

117

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

---

# АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 67

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

---

МОСКВА · 1990

УДК 524.35-423

© 1990 г.

ТРИФОНОВ А. П., ВЕТРОВ С. В.

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА В ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Установлено, что алгоритм оценки параметров всплеска гравитационного излучения по методу максимального правдоподобия не требует для своей реализации дополнительной априорной информации, и его применение не приводит к существенному увеличению объема машинных вычислений по сравнению с методом наименьших квадратов. Показано, что в общем случае применение метода максимального правдоподобия позволяет заметно повысить точность оценки параметров гравитационного всплеска, что весьма важно для перспективы гравитационно-волнового эксперимента, а также в приложении к другим тонким экспериментам с пробными телами.

ESTIMATION OF THE PARAMETERS OF THE SIGNAL IN THE GRAVITATION-WAVE EXPERIMENT, by *Trifonov A. P., Vetrov S. V.*— It has been established that algorithm of parameters estimation of gravitation disturbing radiation according to the maximum likelihood method does not require for its realization additional a priori information and its application does not lead to a significant increase of the volume of computer calculations in comparison with the minimum square method. It is shown that in a general case the application of maximum likelihood method allows us to increase the accuracy of estimation of gravitation disturbing parameters, that is very important for the perspective of gravitation-wave experiment and also for the application to some other experiments with probe bodies.

### 1. Введение

Для исследования возможностей гравитационно-волновой астрономии в [1, 2] предложена двухэтапная адаптивная процедура восстановления формы и оценки параметров импульса гравитационного воздействия на веберовскую антенну. На первом этапе отыскивалось решение обратной задачи восстановления формы импульса в виде аппроксимирующей функции с неизвестными параметрами. Затем на втором этапе определялись оценки неизвестных параметров аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов (МНК). Для анализа эффективности предложенной процедуры восстановления в [1] был выполнен численный эксперимент, в котором реакция гравитационной антенны на импульс гравитационного излучения моделировалась на ЭВМ с помощью основных уравнений. Результаты численного эксперимента позволяют на полукачественном уровне показать возможность восстановления формы и параметров импульсных сигналов относительно простой структуры. Однако численный эксперимент, отвечающий выбранным авторами [1] параметрам гравитационной антенны с большим количеством ограничений, позволяет получить лишь частные результаты. В связи с этим представляет интерес определение точности оценок параметров по МНК аналитическими методами.

Известно [3, 4], что оценка по МНК является оптимальной при наблюдении сигнала на фоне аддитивного гауссовского белого шума. В [1, 2] показано, что на выходе гравитационной антенны с релаксационной ре-

гистрирующей цепью наряду с белым шумом имеет место аддитивный коррелированный шум. Наличие коррелированной компоненты шума в общем случае снижает эффективность оценки по МНК. При характерном для гравитационно-волнового эксперимента отсутствии априорной информации о параметрах гравитационного импульса для их оценки может быть использован метод максимального правдоподобия (ММП) [3, 4]. Этот метод позволяет учесть наличие коррелированной компоненты шума на выходе гравитационной антенны и не требует для своей реализации дополнительной априорной информации о гравитационном импульсе по сравнению с МНК.

Цель данной работы — анализ точности оценок параметров гравитационного импульсного воздействия на веберовскую антенну по МНК и исследование возможности повышения точности оценок в результате применения ММП на втором этапе процедуры восстановления, предложенной в [1, 2].

На основе методики, развитой в [3], получены общие выражения для характеристик оценок параметров гравитационного импульса по МНК. Выполнен синтез алгоритма оценки по ММП. Показано, что его реализация не требует значительного увеличения объема машинных вычислений по сравнению с МНК. Установлены условия, при которых применение ММП вместо МНК позволяет существенно повысить точность оценок параметров гравитационного импульса. В частности, применение ММП обеспечивает более высокую точность оценки, когда из-за отсутствия достаточной априорной информации не удастся обеспечить совпадение основной части спектра сигнала и полосы пропускания антенны.

## 2. Точность оценки по методу наименьших квадратов

Аналогично [1, 2] рассмотрим простейший вариант гравитационной антенны, состоящей из гравитационного детектора с непараметрической регистрирующей цепью (антенна веберовского типа). Напряжение на выходе такой антенны имеет вид [1]

$$\bar{U}(t) = s(t, l_0) + \xi(t) + E_{\text{ш}}(t). \quad (1)$$

Здесь

$$s(t, l_0) = \int_0^t K_s(t-\tau) f(\tau, l_0) d\tau \quad (2)$$

— сигнальный отклик гравитационной антенны на внешнее воздействие  $f(t, l_0)$ , эквивалентное гравитационному всплеску,  $l_0 = \{l_{01}, l_{02}, \dots, l_{0n}\}$  —  $n$ -мерный вектор истинных значений неизвестных параметров, подлежащих оценке;

$$\xi(t) = \int_0^t K_N(t-\tau) E_{\text{ш}}(\tau) d\tau \quad (3)$$

— гауссовский коррелированный шум, возникающий в результате прохождения теплового флуктуационного шума  $E_{\text{ш}}(t)$  через избирательные элементы гравитационной антенны. Тепловой шум  $E_{\text{ш}}(t)$  обусловлен флуктуациями в диссипативных элементах регистрирующей цепи гравитационной антенны. В дальнейшем, в соответствии с [5, 6], будем предполагать, что

в пределах полосы пропускания антенны  $E_{\mu}(t)$  является центрированным гауссовским белым шумом с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ .

Импульсные переходные функции  $K_s(t)$  и  $K_N(t)$  в (2) и (3), а также численные значения параметров, характеризующие гравитационную антенну, определены в [1] и имеют вид

$$K_s(t) = \exp(-a't) (A \sin \omega_0 t - B \cos \omega_0 t) + B \exp(-b't); \quad (4)$$

$$K_N(t) = \exp(-a't) [\theta(Q-1) \cos \omega_0 t + (\theta/\omega_0) (Q(a'-b') + a' + b') \sin \omega_0 t] - \theta Q \exp(-b't); \quad (5)$$

$$A = \frac{E_0 \omega_{\mu} ((a')^2 + \omega_0^2 - a'b')}{\omega_0 (\omega_0^2 + (b' - a')^2)}; \quad B = \frac{E_0 \omega_{\mu} b'}{\omega_0^2 + (b' - a')^2};$$

$$Q = \frac{(b')^2 + \theta^2 - 2\omega_0^2 \lambda}{\omega_0^2 + (b' - a')^2}.$$

Причем

$$a' = 15 \text{ с}^{-1}, \quad b' = 2470 \text{ с}^{-1}, \quad \theta = 2500 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_{\mu} = 600 \text{ с}^{-1}, \\ \omega_0 = 534 \text{ с}^{-1}, \quad E_0 = 44 \text{ В}, \quad \lambda = 0,11. \quad (6)$$

Все обозначения параметров гравитационной антенны соответствуют [1].

Предположим, что момент начала наблюдения  $t'$  аддитивной смеси сигнала и шума на выходе гравитационной антенны  $\bar{U}(t)$  (1) выбирается таким образом, что  $t' > \tau^*$ , где  $\tau^* = (a')^{-1} \approx 0,07 \text{ с}$  — время релаксации гравитационной антенны. Тогда коррелированная компонента шума  $\xi(t)$  (3) на выходе гравитационной антенны является стационарным гауссовским центрированным случайным процессом. Кроме того, в соответствии с [1] будем считать, что всплеск гравитационного излучения локализован во времени в пределах интервала наблюдения  $[t', T]: f(t', I_0) = f(T, I_0) = 0$  и  $f(t, I_0)$  является достаточно гладкой функцией с необходимым количеством производных.

Корреляционная функция шума  $\xi(t)$ , исходя из (3) и (5), может быть записана [7] как

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = M[\xi(t_1)\xi(t_2)] \approx \sigma_{\xi}^2 \exp(-a'|t_1 - t_2|) \times \\ \times [\cos \omega_0(t_1 - t_2) + (a'/\omega_0) \sin \omega_0|t_1 - t_2|]; \quad (7)$$

где  $\sigma_{\xi}^2 = N_0 q^4 / 8a' \omega_0^2$ ;  $q^4 = \theta^2 (b')^2 (Q-1)^2$ . При определении корреляционной функции (7) учитывалось, что в соответствии с характерными численными значениями параметров гравитационной антенны (6)  $a' \ll b'$  и  $a' \ll \omega_0$ . В тех же предположениях шумы  $E_{\mu}(t)$  и  $\xi(t)$  на выходе гравитационной антенны оказываются приближенно некоррелированными.

Перейдем к определению характеристик оценки компонент вектора неизвестных параметров  $I$  всплеска гравитационного излучения  $f(t, I)$  при использовании на втором этапе процедуры восстановления МНК [1, 2]. Оценка  $\tilde{I}$ , осуществляемая по МНК, определяется как

$$\tilde{I} = \arg \inf_{I \in E_n} L_{\Delta}(I), \quad (8)$$

где

$$L_{\Delta}(I) = \int_{t'}^T [\bar{U}(t) - s(t, I)]^2 dt \quad (9)$$

и  $E_n$  — область  $n$ -мерного евклидова пространства, определяющая возможные значения компонент вектора  $l$ .

В [1, 2] для численной реализации процедуры восстановления формы всплеска гравитационного излучения применялось дискретное преобразование Фурье (ДПФ) от наблюдаемых данных  $\bar{U}(t)$  на выходе гравитационной антенны. Используя аналогично [1, 2] ДПФ, получаем, что второй этап процедуры восстановления по МНК (8), (9) (оценивание параметров всплеска) эквивалентен минимизации по  $l$  функционала

$$L_{\Delta\omega}(l) = \sum_{i=1}^N |\bar{U}(\omega_i) - K_s(\omega_i) f(\omega_i, l)|^2, \quad (10)$$

где  $\bar{U}(\omega_i)$ ,  $K_s(\omega_i)$  и  $f(\omega_i, l)$  — ДПФ от реализации наблюдаемых данных  $\bar{U}(t)$  (1), импульсной переходной характеристики антенны  $K_s(t)$  (4) и всплеска гравитационного излучения  $f(t, l)$  соответственно;  $i=1, N$ ,  $N$  — число отсчетов ДПФ.

Для определения характеристик оценки  $\tilde{l}$  по МНК (8) член функционала (9), зависящий от оцениваемого параметра  $l$ , представим в виде

$$M_{\Delta}(l) = S_{\Delta}(l) + N_{\Delta}(l), \quad (11)$$

где

$$S_{\Delta}(l) = \frac{2}{N_0} \int_{t'}^T s(t, l_0) s(t, l) dt - \frac{1}{N_0} \int_{t'}^T s^2(t, l) dt \quad (12)$$

— сигнальная составляющая и

$$N_{\Delta}(l) = \frac{2}{N_0} \int_{t'}^T (\xi(t) + E_{fl}(t)) s(t, l) dt \quad (13)$$

— шумовая составляющая, которая является реализацией гауссовского случайного процесса. При этом с учетом (8) и (11) оценка  $\tilde{l}$  будет определяться как

$$\tilde{l} = \arg \sup_{l \in E_n} M_{\Delta}(l).$$

Используя методику [3, 8] и ограничиваясь первым приближением, получаем, что оценка  $\tilde{l}$  несмещенная и обладает корреляционной матрицей

$$K_{\Delta} = \|M[(l_i - l_{0i})(l_k - l_{0k})]\| = \Psi^{-1} N \Psi^{-1}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi &= \left\| - \left[ \frac{\partial^2 S_{\Delta}(l)}{\partial l_i \partial l_k} \right]_{l_0} \right\|; \quad N = \left\| \left[ \frac{\partial^2 S_N(l_1, l_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2k}} \right]_{l_0} \right\|; \\ S_N(l_1, l_2) &= M[N_{\Delta}(l_1) N_{\Delta}(l_2)] \simeq \frac{2}{N_0} \int_{t'}^T s(t, l_1) s(t, l_2) dt + \\ &+ \frac{4}{N_0^2} \iint_{t'}^T K_{\xi}(t_1, t_2) s(t_1, l_1) s(t_2, l_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (15)$$

— корреляционная функция шумовой составляющей (13),  $i, k = \overline{1, n}$ .

Отношение сигнал/шум по мощности на выходе устройства, реализующего оценку по МНК, может быть записано в виде

$$\rho^2 = S_{\Delta}^2(I_0) / M [N_{\Delta}^2(I_0)] = S_{\Delta}^2(I_0) / S_N(I_0, I_0). \quad (16)$$

Иногда более удобным для практических расчетов оказывается спектральное представление (14) и (16), при этом

$$\Psi = \left\| \frac{1}{\pi N_0} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |K_s(\omega)|^2 \frac{\partial f(\omega, l)}{\partial l_i} \frac{\partial f^*(\omega, l)}{\partial l_k} d\omega \right] \right\|_{l_0};$$

$$N = \left\| \frac{1}{\pi N_0} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |K_s(\omega)|^2 (1 + |K_N(\omega)|^2) \frac{\partial f(\omega, l)}{\partial l_i} \frac{\partial f^*(\omega, l)}{\partial l_k} d\omega \right] \right\|_{l_0},$$

где  $K_N(\omega)$  — преобразование Фурье от (5) и знак (\*) означает комплексное сопряжение.

Таким образом, формулы (14) и (16) позволяют определить эффективность второго этапа процедуры восстановления гравитационного импульса по МНК, предложенной в [1, 2], для широкого класса возможных форм всплесков гравитационного излучения.

### 3. Оценка по методу максимального правдоподобия

Предположим теперь, что на втором этапе процедуры восстановления формы всплеска гравитационного излучения используется оценивание параметров аппроксимирующей функции по ММП. В этом случае оценка  $\hat{l}$  может быть представлена в виде [3, 4]

$$\hat{l} = \arg \inf_{l \in E_n} L(l), \quad (17)$$

где

$$L(l) = \int_{t'}^T (\bar{U}(t) - s(t, l))^2 dt - \int_{t'}^T (2\bar{U}(t) - s(t, l)) u(t, l) dt. \quad (18)$$

В (18) функция  $u(t, l)$  находится из решения интегрального уравнения

$$u(t, l) + \frac{2}{N_0} \int_{t'}^T K_s(t-\tau) u(\tau, l) d\tau = -\frac{2}{N_0} \int_{t'}^T K_s(t-\tau) s(\tau, l) d\tau. \quad (19)$$

Учитывая, что корреляционной функции (7) соответствует дробно-рациональная спектральная плотность, для решения уравнения (19) используем метод, предложенный в [4]. В этом случае решение интегрального уравнения (19) сводится к решению дифференциального уравнения

$$-\frac{d^4}{dt^4} u(t, l) + 2\omega_0^2 \frac{d^2}{dt^2} u(t, l) + (q^4 + \omega_0^4) u(t, l) = -q^4 s(t, l)$$

с начальными условиями

$$u(t', 1) = u(T, 1) = 0; \quad \frac{d^i}{dt^i} u(t', 1) = \frac{d^i}{dt^i} u(T, 1) = 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Если при обработке наблюдаемых данных на выходе антенны используется ДПФ, то оценка (17) эквивалентна минимизации по 1 функционала

$$L_0(1) = \sum_{i=1}^N \frac{|\bar{U}(\omega_i) - K_s(\omega_i)f(\omega_i, 1)|^2}{1 + |K_N(\omega_i)|^2}. \quad (20)$$

Следовательно, отличие алгоритма оценки по ММП от оценки по МНК состоит лишь в том, что необходимо минимизировать функционал (20), несколько более сложный, чем (10).

Для определения характеристик оценки  $\hat{1}$  (17) представим член функционала (18), зависящий от оцениваемого параметра 1, в виде [3, 8]

$$M(1) = S(1) + N(1). \quad (21)$$

Здесь

$$S(1) = S(l_0, 1) - S(1, 1)/2 \quad (22)$$

— сигнальная составляющая;

$$S(l_1, l_2) = \int_{t'}^T s(t, l_1) v(t, l_2) dt$$

— сигнальная функция;

$$N(1) = \int_{t'}^T (\xi(t) + E_{fl}(t)) v(t, 1) dt \quad (23)$$

— шумовая составляющая и  $v(t, 1) = 2(s(t, 1) + u(t, 1))/N_0$ . Отношение сигнал/шум для принятого сигнала на выходе устройства, формирующего (21), определяется как

$$z^2 = S^2(l_0)/M[N^2(l_0)] = S(l_0, l_0)/4. \quad (24)$$

Шумовая составляющая (23) является реализацией гауссовского случайного процесса с нулевым средним значением и корреляционной функцией  $M[N(l_1)N(l_2)] = S(l_1, l_2)$  [3]. Исходя из (17) и (18), для функционала (21) оценка  $\hat{1}$  по ММП может быть представлена в виде, эквивалентном (17),

$$\hat{1} = \arg \sup_{1 \in E_n} M(1).$$

Тогда, используя результаты [3], в первом приближении имеем, что оценка  $\hat{1}$  условно несмещенная и обладает корреляционной матрицей

$$K = \|M[(\hat{l}_i - l_{0i})(\hat{l}_k - l_{0k})]\| = \left\| \left[ \frac{\partial^2 S(l_1, l_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2k}} \right]_{l_0} \right\|^{-1} = \left\| \frac{1}{\pi N_0} \times \right. \\ \left. \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|K_s(\omega)|^2}{1 + |K_N(\omega)|^2} \frac{\partial f(\omega, 1)}{\partial l_i} \frac{\partial f^*(\omega, 1)}{\partial l_k} d\omega \right]_{l_0} \right\|^{-1}, \quad k, i = \overline{1, n}. \quad (25)$$



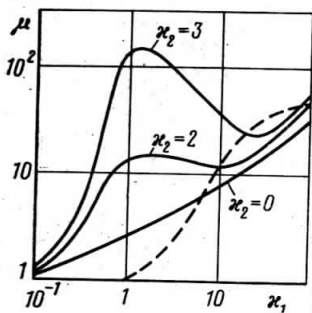


Рис. 1

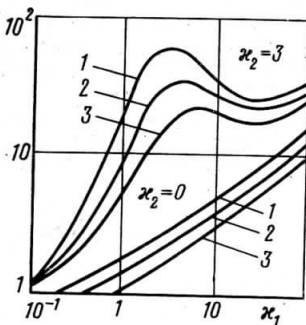


Рис. 2

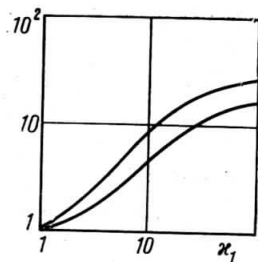


Рис. 3

Формулы для расчета точности оценок параметров всплеска гравитационного излучения (14) и (25) являются приближенными. Они получены на основе параболической аппроксимации соответствующих функционалов в окрестности истинных значений оцениваемых параметров [3]. Поэтому точность указанных формул возрастает с увеличением точности оценивания и уменьшением размеров области  $E_n$  возможных значений неизвестных параметров. Имеющиеся экспериментальные и расчетные данные [3, 8] показывают, что при малых размерах области  $E_n$  точность приближенных формул (14) и (25) оказывается удовлетворительной для умеренных значений выходных отношений сигнал/шум (16) и (24).

#### 4. Сравнительный анализ эффективности алгоритмов оценки

Конкретизируем полученные общие выражения, определяющие точность оценивания параметров гравитационного всплеска, применительно к двум характерным формам внешней силы, эквивалентной возбуждению антенны гравитационной волной.

а) Радиопулс с гладкой колокольной огибающей. В этом случае сигнал, описывающий воздействие на антенну всплеска гравитационного излучения, определяется формулой [1]

$$f(t, I_0) = a_0 \exp(-(t-t_0)^2/\beta_0^2) \cos \Omega_0(t-t_0), \quad (26)$$

где  $I_0 = \{a_0, \beta_0, \Omega_0\}$  — вектор параметров, подлежащих оценке, а временное положение импульса (26)  $t_0 \in [t', T]$ .

Для расчета характеристик оценки амплитуды  $a$ , длительности  $\beta$  и частоты  $\Omega$  сигнала (26) по МНК нужно найти функции (12) и (15). Используя (26) для этих функций, получим выражения

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(a, \beta, \Omega) \simeq & \frac{\sqrt{\pi} A^2 (b')^2}{8 N_0 (a' \omega_0)^2} \left\{ a_0 a \frac{\beta_0 \beta a'}{[(\beta_0^2 + \beta^2) (4 + (a')^2 (\beta_0^2 + \beta^2))]^{1/2}} \times \right. \\ & \times \exp \left[ -\frac{(\Omega - \Omega_0)^2 \beta_0^2 \beta^2}{4 (\beta_0^2 + \beta^2)} \right] \exp \left[ -\frac{(\omega_0 - \Omega_{\Delta})^2}{2 D_0(\beta)} \right] - \\ & \left. - \frac{a^2 a' \beta}{2 (2 + (a')^2 \beta^2)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(\omega_0 - \Omega)^2}{2 D_0(\beta)} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (27)$$



$$S_N(a_1, \beta_1, \Omega_1, a_2, \beta_2, \Omega_2) \simeq \frac{A^2 \sqrt{\pi}}{16 N_0} \left( \frac{q}{\omega_0 a'} \right)^4 a_1 a_2 \beta_1 \beta_2 \frac{a'}{[8 + (a')^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2)]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{(\omega_0 - \Omega_N)^2}{2 D_1(\beta_1, \beta_2)} \right] \exp \left[ -\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2 \beta_1^2 \beta_2^2}{4 (\beta_1^2 + \beta_2^2)} \right]. \quad (28)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Omega_\Delta = \frac{\Omega_0 \beta^2 + \Omega \beta_0^2}{\beta_0^2 + \beta^2}; \quad D_0(\beta) = \frac{4 + (a')^2 (\beta_0^2 + \beta^2)}{2 (\beta_0^2 + \beta^2)}; \\ D_1(\beta_1, \beta_2) = \frac{8 + (a')^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2)}{4 (\beta_1^2 + \beta_2^2)}; \quad \Omega_N = \frac{\Omega_1 \beta_2^2 + \Omega_2 \beta_1^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}.$$

Подставляя затем (27) и (28) в (14) и (16), находим дисперсии оценок параметров сигнала (26) и выходное отношение сигнал/шум  $\rho^2$  при оценивании по МНК.

Для расчета характеристик оценок по ММП достаточно найти функцию (22) применительно к всплеску (26)

$$S(a_1, \beta_1, \Omega_1, a_2, \beta_2, \Omega_2) \simeq \frac{a_1 a_2}{q^4} \frac{A^2 (b')^2 \sqrt{\pi}}{N_0} \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{1/2}} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2 \beta_1^2 \beta_2^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} \right] \left[ 1 - 4 \frac{\omega_0^2}{q^4} \left( \frac{2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} + (\omega_0 - \Omega_N)^2 \right) \right]. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (24) и (25), получаем дисперсии оценок параметров сигнала (26) и выходное отношение сигнал/шум  $z^2$  при оценивании по ММП.

На рис. 1 сплошными кривыми представлен выигрыш  $\mu = z^2 / \rho^2$  в величине выходного отношения сигнал/шум при использовании оценивания по ММП вместо оценивания по МНК. Сплошные кривые рис. 1 показывают зависимость  $\mu = \mu(\kappa_1)$  при различных значениях параметра  $\kappa_2$ , где  $\kappa_1 = \Delta \omega_s / \Delta \omega_a$  и  $\kappa_2 = \Delta \omega / \Delta \omega_a$ ,  $\Delta \omega_s = \sqrt{2} \pi / \beta_0$  — ширина полосы частот сигнала (26),  $\Delta \omega_a = a' \sqrt{\pi} / 2$  — ширина полосы пропускания антенны,  $\Delta \omega = |\omega_0 - \Omega_0|$  — расстройка несущей частоты сигнала (26) относительно центральной частоты полосы пропускания гравитационной антенны. Из анализа кривых рис. 1 следует, что применение оценивания по ММП вместо оценивания по МНК может привести к существенному увеличению выходного отношения сигнал/шум.

На рис. 2 представлен выигрыш в точности оценки параметров всплеска гравитационного излучения (26), который определяется как отношение дисперсии оценки при использовании МНК к дисперсии оценки по ММП. Кривые 1 показывают выигрыш в точности оценки амплитуды  $a$ , кривые 2 — выигрыш в точности оценки длительности  $\beta$ , а кривые 3 — в точности оценки несущей частоты  $\Omega$ . Как следует из рис. 2, выигрыш в точности оценки параметров всплеска (26) при оценке по ММП по сравнению с оценкой по МНК, рассмотренной в [1, 2], может быть значительным.

б) Видеоимпульс. Рассмотрим теперь модель сигнала, эквивалентного воздействию гравитационной волны, в виде короткого видеоимпульса [1]

$$f(t, \mathbf{l}_0) = \begin{cases} a_0 \exp(-(t-t_0)/\beta_0) \sin(2\pi(t-t_0)/\beta_0), & t \geq t_0; \\ 0, & t < t_0, \end{cases} \quad (30)$$

где  $\mathbf{l}_0 = \{a_0, \beta_0\}$  — вектор, компонентами которого являются истинные значения оцениваемых параметров — амплитуды  $a_0$  и длительности  $\beta_0$ .

Применительно к (30) функции (12) и (15) принимают соответственно вид

$$S_\Delta(a, \beta) \simeq \frac{a_0 a \beta_0 \beta A^2}{2N_0 a'} [Q_1(\beta_0, a') Q_1(\beta, a') + Q_2(\beta_0, a') Q_2(\beta, a')] - \\ - \frac{a^2 \beta^2 A^2}{4N_0 a'} [Q_1^2(\beta, a') + Q_2^2(\beta, a')]; \quad (31)$$

$$S_N(a_1, \beta_1, a_2, \beta_2) \simeq \frac{A^2}{8N_0} \left( \frac{q}{2a' \omega_0} \right)^4 a_1 a_2 \beta_1 \beta_2 \left[ Q_1\left(\beta_1, \frac{a'}{\sqrt{2}}\right) Q_1\left(\beta_2, \frac{a'}{\sqrt{2}}\right) + \right. \\ \left. + Q_2\left(\beta_1, \frac{a'}{\sqrt{2}}\right) Q_2\left(\beta_2, \frac{a'}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad (32)$$

где обозначено

$$Q_1(\beta, a') = \frac{2\pi(1-4\pi^2) - 4\pi(a'\beta)^2 - 2\pi(\omega_0\beta)^2 + 4\pi\beta\beta'(a'\beta-1)}{1+16\pi^2(a'\beta-1)^2 - (\omega_0\beta)^2 - 4\pi^2}; \\ Q_2(\beta, a') = \frac{8\pi(a'\beta-1) - (1-4\pi^2)\beta'\beta + 2a'\beta'\beta^2 + \beta^3\beta'\omega_0^2}{1+16\pi^2(a'\beta-1)^2 - (\omega_0\beta)^2 - 4\pi^2},$$

Подставляя (31) и (32) в (14) и (16), находим дисперсии оценок параметров сигнала (30) и выходное отношение сигнал/шум  $\rho^2$  при оценивании по МНК.

Для расчета точности оценок по ММП, используя (30), функцию (22) можем записать

$$S(a_1, \beta_1, a_2, \beta_2) \simeq \frac{2A^2(b')^2}{q^4} \frac{a_1 a_2}{N_0} \left[ \frac{(\beta_1 + \beta_2) \beta_1 \beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + 4\pi^2(\beta_1 - \beta_2)^2} - \right. \\ \left. - \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)(1+4\pi^2)} \right] \left[ 1 - \frac{(a'\beta_1)^2 + (a'\beta_2)^2 - 1}{q^4 \beta_1^2 \beta_2^2} \right]. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (24) и (25), получаем дисперсии оценок параметров сигнала (30) и выходное отношение сигнал/шум  $z^2$  при оценивании по ММП.

На рис. 1 штриховой линией представлена зависимость выигрыша в величине выходного отношения сигнал/шум при использовании для обработки всплеска (30) ММП вместо МНК, от параметра  $\kappa_1 = \Delta\omega_s/\Delta\omega_a$ , где для сигнала (30)  $\Delta\omega_s = \sqrt{\pi/2}/\beta_0$ . На рис. 3 представлен выигрыш в точности оценки параметров всплеска гравитационного излучения (30). Кривая 1 показывает выигрыш в точности оценки амплитуды  $a$ , кривая 2 — выигрыш в точности оценки длительности  $\beta$ . Согласно рис. 3, выигрыш в точности оценки параметров всплеска (30) при оценивании по ММП по сравнению с оценкой по МНК может быть значительным.

Как следует из кривых рис. 1—3, для обоих характерных моделей сигнала, эквивалентного воздействию гравитационной волны на веберовскую антенну, применение ММП вместо МНК позволяет в общем случае повысить эффективность второго этапа процедуры восстановления, предложенной в [1, 2].

Выигрыш в эффективности обработки растет по мере уменьшения длительности двух видов рассмотренных сигналов и по мере увеличения расстройки несущей частоты радиосигнала (26) относительно центральной частоты полосы пропускания гравитационной антенны.

Повышение эффективности обработки по ММП в этих условиях объясняется наличием весового множителя  $(1 + |K_N(\omega)|^2)^{-1}$  в минимизируемом функционале (20). Действительно, этот весовой множитель обеспечивает, в отличие от МНК, когда минимизируется (10), подавление спектра реализации смеси сигнала и шума в полосе частот, где мощность коррелированной компоненты шума (3) велика. Лишь когда полоса частот сигнала меньше полосы пропускания гравитационной антенны (и, следовательно, полосы частот коррелированной компоненты шума  $\xi(t)$  (3)) и расстройка по частоте отсутствует, т. е.  $\kappa_2 = 0$ ,  $\kappa_1 \ll 1$ , эффективности обработки по ММП и МНК практически одинаковы. Отметим, что снижение эффективности обработки по МНК с уменьшением длительности всплеска гравитационного излучения подтверждается результатами исследования процедуры восстановления в [4].

## 5. Заключение

Полученные общие выражения для характеристик оценок параметров гравитационных импульсных сигналов по МНК и ММП показывают возможность повышения эффективности второго этапа адаптивной процедуры восстановления, предложенной в [1, 2]. При этом реализация алгоритма оценки по ММП не требует дополнительной априорной информации по сравнению с алгоритмом оценки по МНК. Более того, применение ММП позволяет несколько ослабить требования к точности попадания всплеска гравитационного излучения в полосу пропускания антенны по сравнению с МНК. Тем самым расширяется класс импульсных сигналов, которые могут быть восстановлены без изменения конструкции и параметров гравитационной антенны. Однако, как и в [4], при анализе оценок предполагалась временная локализация гравитационного всплеска и достаточная гладкость его формы. Дальнейшие исследования должны ослабить эти существенные ограничения в первую очередь снять требования временной локализации, т. е. априорного знания момента появления гравитационного всплеска.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабиченко С. И., Руденко В. Н., Ягола А. Г. // Астрон. журн. 1984. Т. 61. С. 913.
2. Бабиченко С. И., Руденко В. Н., Ягола А. Г. // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1983. Т. 24. С. 14.
3. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
4. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. М.: Сов. радио, 1972.
5. Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Измерение слабых сил в физическом эксперименте. М.: Наука, 1974.
6. Бичак И., Руденко В. Н. Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. М.: Изд-во МГУ, 1987.
7. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
8. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.

Воронежский госуниверситет

Поступила в редакцию  
21.VI.1989