

РАДИОТЕХНИКА  
И  
ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXXIV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

11

# СОВМЕСТНАЯ ОЦЕНКА ДВУХ ПАРАМЕТРОВ РАЗРЫВНОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА

Трифонов А.П., Бутейко В.К.

Найдены асимптотические формулы для двухмерного распределения и моментов оценок максимального правдоподобия временного положения и длительности прямоугольного импульса. Показано, что распределения существенно негауссовские. Совместные оценки некоррелированы, но их дисперсии в два раза превышают дисперсии раздельных оценок. Приведены результаты статистического моделирования на ЭВМ.

## ВВЕДЕНИЕ

Модель сигнала в виде прямоугольного импульса широко применяется во многих областях радиотехники (см., например, [1–7]). Такой сигнал является разрывной функцией двух параметров: временного положения и длительности. В работе [2] найдены характеристики оценки максимального правдоподобия (ОМП) временного положения прямоугольного импульса при априори известной длительности, а в [3] получены характеристики ОМП длительности, когда априори известно временное положение. Асимптотические характеристики ОМП одного параметра разрывного радиосигнала с неизвестной начальной фазой найдены в [6]. В данной работе определим характеристики совместных ОМП двух параметров: временного положения и длительности сигнала прямоугольной формы.

Пусть наблюдается реализация случайного процесса

$$(1) \quad x(t) = s(t, \lambda_0, \tau_0) + n(t), \quad |t| \leq T/2,$$

где  $n(t)$  — белый гауссовский шум с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ , а полезный сигнал

$$(2) \quad s(t, \lambda, \tau) = \begin{cases} a, & \lambda - \tau/2 \leq t \leq \lambda + \tau/2, \\ 0, & t < \lambda - \tau/2, \quad t > \lambda + \tau/2. \end{cases}$$

Обозначим

$$(3) \quad L(\lambda, \tau) = \frac{2a}{N_0} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} x(t) dt - \frac{a^2 \tau}{N_0}$$

— логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР). Тогда ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  определяются как координаты положения абсолютного (наибольшего) максимума случайного поля (3) при  $(\tau, \lambda) \in \Lambda$ . Полагаем, что область  $\Lambda$  задана неравенствами

$$(4) \quad |\lambda| \leq \Lambda_0/2, \quad T_1 \leq \tau \leq T_2,$$

т.е. имеет форму прямоугольника, показанного на рис. 1 сплошной линией. Аналогично [2, 3] ограничимся рассмотрением надежных ОМП. Нетрудно убедиться, что аномальные ошибки [4, 6, 7] отсутствуют, если

$$(5) \quad \Lambda_0 \leq T_1.$$

Действительно, подставляя в (3) реализацию наблюдаемых данных (1), получаем

$$(6) \quad L(\lambda, \tau) = z^2 S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) + zN(\lambda, \tau) - z^2 \tau/2\tau_0.$$

Здесь нормированная сигнальная функция [7]

$$(7) \quad S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) = [\min(\lambda + \tau/2, \lambda_0 + \tau_0/2) - \max(\lambda - \tau/2, \lambda_0 - \tau_0/2)]/\tau_0$$

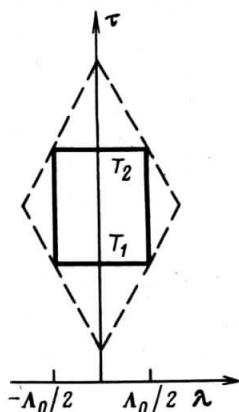


Рис. 1

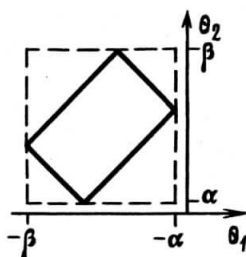


Рис. 2

при  $|\lambda - \lambda_0| \leq (\tau + \tau_0)/2$  и

$$S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) = 0$$

при  $|\lambda - \lambda_0| > (\tau + \tau_0)/2$ ,  $z^2 = 2a^2\tau_0/N_0$  — отношение сигнал/шум для принятого сигнала. Нормированная шумовая функция  $N(\lambda, \tau)$  является центрированным гауссовским случайным полем, корреляционная функция которого [4, 5, 7] равна

$$(8) \quad K_N(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2) = S(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2).$$

Согласно (7),  $S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) \neq 0$  для всех  $(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) \in \Lambda$ , когда выполняется (5).

### 1. АППРОКСИМАЦИЯ СОВМЕСТНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ОЦЕНОК

Для определения характеристик ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  перейдем к новым параметрам

$$(9) \quad \theta_1 = \lambda - \tau/2, \quad \theta_2 = \lambda + \tau/2.$$

Эти параметры представляют собой положения соответственно переднего и заднего фронтов сигнала (2). Обозначим  $\Theta$  — область возможных значений параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Связь между областями  $\Theta$  и  $\Lambda$  легко установить, воспользовавшись преобразованиями (9) и обратными к ним:

$$(10) \quad \lambda = (\theta_1 + \theta_2)/2, \quad \tau = \theta_2 - \theta_1.$$

В частности, области  $\Lambda$ , заданной неравенствами (4), соответствует область  $\Theta$ , показанная на рис. 2 сплошной линией. Линейные преобразования в (9) и (10) взаимно однозначные. Поэтому, определив характеристики ОМП  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  параметров  $\theta_1, \theta_2$  с помощью (10) можно затем найти характеристики ОМП  $\hat{\lambda}, \hat{\tau}$  временного положения и длительности сигнала (2).

Для параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$  логарифм ФОП (3) принимает вид

$$(11) \quad L(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2),$$

где

$$(12) \quad L_1(\theta_1) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\vartheta} x(t) dt - \frac{a^2(\vartheta - \theta_1)}{N_0},$$

$$(13) \quad L_2(\theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{\vartheta}^{\theta_2} x(t) dt - \frac{a^2(\theta_2 - \vartheta)}{N_0},$$

$\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  — фиксированная точка из интервала  $[-(T_1 - \Lambda_0)/2; (T_1 - \Lambda_0)/2]$ . Для ОМП  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  функция распределения равна

$$(14) \quad F(\theta_1, \theta_2) = P[\hat{\theta}_1 < \theta_1, \hat{\theta}_2 < \theta_2; (\theta_1, \theta_2) \in \Theta] = \\ = P\{\sup[L(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2); (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \in \Theta_1] > \sup[L(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2); (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \in \Theta_2]\}.$$

Подобласть  $\Theta_1$  означает часть области  $\Theta$ , в которой значения  $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$  удовлетворяют неравенствам  $\tilde{\theta}_1 < \theta_1, \tilde{\theta}_2 < \theta_2$ , а подобласть  $\Theta_2$  — дополнение  $\Theta_1$  до  $\Theta$ , так что  $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ . Однако найти функцию распределения (14) при произвольной форме области  $\Theta$ , в частности для области  $\Theta$ , показанной на рис. 2 сплошной линией, не удастся. Определим функцию распределения совместных ОМП  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  в случае  $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_a$ . Область  $\Theta_a$  задана неравенствами

$$(15) \quad -\beta \leq \theta_1 \leq -\alpha; \quad \alpha \leq \theta_2 \leq \beta; \quad \alpha = (T_1 - \Lambda_0)/2, \quad \beta = (T_2 + \Lambda_0)/2$$

и представляет собой квадрат минимальной площади с параллельными осям координат сторонами, который полностью включает в себя область  $\Theta$ . На рис. 2 область  $\Theta_a$  показана штриховой линией. Обозначим  $F_a(\theta_1, \theta_2)$  функцию распределения ОМП  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ , когда  $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_a$ . Очевидно, что

$$(16) \quad F_a(\theta_1, \theta_2) = P[\hat{\theta}_1 < \theta_1, \hat{\theta}_2 < \theta_2; (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_a] = \\ = P\{\sup[L(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2), (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \in \Theta_{1a}] > \sup[L(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2), (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \in \Theta_{2a}]\}.$$

Подобласть  $\Theta_{1a}$  определена неравенствами  $-\beta \leq \tilde{\theta}_1 < \theta_1, \alpha \leq \tilde{\theta}_2 < \theta_2$ , а подобласть  $\Theta_{2a}$  дополняет  $\Theta_{1a}$  до  $\Theta_a$ , так что  $\Theta_{1a} \cup \Theta_{2a} = \Theta_a$ .

В правой части (11) каждое слагаемое зависит только от одного из параметров:  $\theta_1$  или  $\theta_2$ . Поэтому с учетом формы подобласти  $\Theta_{1a}$  имеем

$$(17) \quad \sup[L(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2), (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \in \Theta_{1a}] = \sup[L_1(\tilde{\theta}_1) + \\ + L_2(\tilde{\theta}_2), (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \in \Theta_{1a}] = \sup[L_1(\tilde{\theta}_1), -\beta \leq \tilde{\theta}_1 < \theta_1] + \\ + \sup[L_2(\tilde{\theta}_2), \alpha \leq \tilde{\theta}_2 < \theta_2] = A_1 + B_1.$$

Обозначим далее

$$(18) \quad A_2 = \sup[L_1(\tilde{\theta}_1), \theta_1 \leq \tilde{\theta}_1 \leq -\alpha], \quad B_2 = \sup[L_2(\tilde{\theta}_2), \theta_2 \leq \tilde{\theta}_2 \leq \beta].$$

Тогда, учитывая (17), (18) и форму подобластей  $\Theta_{1a}$  и  $\Theta_{2a}$ , можно переписать (16) в виде

$$(19) \quad F_a(\theta_1, \theta_2) = P[A_1 + B_1 > \max(A_1 + B_2, A_2 + B_2, A_2 + B_1)] = \\ = P[B_1 > B_2, A_1 + B_1 > A_2 + B_2, A_1 > A_2] = P[A_1 > A_2, B_1 > B_2].$$

Случайные функции (12) и (13) статистически независимы, так как выражаются через интегралы от белого шума на неперекрывающихся интервалах  $[\theta_1, \vartheta]$  и  $[\vartheta, \theta_2]$ . Следовательно, из (17) — (19) получаем

$$F_a(\theta_1, \theta_2) = P\{\sup[L_1(\tilde{\theta}_1), -\beta \leq \tilde{\theta}_1 < \theta_1] > \sup[L_1(\tilde{\theta}_1), \theta_1 \leq \tilde{\theta}_1 \leq -\alpha]\} \times \\ \times P\{\sup[L_2(\tilde{\theta}_2), \alpha \leq \tilde{\theta}_2 < \theta_2] > \sup[L_2(\tilde{\theta}_2), \theta_2 \leq \tilde{\theta}_2 \leq \beta]\} = F_1(\theta_1)F_2(\theta_2).$$

Здесь  $F_1(\theta_1)$  и  $F_2(\theta_2)$  — функции распределения положений абсолютных максимумов реализаций случайных процессов  $L_1(\theta_1)$  (12) и  $L_2(\theta_2)$  (13) на интервалах  $[-\beta, -\alpha]$  и  $[\alpha; \beta]$  соответственно. Для распределений положений абсолютных максимумов процессов (12), (13) в [3] найдены точные формулы, используя которые, можем записать совместную плотность вероятности

$$(20) \quad W_a(\theta_1, \theta_2) = \frac{\partial^2 F_a(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \frac{\partial F_1(\theta_1)}{\partial \theta_1} \frac{\partial F_2(\theta_2)}{\partial \theta_2} = W_{1\theta}(\theta_1)W_{2\theta}(\theta_2),$$

где

$$W_{1\theta}(\theta_1) = \begin{cases} \Psi[(\theta_{01} - \theta_1)k, (\beta + \theta_{01})k, -(\alpha + \theta_{01})k], \\ -\beta \leq \theta_1 \leq \theta_{01}, \\ \Psi[(\theta_1 - \theta_{01})k, -(\alpha + \theta_{01})k, (\beta + \theta_{01})k], \\ \theta_{01} \leq \theta_1 \leq -\alpha, \end{cases}$$

$$W_{2\theta}(\theta_2) = \begin{cases} \Psi[(\theta_{02} - \theta_2)k, (\theta_{02} - \alpha)k, (\beta - \theta_{02})k], \\ \alpha \leq \theta_2 \leq \theta_{02}, \\ \Psi[(\theta_2 - \theta_{02})k, (\beta - \theta_{02})k, (\theta_{02} - \alpha)k], \\ \theta_{02} \leq \theta_2 \leq \beta, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Psi(y, y_1, y_2) &= (2\sqrt{\pi}y^{3/2})^{-1} \{ \Phi[\sqrt{(y_1 - y)/2}] + \\ &+ \exp[-(y_1 - y)/4] / \sqrt{\pi(y_1 - y)} \} \int_0^\infty x \exp[-(x + y)^2/4y] \times \\ &\times \{ \Phi[(y_2 + x)/\sqrt{2y_2}] - \exp(-x) \Phi[(y_2 - x)/\sqrt{2y_2}] \} dx, \\ (21) \quad k &= z^2/(2\tau_0), \end{aligned}$$

$\theta_{01} = \lambda_0 - \tau_0/2$ ,  $\theta_{02} = \lambda_0 + \tau_0/2$ ,  $\Phi(\cdot)$  — интеграл вероятности [1]. Согласно (9), (20), совместная плотность вероятности ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  при  $(\lambda, \tau) \in \Lambda_a$  имеет вид  $W_a(\lambda, \tau) = W_{1\theta}(\lambda - \tau/2) W_{2\theta}(\lambda + \tau/2)$ . Область  $\Lambda_a$  соответствует области  $\Theta_a$  (15) и показана на рис. 1 штриховой линией. Область  $\Lambda_a$  отличается от действительной области возможных значений оцениваемых параметров  $\Lambda$ , показанной сплошной линией, но включает в себя все точки области  $\Lambda$ . Поэтому аналогично [8] плотность вероятности оценок  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  при  $(\lambda, \tau) \in \Lambda$  аппроксимируем выражением

$$(22) \quad W(\lambda, \tau) = W_a(\lambda, \tau) / \iint_{\Lambda} W_a(\lambda, \tau) d\lambda d\tau,$$

при  $(\lambda, \tau) \in \Lambda$  и  $W(\lambda, \tau) = 0$  при  $(\lambda, \tau) \notin \Lambda$ . В дальнейшем будем полагать, что истинные значения  $\lambda_0$  и  $\tau_0$  неизвестных параметров сигнала (2) являются внутренней точкой области  $\Lambda$ . При этом точность аппроксимации (22) улучшается с ростом апостериорной точности оценок, т.е. с увеличением отношения сигнал/шум [2-7].

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНОК

Введем в рассмотрение нормированные ошибки ОМП временного положения и длительности сигнала (2):

$$(23) \quad \mu = 2(\hat{\lambda} - \lambda_0)k, \quad \nu = (\hat{\tau} - \tau_0)k.$$

Переходя в (21), (22) к новым переменным и полагая  $z \gg 1$ , находим предельную двумерную плотность вероятности нормированных ошибок совместных оценок:

$$(24) \quad W_2(\mu, \nu) = W_0[(\mu - \nu)/2] W_0[(\mu + \nu)/2] / 2.$$

Здесь

$$(25) \quad W_0(x) = 3 \exp(2|x|) [1 - \Phi(3\sqrt{|x|/2})] + \Phi(\sqrt{|x|/2}) - 1$$

— предельная плотность вероятности нормированной ошибки ОМП одного параметра разрывного сигнала при условии, что второй параметр известен [4]. Из выражений (24), (25) следует, что для разрывного сигнала плотности вероятности ОМП существенно отличаются от гауссовской. В частности, при нулевом

коэффициенте асимметрии плотность (25) имеет коэффициент эксцесса, равный  $1779/169 \approx 10,53$ , а получаемые из (24) маргинальные плотности величин  $\mu$  и  $\nu$  имеют коэффициент эксцесса  $1779/338 \approx 5,26$ .

Совместная плотность (24) позволяет рассчитать асимптотические значения смещений, рассеяний и коэффициента корреляции ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$ :

$$(26) \quad \begin{aligned} b(\hat{\lambda} | \lambda_0, \tau_0) &= \langle \hat{\lambda} - \lambda_0 \rangle = 0; \quad b(\hat{\tau} | \lambda_0, \tau_0) = \langle \hat{\tau} - \tau_0 \rangle = 0; \\ V(\hat{\lambda} | \lambda_0, \tau_0) &= \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle = 13\tau_0^2/z^4; \\ V(\hat{\tau} | \lambda_0, \tau_0) &= \langle (\hat{\tau} - \tau_0)^2 \rangle = 52\tau_0^2/z^4; \\ K_1 &= \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)(\hat{\tau} - \tau_0) \rangle [\langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle \langle (\hat{\tau} - \tau_0)^2 \rangle]^{-1/2} = 0. \end{aligned}$$

Совместные оценки временного положения и длительности сигнала (2) некоррелированы, что свидетельствует об отсутствии линейной статистической взаимосвязи. Однако рассеяния совместных оценок (26) в два раза превышают рассеяния соответствующих отдельных оценок [2, 3]. Следовательно, между оценками  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  существует нелинейная статистическая зависимость. Количественно охарактеризовать эту зависимость можно коэффициентом корреляции между квадратами ошибок оценок:

$$(27) \quad K_2 = \frac{\langle (\mu^2 - \langle \mu^2 \rangle)(\nu^2 - \langle \nu^2 \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (\mu^2 - \langle \mu^2 \rangle)^2 \rangle \langle (\nu^2 - \langle \nu^2 \rangle)^2 \rangle}} = \frac{1779}{2455} \approx 0,725.$$

Оценим погрешность замены аппроксимации (22) совместной плотности вероятности оценок на предельную плотность вероятности (24). С этой целью по формулам (20)–(22) на ЭВМ ЕС-1060 рассчитаны нормированные рассеяния совместных оценок  $\rho_{\tau} = V(\hat{\tau} | \lambda_0, \tau_0)/\tau_0^2$ ,  $\rho_{\lambda} = V(\hat{\lambda} | \lambda_0, \tau_0)/\tau_0^2$ , а также квадратичный коэффициент корреляции. Расчеты проводили для истинных значений неизвестных параметров

$$(28) \quad \lambda_0 = 0, \quad \tau_0 = (T_2 + T_1)/2$$

и области  $\Lambda$  с границами

$$(29) \quad \Lambda_0 = \tau_0/2, \quad T_1 = \tau_0/2, \quad T_2 = 3\tau_0/2.$$

Полученные зависимости показаны на рис. 3, 4 сплошными линиями. На рис. 3 кривые 1 и 2 соответствуют  $\rho_{\tau}(z)$  и  $\rho_{\lambda}(z)$ . На рис. 4 представлен квадратичный коэффициент корреляции  $K_2(z)$ . Штрихпунктирными линиями на рис. 3, 4 показаны аналогичные зависимости, рассчитанные по асимптотическим формулам (26), (27). Согласно рис. 3, 4, результаты расчетов по простым асимптотическим формулам (26), (27) и по более точным, но и значительно более громоздким формулам (20)–(22) практически совпадают при  $z \geq 6 \dots 9$ . Расхождение сплошных и штрихпунктирных линий на рис. 3, 4 объясняется, во-первых, различием плотностей вероятностей (22) и (24); во-вторых, тем, что при вычислении (26), (27) область  $\Lambda$  распространялась на всю плоскость.

Повысить точность расчета характеристик оценки на основе предельной плотности вероятности (25) можно, если ограничить область интегрирования при вычислении моментов оценок. С этой целью перейдем в (24) к переменным  $\lambda, \tau$  согласно (23). Тогда асимптотическая плотность вероятности совместных оценок  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  запишем в виде

$$(30) \quad W_{0a}(\lambda, \tau) = k^2 W_0 \left[ \frac{2(\lambda - \lambda_0) - \tau + \tau_0}{2} k \right] W_0 \left[ \frac{2(\lambda - \lambda_0) + \tau - \tau_0}{2} k \right],$$

где  $W_0(\cdot)$  определяется из (25), а  $k$  – из (21). Аналогично [8] и (22) плотность

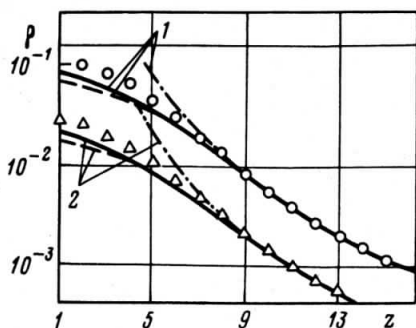


Рис. 3

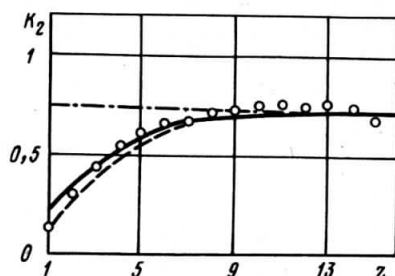


Рис. 4

вероятности ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  аппроксимируем выражением

$$(31) \quad W_0(\lambda, \tau) = W_{0a}(\lambda, \tau) / \iint_{\Lambda} W_{0a}(\lambda, \tau) d\lambda d\tau$$

при  $(\lambda, \tau) \in \Lambda$  и  $W_0(\lambda, \tau) = 0$  при  $(\lambda, \tau) \notin \Lambda$ .

Характеристики оценок, рассчитанные по формулам (25), (30), (31) на ЭВМ ЕС-1060 показаны на рис. 3, 4 штриховыми линиями. Из рисунков следует, что более простую, чем (22), асимптотическую аппроксимацию (31) двумерной плотности вероятности можно использовать для численных расчетов уже при  $z \geq 1 \dots 2$ . Отметим, что применение (25), (30), (31) вместо (21), (22) для численных расчетов характеристик оценки позволяет сократить затраты машинного времени в 20...30 раз.

### 3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАДИОСИГНАЛА

Рассмотрим прием радиоимпульса

$$(32) \quad s(t, \lambda, \tau, \varphi) = \begin{cases} a \cos(\omega t - \varphi), & \lambda - \tau/2 \leq t \leq \lambda + \tau/2, \\ 0, & t < \lambda - \tau/2, t > \lambda + \tau/2. \end{cases}$$

Полагаем, что радиоимпульс (32) является узкополосным и его начальная фаза  $\varphi$  априори неизвестна. Согласно [4-7], в этом случае ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  сигнала (32) представляют собой координаты абсолютного максимума случайного поля:

$$(33) \quad L_\varphi(\lambda, \tau) = \sqrt{X^2(\lambda, \tau) + Y^2(\lambda, \tau)} - a^2 \tau / 2 N_0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} X(\lambda, \tau) \\ Y(\lambda, \tau) \end{aligned} \right\} = \frac{2a}{N_0} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} x(t) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\omega t) dt.$$

Подставляя реализацию наблюдаемых данных в (33) и пренебрегая интегралами от членов, осциллирующих с удвоенной частотой, имеем

$$(34) \quad L_\varphi(\lambda, \tau) = z_\varphi \{ z_\varphi^2 S^2(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) + 2 z_\varphi S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) \times \\ \times [N_c(\lambda, \tau) \cos \varphi_0 + N_s(\lambda, \tau) \sin \varphi_0] + N_c^2(\lambda, \tau) + N_s^2(\lambda, \tau) \}^{1/2} - z_\varphi^2 \tau / 2 \tau_0,$$

где функция  $S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0)$  определяется формулой (7),  $z_\varphi^2 = a^2 \tau_0 / N_0$  — отноше-

ние сигнал/шум для принятого радиосигнала (32),

$$\left. \begin{matrix} N_c(\lambda, \tau) \\ N_s(\lambda, \tau) \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\sqrt{N_0 \tau_0}} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} n(t) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\omega t) dt,$$

а  $\lambda_0, \tau_0, \varphi_0$  — истинные значения параметров принятого радиосигнала (32). Если  $z_\varphi \gg 1$ , то, ограничиваясь двумя членами в разложении (34) по степеням  $z_\varphi^{-1}$ , получаем

$$(35) \quad L_\varphi(\lambda, \tau) \approx z_\varphi^2 S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) + z_\varphi N_\varphi(\lambda, \tau) - z_\varphi^2 \tau / 2 \tau_0.$$

Здесь  $N_\varphi(\lambda, \tau) = N_c(\lambda, \tau) \cos \varphi_0 + N_s(\lambda, \tau) \sin \varphi_0$  и при фиксированном  $\varphi_0$  представляет собой центрированное гауссовское случайное поле с корреляционной функцией (8). Сравнивая (35) с (6), видим, что при  $z_\varphi \gg 1$  решающие статистики для сигналов (2) и (32) совпадают с точностью до определения отношения сигнал/шум. В результате при больших  $z_\varphi$  для расчета характеристик совместных ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  радиосигнала (32) можно использовать формулы (20)–(31), заменив в них  $z$  на  $z_\varphi$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На ЭВМ ЕС-1060 проводили статистическое моделирование совместных ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  сигнала (2). Моделирование выполняли для истинных значений неизвестных параметров (28) и границ области  $\Lambda$  (29). В процессе моделирования воспроизводили отсчеты случайного поля (3) на равномерной двумерной решетке с шагом дискретизации  $5 \cdot 10^{-3} \tau_0$ . Число обрабатываемых реализаций случайного поля (3) выбирали так, чтобы с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклонялись от экспериментальных значений не более чем на 10...15%. Экспериментальные значения характеристик совместных оценок временного положения  $\hat{\lambda}$  (треугольники) и длительности  $\hat{\tau}$  (кружочки) сигнала (32) нанесены на рис. 3. На рис. 4 кружочками показаны экспериментальные значения квадратичного коэффициента корреляции совместных оценок.

Как следует из рис. 3, 4, удовлетворительное согласование численных расчетов на основе (22) или (31) с экспериментальными зависимостями наблюдается при отношении сигнал/шум  $z \geq 2 \dots 3$ . Однако асимптотические формулы (26), (27) имеют удовлетворительную точность лишь при  $z \geq 6 \dots 9$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
2. Терентьев А.С.//РЭ. 1968. Т. 13. № 4. С. 652.
3. Трифонов А.П.//РЭ. 1977. Т. 12. № 1. С. 90.
4. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
5. Трифонов А.П.//Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984. С. 12–89.
6. Трифонов А.П.//РЭ. 1979. Т. 24. № 11. С. 2226.
7. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
8. Горяинов В.Т.//Изв. Вузов. Радиоэлектроника. 1970. Т. 13. № 7. С. 787.

Поступила в редакцию 31.V.1988