [5], $\delta(\cdot)$ – дельта-функция, звездочка означает комплексно-сопряженную величину,

$$I[\vec{r}, \Omega] = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in \Omega, \\ 0, & \vec{r} \,\bar{\in}\, \Omega. \end{cases}$$

При наличии объекта в области наблюдения фоновое излучение формируется только частью $\Omega_F(\lambda) = \Omega \backslash \Omega_S(\lambda)$ области Ω. В предположениях [1, 2] комплексная амплитуда $\dot{E}(\vec{r})$ рассеянного поля опять является реализацией гауссовского квазиоднородного поля, причем

$$\langle \dot{E}(\vec{r}_1) \rangle = \langle \dot{E}(\vec{r}_1)\dot{E}(\vec{r}_2) \rangle = \langle \dot{E}^*(\vec{r}_1)\dot{E}^*(\vec{r}_2) \rangle = 0, \tag{1}$$

$$\langle \dot{E}(\vec{r}_1)\dot{E}^*(\vec{r}_2) \rangle = \{G_S I[\vec{r}_1, \Omega_S(\lambda)] + G_F I[\vec{r}_1, \Omega_F(\lambda)]\}\, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

где G_S – локальная пространственная спектральная плотность мощности излучения, рассеянного исследуемым объектом [5]. На приемной апертуре устройства обработки, занимающей область Ω_{a}, в течение интервала времени $[0, T]$ наблюдается реализация случайного поля [1, 2]

$$\epsilon(\vec{\rho}, t) = \mathrm{Re} \int_{\Omega} \dot{E}(\vec{r})\, \dot{H}(\vec{r} - \vec{\rho})\, d\vec{r} \exp(-j\omega_0 t) + n(\vec{\rho}, t),$$

$$\vec{\rho} \in \Omega_{\mathrm{a}}, \quad t \in [0, T].$$

Здесь $\dot{E}(\vec{r})$ – реализация комплексной амплитуды случайного поля с характеристиками (1), $n(\vec{\rho}, t)$ – реализация пространственно-временного гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0, $\dot{H}(\vec{r})$ – функция Грина уравнения Гельмгольца для комплексной амплитуды поля в свободном пространстве в приближении Френеля (например, [1, 2]).

Пренебрегая несущественными слагаемыми, логарифм функционала отношения правдоподобия для неизвестного параметра λ согласно [1, 2], можно записать в виде

$$L(\lambda) = \int_{\Omega} v(\vec{r}, \lambda) \left| \int_{\Omega_{\mathrm{a}}} \dot{H}(\vec{r} - \vec{\rho})\, \dot{\epsilon}_T^*(\vec{\rho})\, d\vec{\rho} \right|^2 d\vec{r}, \tag{2}$$

где $\dot{\epsilon}_T(\vec{\rho}) = \int_0^T \epsilon(\vec{\rho}, t) \exp(j\omega_0 t)\, dt$,

$$v(\vec{r}, \lambda) = I[\vec{r}, \Omega_S(\lambda)]\,(q_S - q_F)/[TN_0(1 + q_S)(1 + q_F)], \tag{3}$$

$q_S = TG_S/(4N_0)$, $q_F = TG_F/(4N_0)$ – отношения сигнал/шум и фон/шум в одной пространственной моде наблюдаемого поля. Формула (2) верна в условиях высокой пространственной разрешающей способности (число пространственных элементов разрешения на объекте велико), так что

$$D = S_0 S_{\mathrm{a}} \omega_0 (2\pi R c)^{-2} \gg 1. \tag{4}$$

Здесь $S_{\mathrm{a}} = S[\Omega_{\mathrm{a}}]$ – площадь апертуры устройства обработки, c – скорость распространения волны, R – расстояние между картинной плоскостью и плоскостью апертуры устройства обработки. Интерпретация (2), а также возможные методы формирования $L(\lambda)$ подробно обсуждены в [1, 2].

В соответствии с определением оценка максимального правдоподобия $\hat{\lambda} = \arg\sup L(\lambda)$, что с учетом (3) можно переписать в виде

$$\hat{\lambda} = \arg\sup \tilde{L}(\lambda) \tag{5}$$

при $G_S > G_F$ и

$$\hat{\lambda} = \arg\inf \tilde{L}(\lambda) \tag{6}$$

при $G_S < G_F$, где

$$\tilde{L}(\lambda) = \int_{\Omega_S(\lambda)} \left| \int_{\Omega_{\mathrm{a}}} \dot{H}(\vec{r} - \vec{\rho})\, \dot{\epsilon}_T^*(\vec{\rho})\, d\vec{\rho} \right|^2 d\vec{r}.$$

Согласно (3), (5), (6), для реализации оценки максимального правдоподобия параметра λ достаточно знать форму области $\Omega_S(\lambda)$, а также знак разности $G_S - G_F$. При этом знание абсолютных величин спектральных плотностей G_S и G_F не обязательно. Отметим также, что при $G_S = G_F$, как следует из (3), оценка параметра λ невозможна.

Найдем характеристики оценки максимального правдоподобия параметра λ в условиях высокой апостериорной точности, т.е. пренебрегая аномальными ошибками [3, 4]. Для этого рассмотрим статистические характеристики логарифма функционала отношения правдоподобия (2). В условиях высокого пространственного разрешения его можно приближенно считать гауссовским случайным процессом [1, 2], поэтому ограничимся определением математического ожидания и корреляционной функции логарифма функционала отношения правдоподобия.

Представим $L(\lambda)$ в виде суммы нормированных сигнальной и шумовой функций [4]:

$$L(\lambda) = \sigma\,[zH(\lambda, \lambda_0) + h(\lambda)] + C, \tag{7}$$

где $H(\lambda, \lambda_0) = S_0^{-1} S\,[\Omega_S(\lambda) \cap \Omega_S(\lambda_0)]$,

$$h(\lambda) = [L(\lambda) - \langle L(\lambda)\rangle]/\sigma,\ \sigma^2 = \langle [L(\lambda_0) - \langle L(\lambda_0)\rangle]^2\rangle = \\ = (q_S - q_F)^2 D\,(1 + q_F)^{-2}, \tag{8}$$

$C = (q_S - q_F)D/(1 + q_S)$ – несущественное постоянное слагаемое, λ_0 – истинное значение неизвестного параметра, $z^2 = (q_S - q_F)^2(1 + q_S)^{-2}D$ – параметр, который можно интерпретировать как отношение сигнал/шум на выходе устройства обработки [4]. При этом $z \to \infty$, если $D \to \infty$ и $q_S \neq q_F$; $\langle h(\lambda)\rangle = 0$; $\max H(\lambda, \lambda_0) = H(\lambda_0, \lambda_0) = \langle h^2(\lambda_0)\rangle = 1$ и корреляционная функция шумовой функции

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \langle h(\lambda_1) h(\lambda_2)\rangle = S_0^{-1}\{S\,[\Omega_S(\lambda_1) \cap \Omega_S(\lambda_2)]\,(1 + q_F)^2 + \\ + (q_S^2 + 2q_S - q_F^2 - 2q_F)\,S\,[\Omega_S(\lambda_1) \cap \Omega_S(\lambda_2) \cap \Omega_S(\lambda_0)]\}\,(1 + q_S)^{-2}. \tag{9}$$

Угловыми скобками обозначена операция усреднения, выполняемая как по реализациям шумового поля, так и по реализациям полей, рассеянных объектом и фоном с учетом статистической независимости полей при фиксированном λ_0.

Используя известные свойства операций над множествами, аналогично [3] перепишем (8), (9) в виде

$$H(\lambda, \lambda_0) = 1 - S_0^{-1} S\,[\Omega_S(\lambda) \backslash \Omega_S(\lambda_0)],$$
$$K(\lambda_1, \lambda_2) = 1 - S_0^{-1} S\,[\Omega_S(\lambda_1) \backslash \Omega_S(\lambda_2)] - (q_S^2 + 2q_S - q_F^2 - 2q_F) \times \\ \times (1 + q_S)^{-2} S_0^{-1} S\{[\Omega_S(\lambda_1) \backslash \Omega_S(\lambda_0)] \cap [\Omega_S(\lambda_2) \backslash \Omega_S(\lambda_0)]\}.$$

В условиях высокой апостериорной точности оценки, т.е. при $z \gg 1$ ее характеристики определяются поведением логарифма функционала отношения правдоподобия в малой окрестности истинного значения параметра λ_0 [4]. Поэтому, когда $z \to \infty$, достаточно исследовать поведение $L(\lambda)$ и функций (8), (9) в малой окрестности λ_0. Обозначим далее

$$\delta = \max\{|\lambda_1 - \lambda_2|,\ |\lambda_1 - \lambda_0|,\ |\lambda_2 - \lambda_0|\} \tag{10}$$

и положим, что $\delta \to 0$. Тогда

$$H(\lambda, \lambda_0) = 1 - A\,|\lambda - \lambda_0| + o(|\lambda - \lambda_0|), \tag{11}$$

где

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 1 - A\,|\lambda_1 - \lambda_2| - gA\min(|\lambda_1 - \lambda_0|, |\lambda_2 - \lambda_0|) + o(\delta), \\ (\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0) > 0,\ (\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0) < 0, \\ 1 - A\,|\lambda_1 - \lambda_2| + o(\delta), \end{cases}$$

$$A = \lim_{|\lambda - \lambda_0| \to 0} \frac{S\,[\Omega_S(\lambda) \backslash \Omega_S(\lambda_0)]}{S_0\,|\lambda - \lambda_0|} = \left.\frac{\partial S\,[\Omega_S(\lambda) \cap \Omega_S(\lambda_0)]}{S_0\,\partial\lambda}\right|_{\lambda = \lambda_0},$$
$$g = (q_S + q_F + 2)(q_S - q_F)(1 + q_S)^{-2}.$$

Значения коэффициента A для ряда конкретных пространственных параметров приведены в [1, 3]. Установленные свойства логарифма функционала отношения правдоподобия позволяют использовать для расчета рассеяния (среднего квадрата ошибки) оценки максимального правдоподобия метод локально-марковской аппроксимации, развитый в [3, 6, 7]. В результате аналогично [3] находим рассеяние оценки

$$V(\hat{\lambda}) = \langle\langle(\hat{\lambda} - \lambda_0)^2\rangle\rangle = 13\,[(1 + q_S)^2 + (1 + q_F)^2]^2/[8A^2D^2(q_S - q_F)^4] \tag{12}$$

Формула (12) получена с учетом того факта, что исследуемый объект "затеняет" часть фона в области Ω. В ряде работ, посвященных обработке изображений [8–10], отмечено, что такое затенение является принципиально важной отличительной особенностью задач оптической пеленгации. Тем не менее к настоящему времени практически отсутствуют решения конкретных задач с учетом эффекта затенения. В [8–10] обычно предполагается, что для объектов, размеры которых малы по сравнению с размерами области Ω, эффектом затенения можно пренебречь. При этом используется аддитивная модель взаимодействия сигнала и фона. В результате комплексная амплитуда рассеянного поля представляется в виде суммы

$$\dot{E}(\vec{r}) = \dot{E}_S(\vec{r}) + \dot{E}_F(\vec{r}), \tag{13}$$

где $\dot{E}_S(\vec{r})$ – комплексная амплитуда поля, рассеянного объектом. В этом случае в отличие от (1) имеем

$$\langle \dot{E}(\vec{r}_1)\dot{E}^*(\vec{r}_2)\rangle = \{G_S I[\vec{r}_1, \Omega_S(\lambda)] + G_F I[\vec{r}_1, \Omega]\}\,\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \tag{14}$$

Пусть используется аддитивная модель взаимодействия сигнального и фонового полей (13). Тогда логарифм функционала отношения правдоподобия $L_1(\lambda)$ при выполнении условия (4) определяется формулой (2), где надо заменить $v(\vec{r}, \lambda)$ на $v_1(\vec{r}, \lambda) = q_S I[\vec{r}, \Omega_S(\lambda)]/[TN_0(1 + q_F)(1 + q_S + q_F)]$. Из полученного соотношения и формулы (2) следует, что оценка максимального правдоподобия параметра λ при использовании аддитивной модели определяется соотношением (5) вне зависимости от знака разности $G_S - G_F$.

Найдем точность оценки максимального правдоподобия параметра λ при использовании аддитивной модели. Для этого логарифм функционала отношения правдоподобия $L_1(\lambda)$ представим аналогично (7) в виде суммы нормированных сигнальной и шумовой функций: $L_1(\lambda) = \sigma_N[z_1 H(\lambda, \lambda_0) + h_1(\lambda)] + C_1$, где $H(\lambda, \lambda_0)$ определяется из (8),

$$\sigma_N^2 = Dq_S^2(1 + q_F)^{-2}, \quad z_1^2 = q_S^2 D(1 + q_S + q_F)^{-2},$$

$$K_1(\lambda_1, \lambda_2) = S_0^{-1}\{(q_F + 1)^2(1 + q_F + q_S)^{-2}\, S[\Omega_S(\lambda_1) \cap \Omega_S(\lambda_2)] +$$

$$+ (q_S^2 + 2q_S q_F + 2q_S)(1 + q_F + q_S)^{-2}\, S[\Omega_S(\lambda_1) \cap \Omega_S(\lambda_2) \cap \Omega_S(\lambda_0)]\}.$$

Здесь при вычислении моментов использовалось соотношение (14). Пусть определяемая формулой (10) величина $\delta \to 0$. Тогда для нормированной сигнальной функции справедливо представление (11), а корреляционная функция $K_1(\lambda_1, \lambda_2)$ шумовой функции $h_1(\lambda)$ имеет вид

$$K_1(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 1 - A|\lambda_1 - \lambda_2| - \alpha A \min(|\lambda_1 - \lambda_0|, |\lambda_2 - \lambda_0|) + o(\delta), \\ (\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0) > 0, (\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0) < 0, \\ 1 - A|\lambda_1 - \lambda_2| + o(\delta), \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\alpha = (q_S^2 + 2q_S q_F + 2q_S)(1 + q_F + q_S)^{-2}.$$

Согласно (11), (15), вновь для расчета рассеяния оценки можно использовать метод локально-марковской аппроксимации [6, 7]. В результате находим, что при использовании аддитивной модели (13) рассеяние оценки

$$V_1(\hat{\lambda}) = 13\,[1 + (1 + q_S)^2 + 2q_F\,(q_S + q_F + 2)]^2/[8A^2D^2q_S^4]. \tag{16}$$

Из сопоставления (12) и (16) следует, что эти формулы совпадают при условии

$$q_S \gg q_F. \tag{17}$$

Тогда $V(\hat{\lambda}) \simeq V_1(\hat{\lambda}) = 13[1 + (1 + q_S)^2]^2/[8A^2D^2q_S^4]$ и рассеяние оценки не зависит от интенсивности фона. Таким образом, независимо от соотношения размеров объекта и области наблюдения аддитивную модель для расчета предельной точности оценки можно использовать только при выполнении условия (17). Однако в этом случае рассеяние оценки не зависит от q_F, что равносильно пренебрежению фоном. Иными словами, использовать аддитивную модель для расчета предельной точности оценки максимального правдоподобия при наличии фона нельзя.

Положим теперь, что аддитивная модель используется только для синтеза алгоритма, а для его анализа используется соотношение (1). Тогда оценка максимального правдоподобия определяется из (5), т.е. совпадает с оценкой при использовании неаддитивной модели (1), если $G_S > G_F$. Следовательно, если поле на входе устройства обработки обладает характеристиками (1), то ненормированная сигнальная функция имеет вид

$$\langle L_1(\lambda)\rangle = \frac{Dq_S\,(q_S - q_F)}{(1 + q_F)\,(1 + q_F + q_S)}\,S_0^{-1}\,S\,[\Omega_S\,(\lambda) \cap \Omega_S\,(\lambda_0)] + \frac{Dq_S}{1 + q_S + q_F}$$

Отсюда видно, что при $G_S > G_F$ оценка максимального правдоподобия, синтезированная на основе аддитивной модели, обладает теми же характеристиками, что и для неаддитивной модели. Однако при $G_S < G_F$ использовать алгоритм, синтезированный на основе аддитивной модели, нельзя. Действительно, в этом случае сигнальная составляющая при $\lambda = \lambda_0$ достигает не максимума, а минимума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Троицкий И.Н., Устинов Н.Д.*//Статистическая теория голографии. М.: Радио и связь, 1981.
2. *Матвеев И.Н., Сафронов А.Н., Троицкий И.Н., Устинов Н.Д.*//Адаптация в информационных оптических системах. М.: Радио и связь, 1984.
3. *Трифонов А.П., Зюльков А.В.*//РЭ. 1982. Т. 27. № 5. С. 903.
4. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.*//Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
5. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.*//Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978. Т. 2.
6. *Трифонов А.П.*//РЭ. 1977. Т. 22. № 1. С. 90.
7. *Трифонов А.П.*//РЭ. 1980. Т. 25. № 4. С. 749.
8. *Василенко Г.И.*//Голографическое опознавание образов. М.: Сов. радио, 1977.
9. *Trabka E.A., Refling P.G.*//Opt. Soc. America. 1964. V. 54. № 10. P. 1241.
10. *Левшин В.Л.*//Пространственная фильтрация в оптических системах пеленгации. М.: Сов. радио, 1971.

Поступила в редакцию
19.XII 1985