 127

РАДИОТЕХНИКА

1991

№ 5

УДК 621.391

Потенциальная точность оценки периода следования видеоимпульсов с неизвестным временем прихода

А. П. Трифонов, М. Б. Беспалова

Найдена предельная точность оценки периода следования видеоимпульсов произвольной формы на фоне белого шума при наличии неинформативных параметров.

В [1] получено аналитическое выражение для потенциальной точности оценки периода следования видеоимпульсов колокольной формы на фоне аддитивного белого шума. При этом все параметры последовательности, кроме периода следования предполагались априори точно известными. В то же время во многих приложениях статистической радиотехники необходимо оценивать период повторения последовательности импульсов, форма которых отлична от колокольной, а время прихода неизвестно [2—4].

Цель работы — *получить аналитические выражения для потенциальной точности оценки периода следования видеоимпульсов произвольной формы с неизвестным временем прихода на фоне аддитивного белого шума.*

Пусть на интервале $[0,\ T]$ наблюдается реализация $x(t)=s(t,\ \lambda_0,\ \theta_0)+n(t)$ полезного сигнала $s(t,\ \lambda_0,\ \theta_0)$ и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Полезный сигнал представляет собой последовательность из N видеоимпульсов

$$s(t,\lambda,\theta)=\sum_{k=0}^{N-1} s[t-(k+1/2)\theta-\lambda]=a\sum_{k=0}^{N-1} f\left[\frac{t-(k+1/2)\theta-\lambda}{\theta/Q}\right], \qquad (1)$$

где a — амплитуда; θ — период следования; λ — время прихода; $Q=\theta/\tau$ — скважность;

$$\tau=\int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t)dt/\max s_1^2(t). \qquad (2)$$

— эквивалентная длительность одного импульса последовательности.

Функция $f(\cdot)$ в (I) описывает форму одного импульса последовательности и нормирована так, что $\max f(x)=1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx=1$. Аналогично [1] полагаем, что при изменении периода следования, скважность Q последовательности (1) остается постоянной.

Согласно [2, 3] для расчета потенциальной точности оценки необходимо найти сигнальную функцию (функцию неопределенности)

$$S(\theta_1,\theta_2,\lambda_1,\lambda_2)=2\int_0^T s(t,\lambda_1,\theta_1)\,s(t,\lambda_2,\theta_2)\,dt/N_0. \qquad (3)$$

Предположим, что интервал наблюдения больше длительности всей последовательности, т. е. $T>N\theta$ и скважность последовательности не слишком мала $Q\geqslant 2...3$) так, что отдельные импульсы последовательности не перекрываются. Тогда, подставляя (1) в (3), находим

$$S(\theta_1,\theta_2,\lambda_1,\lambda_2)=$$

$$=(2a^2/N_0)\sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty} f\left[\frac{Q(t-\lambda_1)}{Q_1}-Q(k+1/2)\right] f\left[\frac{Q(t-\lambda_2)}{\theta_2}-Q(k+1/2)\right]dt\ . \qquad (4)$$

Потенциальная точность оценивания θ с неизвестным λ характеризуется дисперсией эффективной оценки [2, 3]

$$D_\lambda(\theta)=D(\theta)/(1-R^2), \qquad (5)$$

где

$$D(\theta)=\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}S(0_1,\theta_2,\lambda_0,\lambda_0)\right]^{-1}_{\theta_0} \qquad (6)$$

— дисперсия эффективной оценки θ при априори известном λ;

$$R=-\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\lambda_2}S(\theta_1,\theta_2,\lambda_1,\lambda_2)\right]_{\theta_0\lambda_0}[D(\theta)D(\lambda)]^{-1/2} \tag{7}$$

— коэффициент корреляции совместно эффективных оценок θ и λ;

$$D(\lambda)=\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}S(\theta_0\theta_0,\lambda_1,\lambda_2)\right]^{-1}_{\lambda_0} \tag{8}$$

— дисперсия эффективной оценки времени прихода последовательности видеоимпульсов при априори известном θ.

Подставляя (4) в (6)—(8) и выполняя дифференцирование, получаем

$$D_\lambda(\theta)=12D_\lambda Q^2/N[Q^2N^2-1)+12(\alpha-\beta^2)]; \tag{9}$$

$$D(\theta)=12D_\lambda Q^2/N[Q^2(4N^2-1)+12\beta QN+12\alpha]; \tag{10}$$

$$R=-\sqrt{3}(2\beta+QN)[Q^2(4N^2-1)+12\beta QN+12\alpha]^{-1/2}; \tag{11}$$

$$D(\lambda)=D_\lambda/N, \tag{12}$$

$$D_\lambda=\theta_0^2\{Q^2z^2\int_{-\infty}^{\infty}[df(x)/dx]^2dx\}^{-1} \tag{13}$$

— дисперсия эффективной оценки времени прихода одного импульса последовательности; $z^2=2E_1/N_0$ — отношение сигнал-шум для одного импульса ($E_1=\int_{-\infty}^{\infty}s_1^2(t)\,dt$ — его энергия);

$$\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x\frac{df(x)}{dx}\right]^2dx\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2dx; \tag{14}$$

$$\beta=\int_{-\infty}^{\infty}x\left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2dx\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2dx. \tag{15}$$

Полученные выражения позволяют определить дисперсию эффективной оценки времени прихода λ последовательности (1) с неизвестным периодом следования θ [2, 3]

$$D_0(\lambda)=D_\lambda[Q^2(4N^2-1)+12\beta QN+12\alpha]\{N[Q^2(N^2-1)+12(\alpha-\beta^2)]\}^{-1}. \tag{16}$$

Из сравнения (9) и (10) следует, что в общем случае незнание времени прихода снижает потенциальную точность оценки периода следования последовательности. Ухудшение потенциальной точности оценивания периода можно охарактеризовать

$$\chi=D_\lambda(\theta)/D(\theta)=[Q^2(4N^2-1)+12\beta QN+12\alpha][Q^2(N^2-1)+12(\alpha-\beta^2)]^{-1}. \tag{17}$$

В качестве примера, иллюстрирующего полученные аналитические выражения, найдем потенциальную точность оценки периода следования квазипрямоугольных импульсов [4]

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left[-\frac{\pi}{2\delta^2}\left(x-\frac{1-\delta}{2}\right)^2\right], & x>\frac{1-\delta}{2};\\ 0, & |x|\leqslant\frac{1-\delta}{2};\\ \exp\left(-\frac{\pi}{2\delta^2}\left(x+\frac{1-\delta}{2}\right)^2\right], & x<-\frac{1-\delta}{2},\end{cases} \tag{18}$$

где $\delta\leqslant 1$ — относительная доля полной энергии импульса (18), сосредоточенная в его фронтах.

В частности, при $\delta=1$, квазипрямоугольный импульс принимает колокольную форму, а при $\delta=0$ переходит в прямоугольный импульс. Нетрудно получить, подставляя (18) в (13)—(15), что для квазипрямоугольного импульса

$$D_\lambda=2\delta\theta_0^2/(\pi z^2Q^2),\ \alpha=[\delta^2(\pi-2)+2\delta(4-\pi)+\pi]/(4\pi),\ \beta=0. \tag{19}$$

Подставляя затем (19) в (9)—(12), (16), (17), можно рассчитать потенциальную точность совместной оценки периода следования и времени прихода последовательности, а также определить потери в точности оценки периода следования из-за незнания времени прихода последовательности.

Анализируя зависимость $\alpha(\delta)$ (19) получаем $\max \alpha = 3/2\pi < 0{,}5$. Следовательно, при $Q \geqslant 3...4$ и $N \geqslant 2$ полученные формулы существенно упрощаются

$$D_\lambda(\theta) = 12D_\lambda/[N(N^2-1)],\ D(\theta) = 12D_\lambda/[N(4N^2-1)];$$
$$R = -N\sqrt{3}/\sqrt{4N^2-1},\ D_\theta(\lambda) = D_\lambda(4N^2-1)/[N(N^2-1)]; \tag{20}$$
$$\chi = (4N^2-1)/(N^2-1).$$

Последнее выражение показывает, что проигрыш в точности оценки периода следования из-за незнания времени прихода последовательности убывает с ростом числа импульсов в последовательности от максимального значения $\chi = 5$ при $N = 2$ до минимального $\chi = 4$ при $N \to \infty$.

Найденные выражения для потенциальной точности оценки периода следования справедливы при постоянной скважности Q последовательности (1). Однако в ряде задач представляет интерес оценка периода следования импульсов с постоянной длительностью вида

$$s(t, \lambda, \theta) = a \sum_{k=0}^{N-1} f\left[\frac{t-(k+1/2)\theta - \lambda}{\tau}\right], \tag{21}$$

где эквивалентная длительность одного импульса τ определяется (2).

Потенциальная точность оценки опять определяется (5) — (7) при подстановке в них сигнальной функции

$$S(\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2) = (2a^2/N_0) \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} f\left[\frac{t-(k+1/2)\theta_1-\lambda_1}{\tau}\right] f\left[\frac{t-(k+1/2)\theta_2-\lambda_2}{\tau}\right] dt. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (5) — (7) и выполняя дифференцирование, опять приходим к (20), где $D_\lambda = \tau^2 \{z^2 \int_{-\infty}^{\infty} [df(x)/dx]^2 dx\}^{-1}$. Следовательно, если скважность и число импульсов последовательности не слишком малы, потенциальная точность оценки практически одинакова для последовательностей с постоянными скважностью (1) и длительностью импульса (21). Поэтому целесообразно для описания последовательности видеоимпульсов использовать более простое выражение (21).

В заключение рассмотрим влияние априорной информации о скважности последовательности (1) или длительности импульса последовательности (21) на потенциальную точность оценки периода следования. Для этого, аналогично (4) или (22), необходимо записать сигнальную функцию для трех неизвестных параметров θ, λ, Q или θ, λ, τ, найти ее вторые производные и обратить матрицу размером 3×3 [2]. Получаемые аналитические выражения для дисперсий совместно эффективных оценок оказываются громоздкими. Однако они существенно упрощаются при симметричной форме одного импульса последовательности, когда $f(x) = f(-x)$. В этом случае дисперсия эффективной оценки периода следования совпадает с $D_\lambda(\theta)$ в (20). Следовательно, потенциальная точность оценки периода следования не зависит от незнания Q последовательности (1) или τ последовательности (21).

● Установлено, что незнание времени прихода последовательности импульсов произвольной формы приводит к увеличению дисперсии эффективной оценки периода следования в 4 раза. В то же время, незнание скважности (или длительности одного импульса) не снижает потенциальной точности оценки периода следования симметричных видеоимпульсов.

Литература

1. *Волков А. В.*— Радиотехника, 1990, № 1.
2. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М.: Сов. радио, 1978.
3. *Фалькович С. Е., Хомяков Э. Н.* Статистическая теория измерительных радиосистем.— М.: Радио и связь, 1981.
4. *Ярлыков М. С.* Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1980.

Поступила 11 июля 1990 г.