

РАДИОТЕХНИКА

5 / 8 9

Радиооптические методы и устройства

УДК 621.391

Асимптотически непараметрический обнаружитель оптического сигнала

А. П. Трифонов, Т. М. Овчинникова

Выполнен синтез и анализ обнаружителя максимального правдоподобия при неизвестных задержке и интенсивностях сигнала и фона.

Задача обнаружения сигнала с неизвестной задержкой имеет многочисленные приложения в системах оптической связи и локации [1, 2]. При этом, как правило, оказываются неизвестными интенсивности сигнала и фона. Положим, что на интервале времени $[0; T]$ наблюдается реализация пуассоновского процесса $\xi(t)$ с интенсивностью $\lambda(t)$. При гипотезе H_0 (сигнал отсутствует)

$$\lambda(t) = \lambda_{0N}, \quad (1)$$

при гипотезе H_1 (сигнал присутствует)

$$\lambda(t) = \lambda_{0S} I[(t - \tau_0)/\gamma] + \lambda_{0N}. \quad (2)$$

Здесь λ_{0N} и λ_{0S} — априори неизвестные интенсивности фона и сигнала; $I(x) = 1, |x| \leq 1/2$; $I(x) = 0, |x| > 1/2$; τ_0 — неизвестная задержка сигнала, которая принимает значения из интервала $[T_1; T_2]$, причем $\gamma/2 < T_1, T_2 + \gamma/2 < T$; γ — длительность сигнала.

Для обнаружения сигнала воспользуемся методом максимального правдоподобия [3, 4], в соответствии с которым необходимо формировать функционал отношения правдоподобия (ФОП)

$$l = \max_{\lambda_N, \lambda_S, \tau} F[\xi(t)|H_1] / \max_{\lambda_N} F[\xi(t)|H_0], \quad (3)$$

где $F[\xi(t)|H_i]$ — функционал плотности вероятности процесса $\xi(t)$, когда верна гипотеза $H_i, i=0; 1$.

Подставляя в (3) явный вид ФОП [5] и выполняя в числителе и знаменателе максимизацию по неизвестным параметрам сигнала и фона, получаем

$$l = \exp L, \quad L = \max_{\tau} L(\tau), \quad \tau \in [T_1; T_2], \quad (4)$$

$$L(\tau) = \xi_{\tau} \ln \frac{\xi_{\tau} T}{\gamma \xi_T} + (\xi_T - \xi_{\tau}) \ln \frac{(\xi_T - \xi_{\tau}) T}{(T - \gamma) \xi_T}, \quad (5)$$

$$\xi_T = \int_0^T d\xi(t), \quad \xi_{\tau} = \int_{\tau - \gamma/2}^{\tau + \gamma/2} d\xi(t). \quad (6)$$

Решение о наличии сигнала выносится, если $L > h$, а решение об отсутствии, если $L < h$, где h — порог обнаружения.

Синтезированный обнаружитель максимального правдоподобия, изображенный на рис. 1, можно реализовать относительно просто. Здесь l — ключ, который открывается на время $[0; T]$, 2 — интегратор (счетчик импульсов),

3 — линия задержки на длительность полезного сигнала γ , 4 — инверторы, 5 — линия задержки на время анализа T , 6 — делители, 7 — усилитель с коэффициентом усиления $m = T/\gamma$, 8 — логарифмические усилители, 9 — усилитель с коэффициентом усиления $m/(m-1)$, 10 — ключ, который открывается на время $[T+T_1; T+T_2]$, 11 — пиковый детектор, 12 — пороговое устройство. Аналогично [1, 2] предполагалось, что на вход обнаружителя поступает производная пуассоновского процесса $\xi'(t)$, представляющая собой случайную последовательность коротких импульсов. Однако его применение приводит к увеличению времени обработки T на величину T_2 . Это объясняется необходимостью сформировать

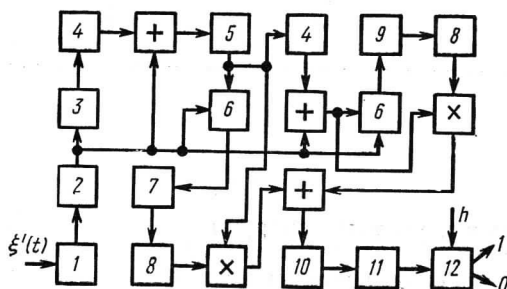


Рис. 1

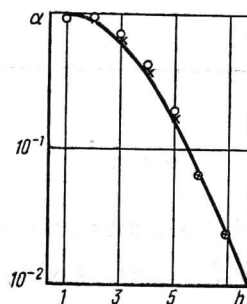


Рис. 2

величину ξ_T (6), для чего в обнаружитель введена задержка реализации наблюдаемых данных на время T .

Положим, что сигнал на входе приемника отсутствует. Тогда вероятность ложной тревоги

$$\alpha = P[L > h | H_0] = P[\max_{\tau} L_N(\tau) > h] = 1 - P[L_N(\tau) \leq h] = 1 - F_N(h), \quad (7)$$

где $F_N(h)$ — функция распределения абсолютных максимумов логарифма ФОП (5), когда верна гипотеза H_0 (1).

Для определения $F_N(\cdot)$ введем в рассмотрение центрированные и нормированные случайный процесс

$$y = y(\tau) = (\xi_\tau - \langle \xi_\tau \rangle) / \sqrt{\langle \xi_\tau^2 \rangle} \quad (8)$$

и случайную величину

$$x = (\xi_T - \langle \xi_T \rangle) / \sqrt{\langle \xi_T^2 \rangle}. \quad (9)$$

Будем считать, что среднее число точек процесса $\xi(t)$, зафиксированное на интервале длительностью γ , велико, так что

$$\mu = \lambda_{0N} \gamma \gg 1. \quad (10)$$

Обозначив $\varepsilon = 1/\sqrt{\mu}$ и используя (8), (9), запишем (5) при отсутствии сигнала:

$$L_N(\tau, \varepsilon) = \mu \left[(\varepsilon y + 1) \ln \frac{(\varepsilon y + 1) \sqrt{m}}{\varepsilon x + \sqrt{m}} + (\varepsilon x \sqrt{m} + m - \varepsilon y - 1) \ln \frac{(\varepsilon x \sqrt{m} + m - \varepsilon y - 1) \sqrt{m}}{(\varepsilon x + \sqrt{m})(m-1)} \right]. \quad (11)$$

Когда выполняется (10), $\varepsilon \ll 1$. Поэтому разложим (11) в ряд по степеням ε и удержим лишь первый ненулевой член разложения, содержащий ε . В результате получим аппроксимацию

$$L_N(\tau) \equiv L_N(\tau, \varepsilon) \approx L_N''(\tau, 0) \varepsilon^2 / 2 = \frac{m}{2(m-1)} \left[y - \frac{x}{\sqrt{m}} \right]^2. \quad (12)$$

Используя (1), для первых двух моментов процесса (12) находим

$$\begin{aligned} \langle L_N(\tau) \rangle &= 1/2, \quad K_L(\tau_1, \tau_2) = \langle [L_N(\tau_1) - 1/2][L_N(\tau_2) - 1/2] \rangle = \\ &= \frac{1}{4} \begin{cases} 2 + \frac{(m-1)^2}{\mu m^2} - \left[\frac{4m}{m-1} + \frac{(m-2)^2}{\mu(m-1)^2} \right] \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{\gamma} + \\ + \frac{2m^2}{(m-1)^2} \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{\gamma^2}, \quad |\tau_1 - \tau_2| \leq \gamma. \\ 2m^2 - 4m + 1 \\ \mu m^2(m-1)^2} + \frac{2}{(m-1)^2}, \quad |\tau_1 - \tau_2| > \gamma. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть кроме (10) выполняется неравенство $m \gg 1$. Тогда $K_L(\tau_1, \tau_2) \approx 0$ при $|\tau_1 - \tau_2| > \gamma$, а в окрестности своего максимума корреляционная функция (13) логарифма ФОП (11) примет вид

$$K_L(\tau_1, \tau_2) \approx 1/2 - |\tau_1 - \tau_2|/\gamma, \quad |\tau_1 - \tau_2| \ll \gamma. \quad (14)$$

С ростом μ распределения случайных процесса (8) и величины (9) сходятся к гауссовским [6]. Следовательно, при выполнении (10) плотность вероятности процесса (12)

$$W_N(L) = \exp(-L)/\sqrt{L\pi}. \quad (15)$$

Из (14), (15) следует, что для расчета функции распределения $F_N(h)$ (7) можно использовать метод локально-марковской аппроксимации [4]. Воспользовавшись этим методом, найдем приближенное значение вероятности ложной тревоги [3]

$$\alpha \approx \begin{cases} 1 - \exp[-m_0 h^{1/2} \exp(-h)/\sqrt{\pi}], & h > 1/2, \\ 1, & h < 1/2; m_0 = (T_2 - T_1)/\gamma. \end{cases} \quad (16)$$

Согласно [3] точность (16) растет с увеличением μ , m , m_0 и порога h . Асимптотическое значение α не зависит от априори неизвестной интенсивности фона λ_{0N} . Следовательно, синтезированный обнаружитель максимального правдоподобия (4), (5) асимптотически непараметрический.

На рис. 2. представлена зависимость $\alpha(h)$, рассчитанная по (16) для $m_0 = 20$. С целью проверки возможности использования и установления границ применимости (16) было выполнено статистическое моделирование обнаружителя (4), (5) на ЭВМ. Экспериментальные значения вероятности ложной тревоги, полученные в результате обработки $5 \cdot 10^3$ реализаций процесса $\xi(t)$ с интенсивностью (1) отмечены крестиками для $\mu = 10$ и кружками для $\mu = 50$. Согласно рис. 2 точность аппроксимации экспериментальных зависимостей асимптотической формулой (16) растет с увеличением порога h и вероятность ложной тревоги практически не зависит от неизвестной интенсивности шума λ_{0N} .

Положим теперь, что сигнал на входе приемника присутствует, т. е. верна гипотеза H_1 (2). Тогда вероятность пропуска сигнала

$$\beta = P[\max_{\tau} L(\tau) < h | H_1] = P[L_S(\tau) < h], \quad \tau \in [T_1; T_2]. \quad (17)$$

Для среднего значения величин (6) имеем $\langle \xi_\tau \rangle = \mu(m+q)$, $\langle \xi_\tau \rangle = \mu\psi(\tau, \tau_0)$, $\psi(\tau, \tau_0) \equiv \psi = 1 + q(1 - |\tau - \tau_0|/\gamma)$ при $|\tau - \tau_0| < \gamma$ и $\psi = 1 + q$ при $|\tau - \tau_0| > \gamma$, где $q = \lambda_{0S}/\lambda_{0N}$ — отношение сигнал-фон для принятого сигнала.

Обозначив $\varphi = \langle \xi_\tau \rangle / \langle \xi_T \rangle^{-1} = \psi/(m+q)$ и используя (8) и (9), перепишем (5) в виде

$$L_S(\tau) \equiv L_S(\tau, \varepsilon) = \mu(m+q) \left\{ \varphi \left(\frac{\varepsilon y}{\sqrt{\psi}} + 1 \right) \ln \left[m \sqrt{\varphi} \frac{\varepsilon y + \sqrt{\psi}}{\varepsilon x + \sqrt{m+q}} \right] + \left[\frac{\varepsilon x}{\sqrt{m+q}} + 1 - \varphi \left(\frac{\varepsilon y}{\sqrt{\psi}} + 1 \right) \right] \ln \left[\frac{m}{m-1} \frac{\varepsilon x + \sqrt{m+q} - \sqrt{\varphi}(\varepsilon y + \sqrt{\psi})}{\varepsilon x + \sqrt{m+q}} \right] \right\}. \quad (18)$$

Разложим (18) в ряд по степеням ε . Удерживая лишь первый ненулевой член разложения, содержащий ε , получаем аппроксимацию

$$L_S(\tau) \approx \mu(m+q) \left\{ \varphi \ln \frac{\varphi(m-1)}{1-\varphi} + \ln \frac{m(1-\varphi)}{m-1} + \left[\frac{\varphi y}{\sqrt{\psi}} \ln \frac{\varphi(m-1)}{1-\varphi} + \frac{x}{\sqrt{m+q}} \ln \frac{m(1-\varphi)}{m-1} \right] \varepsilon \right\}. \quad (19)$$

Для расчета вероятности пропуска представим (19) в виде суммы сигнальной и шумовой функций [3, 4]:

$$L_S(\tau) = S(\tau) + N(\tau), \quad (20)$$

где $S(\tau) = \langle L_S(\tau) \rangle$, $N(\tau) = L_S(\tau) - \langle L_S(\tau) \rangle$.

Введем в рассмотрение отношение сигнал-шум на выходе приемника (5)

$$z^2 = \frac{S^2(\tau_0)}{\langle N^2(\tau_0) \rangle} = \mu \frac{[(1+q)\ln(1+q) - (m+q)\ln(1+q/m)]^2}{\ln^2(1+q) - 2(1+q)\ln(1+q)\ln(1+q/m) + (m+q)\ln^2(1+q/m)}. \quad (21)$$

Сигнальная функция $S(\tau)$ в (20) достигает максимума при $\tau = \tau_0$. Поэтому, когда отношение сигнал-шум (21) велико, достаточно исследовать поведение $L_S(\tau)$ (19) в малой окрестности τ_0 . Нетрудно убедиться, что при $\mu \rightarrow \infty$ и $q > 0$ $z^2 \rightarrow \infty$. Выражение для отношения сигнал-шум существенно упрощается, когда $m \gg 1$ и $q \ll 1$:

$$z^2 \approx \mu q^2 / 4. \quad (22)$$

Обозначим $\delta = \max(|\tau_1 - \tau_0|, |\tau_2 - \tau_0|, |\tau_1 - \tau_2|)$. При $\delta \rightarrow 0$ для сигнальной функции и функции корреляции шумовой функции в (20) получаем

$$S(\tau) = A_S - B_S |\tau - \tau_0| / \gamma, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \langle N(\tau_1)N(\tau_2) \rangle &= A_N - B_N |\tau_1 - \tau_2| / \gamma - \\ &- C_N \begin{cases} \min(|\tau_1 - \tau_0|, |\tau_2 - \tau_0|), & (\tau_1 - \tau_0)(\tau_2 - \tau_0) > 0, \\ 0, & (\tau_1 - \tau_0)(\tau_2 - \tau_0) < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} A_S &= \mu[(1+q)\ln(1+q) - (m+q)\ln(1+q/m)], \quad B_S = \mu q \ln(1+q); \\ A_N &= \mu[\ln^2(1+q) - 2(1+q)\ln(1+q)\ln(1+q/m) + (m+q)\ln^2(1+q/m)]; \\ B_N &= \mu[(1+q)\ln^2(1+q) + q\ln(1+q) - q\ln(1+q)\ln(1+q/m)], \\ C_N &= \mu q \ln(1+q)[\ln(1+q) + 2 - 2\ln(1+q/m)] / \gamma. \end{aligned}$$

Согласно [6] при выполнении (17) распределение логарифма ФОП (19), (20) является приближенно гауссовским. Поэтому, учитывая (23) и (24), можем, применяя метод локально-марковской аппроксимации [4], найти вероятность $P_\delta(h) = P[L_S(\tau) < h]$, $\tau_0 - \delta < \tau < \tau_0 + \delta$. При $z \rightarrow \infty$ эта вероятность совпадает с вероятностью пропуска сигнала (17). В результате аналогично [3] для больших отношений сигнал-шум получаем

$$\beta \approx \Phi(u-z) - 2\exp[b^2/2 - (u-z)b]\Phi(u-z-b) + \exp[2b^2 - 2(u-z)b]\Phi(u-z-2b),$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности [3]; $b = 2q\sqrt{A_N}/(2+q)\ln(1+q)$; $u = h/\sqrt{A_N}$ — нормированный порог.

Найденное выражение для вероятности пропуска является приближенным, однако точность его возрастает с увеличением μ , z и h . Оно несколько упрощается при $q \ll 1$, но при $\mu q^2 \gg 1$ и принимает вид

$$\beta \approx \Phi(h/2z - z) - 2\exp(4z^2 - h)\Phi(h/2z - 3z) + \exp(12z^2 - 2h)\Phi(h/2z - 5z),$$

где z определяется из (22).

- Таким образом, найдены структура и характеристики асимптотически непараметрического обнаружителя оптического сигнала с неизвестными задержкой и интенсивностью на фоне помехи с неизвестной интенсивностью. Экспериментально подтверждена асимптотическая независимость вероятности ложной тревоги от интенсивности фона.

Литература

1. Гальярди Р. М., Карп Ш. Оптическая связь. — М.: Связь, 1978.
2. Волохатюк В. А., Кочетков В. М., Красовский Р. Р. Вопросы оптической локации. — М.: Сов. радио, 1971.
3. Трифонов А. П. — В кн.: Теория обнаружения сигналов. — М.: Радио и связь, 1984.
4. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — Радио и связь, 1986.
5. Большаков И. А., Ракошиц В. С. Прикладная теория случайных потоков. — М.: Сов. радио, 1978.
6. Марченко Б. Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. — Киев: Наукова думка, 1973.

Поступила после доработки 5 мая 1988 г.