(124) (124)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том 36

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА · 1991

ционарного сигнала исследована в [6], где, в частности, показано, что относительные асимптотические потери в его эффективности по сравнению с оптимальным по критерию Неймана–Пирсона при $N \geqslant 1$ РП $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant C_2$ обнаружения стационарного сигнала на фоне помехи с известной интенсивностью составляют $\sqrt{1+m^{-1}}$, т.е. быстро убывают с ростом числа обучающих выборок.

При равновероятном $(p_j = m^{-1})$ положении слабого сигнала и $\lambda = 1$ многоальтернативное РП (2) переходит в НМ подобное РП $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \Lambda_j(\vec{x}) \geqslant C_3$ обнаружения сигнала с априори неизвестным положением, мощность которого при малом уровне ложных тревог практически совпадает, как показано в [11], с мощностью НМ подобного РП $\Lambda_r(\vec{x}) \geqslant C_1$ обнаружения сигнала с априори известным положением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Репин В.Г., Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977.
2. *Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др.* Теория обнаружения сигналов / Под ред. Бакута П.А. М.: Радио и связь, 1984.
3. *Акимов П.С., Евстратов Ф.Ф., Захаров С.И. и др.* Обнаружение радиосигналов / Под ред. Колосова А.А. М.: Радио и связь, 1989.
4. *Корадо В.А.* // РЭ. 1972. Т. 17. № 3. С. 618.
5. *Башин Г.М., Дмитриенко А.Н.* // РЭ. 1982. Т. 27. № 10. С. 1982.
6. *Башин Г.М.* // РЭ. 1990. Т. 35. № 12. С. 2000.
7. *Зинчук В.М., Щукин Н.Л.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1984. Т. 27. № 4. С. 96.
8. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.
9. *Гаек Я., Шидак З.* Теория ранговых критериев. М.: Наука, 1971.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1962.
11. *Петропавловский А.Г.* // РЭ. 1986. Т. 31. № 9. С. 1848.

Поступила в редакцию
11.04.89

УДК 621.391.01

А.П. Трифонов, В.К. Бутейко

ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА ПРИ ЧАСТИЧНОМ НАРУШЕНИИ УСЛОВИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ

Получены асимптотически точные формулы для характеристик совместных оценок максимального правдоподобия нескольких параметров, причем для одного из них условие регулярности не выполняется. В качестве примера рассмотрены оценки времени прихода, частоты и начальной фазы ряда сложных дискретных сигналов.

ВВЕДЕНИЕ

При анализе точности оценки максимального правдоподобия (ОМП) одними из главных являются условия регулярности [1, 2]. Эти условия реализуются, если существуют вторые производные сигнальной функции (функции неопределенности [3]), непрерывные в точке ее максимума. Тогда применение метода малого параметра позволяет найти асимптотически (с ростом отношения сигнал/шум) точные выражения для характеристик совместных ОМП нескольких параметров сигнала [1]. Однако известен обширный класс сигналов, называемых разрывными [2] или неаналитическими [4], для которых условия регулярности не выполняются. Если разрывный сигнал содержит один неизвестный параметр, то асимптотически точные выражения для характеристик ОМП этого параметра можно получить, используя метод локально-марковской аппроксимации [2]. Трудности в определении характеристик ОМП возникают, если полезный сигнал содержит несколько неизвестных параметров и хотя бы для одного из них условия регулярности нарушены. В этом случае непосредственно метод малого параметра [1] или метод локально-марковской аппроксимации [2] не применим. Асимптотически точные значения характеристик совместных ОМП, когда для одного из неизвестных параметров условия регулярности не выполняются, найдены пока лишь для некоторых частных случаев [5, 6], которые не полностью охватывают класс практически используемых сигналов с нарушением условий регулярности. В этом классе следует отметить дискретные сложные сигналы [3, 4, 7, 8], зависимость которых от задержки является, как правило, разрывной. Хотя дискретные сложные сигналы широко применяются, до сих пор отсутствуют асимптотически точные методы расчета характеристик совместных ОМП их параметров при неизвестной задержке.

Ниже получены асимптотически (с ростом отношения сигнал/шум) точные выражения для характеристик совместных ОМП нескольких параметров, для одного из которых условия регулярности не выполняются.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть на входе приемника максимального правдоподобия (ПМП) наблюдается реализация

$$x(t) = s(t, \lambda_0\ \vec{\vartheta}_0) + n(t), \quad t \in [0; T] \tag{1}$$

суммы полезного сигнала $s(t, \lambda, \vec{\vartheta})$ и гауссовского центрированного шума $n(t)$ с корреляционной функцией $B(t_1, t_2)$. Полезный сигнал зависит от неизвестных параметров λ и ϑ_i, $i = \overline{1, \mu}$, общее число которых $\mu + 1$. Как известно [1, 2], ПМП формирует логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП)

$$L(\lambda, \vec{\vartheta}) = \int_0^T x(t)\, v(t, \lambda, \vec{\vartheta})\, dt - \int_0^T s(t, \lambda, \vec{\vartheta})\, v(t, \lambda, \vec{\vartheta})\, dt/2 \tag{2}$$

для всех возможных значений λ и $\vec{\vartheta}$. Здесь $v(t, \lambda, \vec{\vartheta})$ – решение уравнения [1]

$$\int_0^T B(t, \tau)\, v(\tau, \lambda, \vec{\vartheta})\, d\tau = s(t, \lambda, \overline{\vartheta}).$$

По определению ОМП $\hat{\lambda}$, $\hat{\vec{\vartheta}}$ всех неизвестных параметров представляют собой координаты абсолютного (наибольшего) максимума случайного поля (2), т.е.

$$(\hat{\lambda}, \hat{\vec{\vartheta}}) = \arg\sup L(\lambda, \vec{\vartheta}). \tag{3}$$

Введем в рассмотрение нормированный логарифм ФОП

$$l(\lambda, \vec{\vartheta}) = L(\lambda, \vec{\vartheta})/z^2, \tag{4}$$

где

$$z^2 = \int_0^T s(t, \lambda_0, \vec{\vartheta}_0)\, v(t, \lambda_0, \vec{\vartheta}_0)\, dt \tag{5}$$

– отношение сигнал/шум для принятого сигнала [1]. Подставляя в (4) реализацию наблюдаемых данных (1), получаем

(6) $$l(\lambda, \vec{\vartheta}) = S(\lambda, \vec{\vartheta}) + \epsilon N(\lambda, \vec{\vartheta}),$$

(7) $$N(\lambda, \vec{\vartheta}) = \int_0^T n(t)\, v(t, \lambda, \vec{\vartheta})\, dt\, z^{-1}$$

– нормированная шумовая функция,

(8) $$S(\lambda, \vec{\vartheta}) = S(\lambda_0, \vec{\vartheta}_0, \lambda, \vec{\vartheta}) - S(\lambda, \vec{\vartheta}, \lambda, \vec{\vartheta})/2$$

– нормированная сигнальная составляющая на выходе ПМП,

(9) $$S(\lambda_1, \vec{\vartheta}_1, \lambda_2, \vec{\vartheta}_2) = \int_0^T s(t, \lambda_1, \vec{\vartheta}_1)\, v(t, \lambda_2, \vec{\vartheta}_2)\, dt/z^{-2}$$

– нормированная сигнальная функция, которая совпадает с корреляционной функцией шумовой функции (7) [1], $\epsilon = z^{-1}$ – малый параметр при $z \gg 1$.

Пусть для параметра λ обычные условия регулярности [1, 2] не выполняются, так что функции (8), (9) не являются непрерывно дифференцируемыми по λ в точке λ_0. Полагаем, что при $|\lambda - \lambda_0| \to 0$ функция (8) допускает представление

(10) $$S(\lambda, \vec{\vartheta}_0) \equiv S(\lambda) = 1/2 - \delta\,|\lambda - \lambda_0| + o(|\lambda - \lambda_0|).$$

с. 36

Далее, следуя [2], параметр λ будем называть разрывным. При этом

(11) $$\delta = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \{[S(\lambda_0) - S(\lambda_0 + \Delta\lambda)]/\Delta\lambda\} > 0.$$

Для μ неизвестных параметров $\vec{\vartheta}$ потребуем выполнения условий регулярности, так что при всех λ и $\max\{|\vartheta_i - \vartheta_{0i}|,\ i = \overline{1,\mu}\} \to 0$ функция (8) допускает представление

$$S(\lambda, \vec{\vartheta}) = S(\lambda) + \sum_{i=1}^{\mu} S_i'(\lambda)(\vartheta_i - \vartheta_{0i}) +$$

$$+ 1/2 \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} S_{ij}''(\lambda)(\vartheta_i - \vartheta_{0i})(\vartheta_j - \vartheta_{0j}) + o[(\vartheta_i - \vartheta_{0i})(\vartheta_j - \vartheta_{0j})],$$

$$S_i'(\lambda) = \partial S(\lambda, \vec{\vartheta})/\partial\vartheta_i, \quad S_{ij}''(\lambda) = \partial^2 S(\lambda, \vec{\vartheta})/\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j$$

при $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_0$. Далее, следуя [2], параметры $\vec{\vartheta}$ будем называть регулярными. Ограничимся рассмотрением класса сигналов, для которых при $|\lambda - \lambda_0| \to 0$

(12) $$S_i'(\lambda) = o(|\lambda - \lambda_0|^{\alpha}), \quad S_{ij}''(\lambda) = -S_{ij} + o[|\lambda - \lambda_0|^{\beta}],$$

где $\alpha > 1/2, \beta > 1/2$ и $S_{ij} = -S_{ij}''(\lambda_0) = [\partial^2 S(\lambda_0, \vec{\vartheta}_1, \lambda_0, \vec{\vartheta}_2)/\partial\vartheta_{1i}\partial\vartheta_{2j}]_{\vec{\vartheta}_0}$, $i, j = \overline{1, \mu}$.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОМП РАЗРЫВНОГО ПАРАМЕТРА

Перепишем ОМП (3) разрывного параметра λ в виде

(13) $$\hat{\lambda} = \arg\sup l(\lambda),$$

(14) $$l(\lambda) = \sup_{\vec{\vartheta}} l(\lambda, \vec{\vartheta}).$$

Пусть совместные ОМП (3) имеют высокую апостериорную точность, что возможно при достаточно больших отношениях сигнал/шум (5). Тогда для определения характеристик ОМП достаточно исследовать поведение логарифма ФОП (4) в малой окрестности истинных значений λ_0, $\vec{\vartheta}_0$ неизвестных параметров, где логарифм ФОП (6) имеет единственный максимум. Для нахождения (14) в условиях высокой апостериорной точности аппроксимируем (6) отрезком μ-мерного разложения Тейлора в окрестности $\vec{\vartheta}_0$ при фиксированном λ:

$$(15)\qquad l(\lambda,\vec{\vartheta}) = S(\lambda) + \epsilon N(\lambda,\vec{\vartheta}_0) + \sum_{i=1}^{\mu} [S_i'(\lambda) + \epsilon N_i'(\lambda)](\vartheta_i - \vartheta_{0i}) + $$
$$+ \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} [S_{ij}''(\lambda) + \epsilon N_{ij}''(\lambda)](\vartheta_i - \vartheta_{0i})(\vartheta_j - \vartheta_{0j})/2 + \ldots$$

Ограничимся выписанными явно членами ряда, где

$$(16)\qquad N_i'(\lambda) = [\partial N(\lambda,\vec{\vartheta})/\partial\vartheta_i]_{\vec{\vartheta}_0},\ N_{ij}''(\lambda) = [\partial^2 N(\lambda,\vec{\vartheta})/\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j]_{\vec{\vartheta}_0},\quad i,j=\overline{1,\mu}.$$

Очевидно, что (15) достигает максимума при $\lambda = \text{const}$, когда $\vec{\vartheta} = \vec{\tilde{\vartheta}}$, где $\vec{\tilde{\vartheta}}$ определяется из системы уравнений

$$(17)\qquad [\partial l(\lambda,\vec{\vartheta})/\partial\vartheta_i]_{\vec{\tilde{\vartheta}}} = 0,\quad i=\overline{1,\mu}.$$

Подставляя (15) в (17), приходим к следующей системе уравнений:

$$(18)\qquad -\sum_{j=1}^{\mu} [S_{ij}''(\lambda) + \epsilon N_{ij}''(\lambda)](\tilde{\vartheta}_j - \vartheta_{0j}) = S_i'(\lambda) + \epsilon N_i'(\lambda),\quad i=\overline{1,\mu}.$$

Полагая здесь $\epsilon = 0$, получаем решение в виде $\tilde{\vartheta}_i = \vartheta_{0i} + \sum_{j=1}^{\mu} S_j'(\lambda)A_{ij}(\lambda)/B(\lambda) = \vartheta_i^*$, где $B(\lambda)$ – определитель порядка μ с элементами $[-S_{ij}''(\lambda)]$, а $A_{ij}(\lambda)$ – его алгебраические дополнения. Для рассматриваемого случая высокой апостериорной точности оценки величина ϵ мала, так что решение системы (18) можно искать в виде ряда по степеням ϵ [1]:

$$(19)\qquad \tilde{\vartheta}_i = \vartheta_i^* + \epsilon\tilde{\vartheta}_{1i} + \epsilon^2\tilde{\vartheta}_{2i} + \ldots$$

Подставляя (19) в (18) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ, ограничиваясь первым приближением, находим

$$(20)\qquad \tilde{\vartheta}_i = \vartheta_{0i} + \sum_{j=1}^{\mu} [S_j'(\lambda) + \epsilon N_j'(\lambda)]\,A_{ij}(\lambda)/B(\lambda).$$

Подстановка (20) в (15) приводит к приближенному выражению для (14):

$$(21)\qquad l(\lambda) \simeq S(\lambda) + \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} S_i'(\lambda)S_j'(\lambda)A_{ij}(\lambda)/2B(\lambda) +$$
$$+\ \epsilon\,\{N(\lambda,\vec{\vartheta}_0) + \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} N_j'(\lambda)S_j'(\lambda)A_{ij}(\lambda)/B(\lambda) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{n=1}^{\mu} N_{ij}''(\lambda)S_i'(\lambda)S_j'(\lambda)A_{ik}(\lambda)\times$$
$$\times\ A_{nj}(\lambda)/2B^2(\lambda)\} = \tilde{S}(\lambda) + \epsilon\tilde{N}(\lambda),$$

где отброшены члены порядка малости ϵ^2 и менее.

Используя (10), (12), получаем, что при $|\lambda - \lambda_0| \to 0$ сигнальная составляющая

$$(22)\qquad \tilde{S}(\lambda) = ½ - \delta\,|\lambda - \lambda_0| + o(|\lambda - \lambda_0|).$$

Шумовая функция $\widetilde{N}(\lambda)$ в (21) является центрированным гауссовским случайным процессом. Полагая $\Delta = \max \{|\lambda_i - \Lambda|, |\lambda_i - \lambda_j|\} \to 0$ $(i, j = 0;\ 1;\ 2)$, для функции корреляции ее приращений согласно (10), (17) имеем

$$(23)\qquad \widetilde{K}_\Delta(\lambda_1, \lambda_2) = \langle [\widetilde{N}(\lambda_1) - \widetilde{N}(\Lambda)]\, [\widetilde{N}(\lambda_2) - \widetilde{N}(\Lambda)] \rangle = \\ = 2\delta \min(|\lambda_1 - \Lambda|, |\lambda_2 - \Lambda|) + o(\Delta)$$

при $(\lambda_1 - \Lambda)(\lambda_2 - \Lambda) > 0$ и $\widetilde{K}_\Delta(\lambda_1, \lambda_2) = o(\Delta)$ при $(\lambda_1 - \Lambda)(\lambda_2 - \Lambda) < 0$.

Установленные свойства сигнальной функции (22) и приращений шумовой (23) для расчета характеристик ОМП (13) разрывного параметра сигнала позволяют использовать метод локально-марковской аппроксимации [2]. В результате при $z \to \infty$ $(\epsilon \to 0)$ находим, что ОМП несмещенная с дисперсией

$$(24)\qquad D(\hat{\lambda} \mid \lambda_0, \vec{\vartheta}_0) = \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle = D(\hat{\lambda}) = 13/2z^4\delta^2.$$

Отметим, что дисперсия ОМП разрывного параметра при неизвестных значениях регулярных параметров $\vec{\vartheta}_0$ совпадает с аналогичной дисперсией при априори известных значениях $\vec{\vartheta}_0$ [2]. Таким образом, точность ОМП разрывного параметра асимптотически не зависит от наличия у сигнала неизвестных регулярных параметров.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОМП РЕГУЛЯРНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Перепишем ОМП (3) регулярных параметров $\vec{\vartheta}$ в виде

$$(25)\qquad \hat{\vec{\vartheta}} = \arg\sup l(\vec{\vartheta}),$$

где

$$(26)\qquad l(\vec{\vartheta}) = \sup_\lambda l(\lambda, \vec{\vartheta}) = l(\hat{\lambda}, \vec{\vartheta}),$$

а оценка $\hat{\lambda}$ определяется из (13) и согласно (24) при $\epsilon \to 0$ может быть представлена как

$$(27)\qquad \hat{\lambda} = \lambda_0 + \epsilon^2\chi + o(\epsilon^2).$$

Здесь χ — случайная величина, два первых момента которой не зависят от ϵ или z: $\langle \chi \rangle = 0, \langle \chi^2 \rangle = 13/2\delta^2$.

Опять полагая, что оценки имеют высокую апостериорную точность, ОМП $\hat{\vec{\vartheta}}$ регулярных параметров (25) будем искать из решения системы уравнений правдоподобия [1]

$$(28)\qquad [\partial l(\vec{\vartheta})/\partial\vartheta_i]_{\hat{\vartheta}} = 0, \quad i = \overline{1, \mu},$$

где $l(\vec{\vartheta})$ определяется из (26). Приближенное значение (26) найдем, подставляя (27) в (15). Подставляя затем полученный результат в (28), перепишем систему уравнений правдоподобия как

$$(29)\qquad \sum_{j=1}^{\mu} S''_{ij}(\lambda_0 + \epsilon^2\chi)(\hat{\vartheta}_j - \vartheta_{0j}) + S'_i(\lambda_0 + \epsilon^2\chi) + \\ + \epsilon N'_i(\lambda_0) + \epsilon\Delta_i(\epsilon) + \epsilon \sum_{j=1}^{\mu} N''_{ij}(\lambda_0 + \epsilon^2\chi)(\hat{\vartheta}_j - \vartheta_{0j}) = 0,$$

$$(30)\qquad \Delta_i(\epsilon) = N'_i(\lambda_0 + \epsilon^2\chi) - N'_i(\lambda_0), \quad i = \overline{1, \mu}.$$

При $\epsilon = 0$ решения системы уравнений правдоподобия (29) совпадают с истинными значениями регулярных параметров $(\hat{\vartheta}_i = \vartheta_{0i})$. Для рассматриваемого случая высокой апостериорной точности оценок величина ϵ мала, так что решение системы (29) можно искать в виде ряда по степеням ϵ [1]:

(31) $$\hat{\vartheta}_i = \vartheta_{0i} + \epsilon \vartheta_{1i} + \epsilon^2 \vartheta_{2i} + \ldots$$

Подставляя (31) в (29) и приравнивая коэффициенты при первой степени ϵ, приходим к системе уравнений для первого приближения ОМП регулярных параметров:

(32) $$-\sum_{j=1}^{\mu} S_{ij}''(\lambda_0 + \epsilon^2\chi)\,\vartheta_{1j} = N_i'(\lambda_0) + \Delta_i(\epsilon).$$

При $\epsilon \to 0$ коэффициенты в этой системе уравнений согласно (12) перепишем в виде

(33) $$-S_{ij}''(\lambda_0 + \epsilon^2\chi) = S_{ij} + o(\epsilon^{2\beta}).$$

Исследуем поведение слагаемого (30) в правой части уравнений системы (32), когда $\epsilon \to 0$. При фиксированном χ величина $\Delta_i(\epsilon)$ представляет собой приращение гауссовского процесса $N_i'(\lambda)$ (16), имеющего корреляционную функцию $\widetilde{K}(\lambda_1, \lambda_2) = \langle N_i'(\lambda_1)\, N_i'(\lambda_2)\rangle = [\partial^2 S(\lambda_1, \vec{\vartheta}_1, \lambda_2, \vec{\vartheta}_2)/\partial\vartheta_{1i}\partial\vartheta_{2i}]$ при $\vec{\vartheta}_1 = \vec{\vartheta}_2 = \vec{\vartheta}_0$. В свою очередь из (12) при $\epsilon \to 0$ для этой корреляционной функции получаем $\widetilde{K}(\lambda_0 + \epsilon^2\chi, \lambda_0 + \epsilon^2\chi) - 2\widetilde{K}(\lambda_0 + \epsilon^2\chi, \lambda_0) + \widetilde{K}(\lambda_0, \lambda_0) = o(\epsilon^{2\beta})$ при любых фиксированных χ. Воспользовавшись теоремой о локальных свойствах реализаций гауссовского процесса [9], можем записать $N_i'(\lambda_0 + \epsilon^2\chi) = N_i'(\lambda_0) + o(|\epsilon|^{1/2})$, откуда для (30) при $\epsilon \to 0$ непосредственно следует

(34) $$\Delta_i(\epsilon) = o(|\epsilon|^{1/2}).$$

Согласно (33), (34), с точностью до членов порядка малости $o(|\epsilon|^{1/2})$ систему уравнений (32) для первого приближения ОМП регулярных параметров запишем в виде $\sum_{j=1}^{\mu} S_{ij}\vartheta_{1j} = N_i'(\lambda_0)$, $i = \overline{1, \mu}$. Решение этой системы аналогично [1] позволяет получить элементы корреляционной матрицы ОМП регулярных параметров

(35) $$K_{ij}(\hat{\vec{\vartheta}} \mid \lambda_0, \vec{\vartheta}_0) = \langle(\hat{\vartheta}_i - \vartheta_{0i})(\hat{\vartheta}_j - \vartheta_{0j})\rangle = A_{ij}/z^2 B,$$

где B — определитель порядка μ с элементами S_{ij} (12), а A_{ij} — его алгебраические дополнения. Отметим, что корреляционная матрица ОМП регулярных параметров $\vec{\vartheta}$ при неизвестном значении разрывного параметра λ_0 совпадает с аналогичной матрицей при априори известном значении λ_0. Таким образом, точность ОМП регулярных параметров асимптотически не зависит от наличия у сигнала неизвестного разрывного параметра.

4. ДИСПЕРСИИ СОВМЕСТНЫХ ОМП НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ

Проверим выполнение условий (12) и найдем дисперсии совместных ОМП для конкретных сигналов с частичным нарушением условий регулярности. Полагаем, что сигнал наблюдается на фоне центрированного гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0, а неизвестными параметрами являются временное положение λ, несущая частота ω и начальная фаза φ.

1. *Прямоугольный радиоимпульс*

(36) $$s(t, \lambda, \omega, \varphi) = a I[(t - \lambda)/\tau] \cos[\omega t - \varphi],$$

где $I(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1/2$ и $I(x) = 0$ при $|x| > 1/2$, а a, τ — соответственно амплитуда и длительность импульса. Подставляя (36) в (9), получаем сигнальную функцию вида

$$S(\lambda_1, \omega_1, \varphi_1, \lambda_2, \omega_2, \varphi_2) = [1 - |\lambda_1 - \lambda_2|/\tau] \times \tag{37}$$
$$\times \operatorname{sin c}[(1 - |\lambda_1 - \lambda_2|/\tau)(\omega_1 - \omega_2)\tau/2] \times$$
$$\times \cos[(\omega_1 - \omega_2)(\lambda_1 + \lambda_2)/2 - \varphi_1 + \varphi_2],$$

где $\operatorname{sin c}(x) = (\sin x)/x$. Отношение сигнал/шум (5) $z^2 = a^2\tau/N_0$.

Из выражения (37) легко проверить, что сигнал (36) является разрывным по параметру λ. Причем согласно (11) $\delta = 1/\tau$, а в (12) $\alpha = \beta = 1$. В результате из (24), (36) для дисперсий ОМП получаем $D(\hat{\lambda}) = 13\tau^2/2z^4$, $D(\hat{\omega}) = 12/\tau^2 z^2$, $D(\hat{\varphi}) = 1/z^2$, $K_{\omega\varphi} = K_{\varphi\omega} = 0$.

2. *Полосовой радиоимпульс*

$$s(t, \lambda, \omega, \varphi) = a \operatorname{sin c}[\Omega(t - \lambda)/2] \cos(\omega t - \varphi). \tag{38}$$

Здесь Ω — ширина прямоугольного спектра сигнала (38). Согласно (5) и (9), отношение сигнал/шум $z^2 = a^2/\Omega N_0$, а сигнальная функция

$$S(\lambda_1, \omega_1, \varphi_1, \lambda_2, \omega_2, \varphi_2) = [1 - |\omega_1 - \omega_2|/\Omega] \times \tag{39}$$
$$\times \operatorname{sin c}\{[1 - |\omega_1 - \omega_2|/\Omega](\lambda_1 - \lambda_2)\Omega/2\} \times$$
$$\times \cos[(\omega_1 - \omega_2)(\lambda_1 + \lambda_2)/2 - \varphi_1 + \varphi_2].$$

Из формулы (39) следует, что у сигнала (38) разрывным параметром является частота ω, в то время как временное положение и начальная фаза являются регулярными параметрами. Причем согласно (11) $\delta = \Omega^{-1}$, а в (12) $\alpha = \beta = 1$.

Дисперсии ОМП (24), (36) определяются соотношениями

$$D(\hat{\omega}) = 13\Omega^2/2z^4, \quad D(\hat{\lambda}) = 12/\Omega^2 z^2,$$
$$D(\hat{\varphi}) = 1/z^2, \quad K_{\lambda\varphi} = K_{\varphi\lambda} = 0.$$

3. *Радиосигнал с фазовой манипуляцией*

$$s(t, \lambda, \omega, \varphi) = a \sum_{i=1}^{n} q_i I[(t - \lambda)/\tau - i + 1] \cos[\omega t - \varphi], \tag{40}$$

где τ — длительность одной посылки, а q_i принимает значения 1 или −1 в соответствии с кодом фазовой манипуляции. В области центрального пика ($|\lambda - \lambda_0| < \tau$) сигнальная функция (9) имеет вид

$$S(\lambda_1, \omega_1, \varphi_1, \lambda_2, \omega_2, \varphi_2) = [1 - |\lambda_1 - \lambda_2|/\tau] \times \tag{41}$$
$$\times \operatorname{sinc}[(1 - |\lambda_1 - \lambda_2|/\tau)(\omega_1 - \omega_2)\tau/2] \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{n} \cos[(\lambda_1 + \lambda_2)(\omega_1 - \omega_2)/2 + (\omega_1 - \omega_2)(i - 1)\tau -$$
$$- \varphi_1 + \varphi_2] + |\lambda_1 - \lambda_2| \operatorname{sinc}[|\lambda_1 - \lambda_2|(\omega_1 - \omega_2)/2] \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{n-1} q_i q_{i+1} \cos[(\lambda_1 + \lambda_2)(\omega_1 - \omega_2)/2 + (\omega_1 - \omega_2)(i - 1)\tau -$$
$$- \varphi_1 + \varphi_2].$$

Отношение сигнал/шум (5) $z^2 = 2a^2\tau n/N_0$. Проверяя условия регулярности, получаем, что сигнал (40) является разрывным по временному положению λ при $\delta = (1 - \sum_{i=1}^{n-1} q_i q_{i+1}/n)/\tau$ и непрерывным по частоте и начальной фазе.

Поскольку $\alpha = \beta = 1$, дисперсии ОМП согласно (24), (36) равны

$$D(\hat{\lambda}) = 13\,\tau^2 / [1 - \sum_{i=1}^{n-1} q_i q_{i+1}/n]^2 \, 2z^4,$$

$$D(\hat{\omega}) = 12/\tau^2 n^2 z^2, \quad D(\hat{\varphi}) = [1 - 3(1 - 1/n)/2n]/z^2,$$

а функция кореляции оценок

$$K_{\omega\varphi} = K_{\varphi\omega} = 6\,(1 - 1/n)/\tau.$$

4. *Радиосигнал с частотной манипуляцией*

$$s(t, \lambda, \omega, \varphi) = a \sum_{i=1}^{n} I\,[(t-\lambda)/\tau - i]\cos[(\omega + \gamma_i)\,t - \varphi], \tag{42}$$

где γ_i – расстройка частоты i-й посылки относительно несущей частоты сигнала (42). Причем обычно γ_i выбирают так, что $|\gamma_i - \gamma_j| > 2\pi/\tau$ при $i \neq j$ и элементарные импульсы в сигнале (42) можно считать ортогональным. Тогда в окрестности главного максимума $(|\lambda - \lambda_0| < 2\pi/\min(\gamma_i, \gamma_j))$ сигнальная функция (9) имеет вид

$$S(\lambda_1, \omega_1, \varphi_1, \lambda_2, \omega_2, \varphi_2) = [1 - |\lambda_1 - \lambda_2|/\tau] \times$$
$$\times \operatorname{sinc}[(1 - |\lambda_1 - \lambda_2|/\tau)(\omega_1 - \omega_2)\tau/2] \times$$
$$\times \frac{\sin[n\tau(\omega_1 - \omega_2)/2]}{n\sin[\tau(\omega_1 - \omega_2)/2]}\cos[(\lambda_1 + \lambda_2)(\omega_1 - \omega_2)/2 - \varphi_1 + \varphi_2],$$

а отношение сигнал/шум (5) $z^2 = na^2\tau/N_0$. Сигнал (42) является разрывным по времени прихода λ при $\delta = 1/\tau$ и непрерывным по частоте ω и начальной фазе φ. Здесь $\alpha = \beta = 1$, и используя для расчетов дисперсий ОМП формулы (24), (36), получаем

$$D(\hat{\lambda}) = 13\,\tau^2/2z^4, \quad D(\hat{\omega}) = 12/n^2\tau^2 z^2, D(\hat{\varphi}) =$$
$$= 1/z^2, \quad K_{\omega\varphi} = K_{\varphi\omega} = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, при совместной оценке нескольких регулярных и одного разрывного параметров точность оценки регулярных параметров асимптотически не зависит от наличия неизвестного разрывного параметра. В то же время точность оценки разрывного параметра асимптотически не зависит от наличия нескольких неизвестных регулярных параметров. Применительно к сложным дискретным сигналам это означает, что незнание несущей частоты сигнала не снижает предельной точности оценки его задержки. Благодаря отмеченному свойству сложные дискретные сигналы выгодно отличаются, например, от сигналов с линейной частотной модуляцией и непрерывной огибающей, которые могут иметь коэффициент корреляции оценок задержки и частоты, близкий по модулю к единице. Последнее приводит к существенному снижению предельной точности оценки задержки при неизвестной несущей частоте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
2. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.

3. *Талькович С.Е., Хомяков Э.Н.* Статистическая теория измерительных радиосистем. М.: Радио и связь, 1981.
4. *Фомин А.Ф.* Помехоустойчивость систем передачи непрерывных сообщений. М.: Сов. радио, 1975.
5. *Трифонов А.П.* // РЭ. 1979. Т. 24. № 11. С. 2226.
6. *Трифонов А.П., Бутейко В.К.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1984. Т. 27. № 8. С. 28.
7. *Кук Ч., Бернфельд М.* Радиолокационные сигналы. М.: Сов. радио, 1971.
8. Справочник по радиолокации. Т. 1 / Пер. с англ. под ред. Ицхоки Я.С. М.: Сов. радио, 1977.
9. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.

Поступила в редакцию
4.01.90

УДК 621.373.01

А.С. Пиковский

СТОХАСТИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В ОДНОРОДНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрена однородная кольцевая автоколебательная система, состоящая из последовательно соединенных нелинейных усилителей и фильтров. Стационарные состояния описаны с использованием теории одномерных отображений. Показано, что при большом числе элементов возникают хаотические режимы, размерность которых линейно зависит от числа элементов.

ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ выделен и исследован широкий класс радиотехнических систем – кольцевые системы [1, 2], состоящие из соединенных последовательно и замкнутых в кольцо простейших элементов: фильтров, нелинейных усилителей, линий задержки. Исследование различных конкретных реализаций показало, что в подобных системах возможны разные типы стохастического поведения [1, 2]. Это дает возможность использовать кольцевые системы в качестве генераторов шума.

В данной работе исследуется кольцевая система, состоящая из большого числа одинаковых элементов, что позволяет определить ее как однородную систему. Одним из основных параметров здесь является число элементов; в частности, представляют интерес свойства системы при большом числе элементов. Покажем, что при большом числе элементов выходной сигнал с хорошей точностью можно считать гауссовским.

1. КОЛЬЦЕВАЯ СИСТЕМА. СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим кольцевую систему, каждый элемент которой состоит из последовательно соединенных линейного фильтра нижних частот и безынерционного нелинейного усилителя (однонаправленная система такого вида исследована в [3]). В безразмерных переменных, в которых за единицу времени принята постоянная времени фильтра, уравнения системы имеют следующий вид:

$$\frac{dx_n}{dt} + x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N, \qquad x_0 = x_N. \tag{1}$$

Здесь x_n – напряжение на выходе n-го звена, f – нелинейная функция преобразо-