

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том 36

7



« НАУКА »

1991

Статистическая радиофизика и радиотехника

УДК 621.391.01

© 1991 г.

А.П. Трифонов, А.В. Захаров, В.И. Парфенов

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИЕМА СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Получены асимптотически точные выражения для характеристик алгоритма максимального правдоподобия обнаружения случайного импульсного сигнала и оценки его неизвестных параметров. Границы применимости найденных выражений установлены с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

ВВЕДЕНИЕ

Следуя [1, 2], под случайным импульсным сигналом будем понимать отрезок реализации шума достаточно большой длительности τ :

$$(1) \quad s(t) = I[(t - \lambda_0)/\tau] \xi(t),$$

где $I(\cdot)$ — индикатор единичной длительности, λ_0 — неизвестное временное положение сигнала, а $\xi(t)$ — реализация стационарного гауссовского случайного процесса с математическим ожиданием $\langle \xi(t) \rangle = a_0$ и спектром мощности $G(\omega) = \gamma_0 I(\omega/\Omega)$. Здесь γ_0 — величина, а Ω — ширина спектра мощности. Такая аппроксимация спектра мощности широко используется в практических приложениях статистической радиотехники [3–6].

Полагаем, что сигнал (1) наблюдается на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . В работах [1, 2] исследована эффективность приема сигнала (1) при условии, что неизвестно лишь его временное положение λ_0 . Однако часто неизвестны также математическое ожидание a_0 и величина спектра мощности γ_0 случайного процесса $\xi(t)$. В работе [7] параметры a_0 и γ_0 предполагали неизвестными, причем найдено лишь рассеяние надежной оценки временного положения сигнала без учета возможного влияния аномальных ошибок [8].

Рассмотрим здесь прием сигнала (1) с неизвестными параметрами a_0 , γ_0 , λ_0 , полагая, что неизвестное временное положение импульсного сигнала принимает значения из априорного интервала $[\Lambda_1; \Lambda_2]$. Для обнаружения сигнала (1) и оценки его параметров a_0 , γ_0 , λ_0 используем метод максимального правдоподобия. Устройство, реализующее этот метод, будем называть приемником максимального правдоподобия (ПМП) [1, 2, 5, 6, 8]. Структура ПМП описана в [2, 7]. Ниже найдены асимптотические выражения для характеристик обнаружения случайного импульсного сигнала и оценки его неизвестных параметров ПМП. Приведены также результаты статистического моделирования ПМП на ЭВМ.

1. ВЫХОДНОЙ СИГНАЛ ПРИЕМНИКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Пусть на вход ПМП поступает реализация $x(t) = s(t) + n(t)$ или $x(t) = n(t)$, причем $s(t)$ и $n(t)$ статистически не зависимы. По определению [8] ПМП формирует логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) $M(\lambda, a, \gamma)$ для всех $a, \gamma, \lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$. Будем считать, что

$$(2) \quad \mu = \tau\Omega/4\pi \gg 1.$$

Тогда в соответствии с [2, 7] логарифм ФОП имеет вид

$$(3) \quad M(\lambda, a, \gamma) = \mu \{ 2\gamma L_1(\eta) + 2a\sqrt{\tau N_0/\mu} L_0(\eta) - a^2 \tau/\mu - (N_0 + 2\gamma) \ln(1 + 2\gamma/N_0) \} / (N_0 + 2\gamma),$$

где $\eta = \lambda/\tau$ — нормированное временное положение,

$$(4) \quad L_0(\eta) = \int_{\tau(\eta-1/2)}^{\tau(\eta+1/2)} x(t) dt / \sqrt{\mu\tau N_0},$$

$$(5) \quad L_1(\eta) = \int_{\tau(\eta-1/2)}^{\tau(\eta+1/2)} y^2(t) dt / \mu N_0,$$

а $y(t)$ — отклик фильтра с передаточной функцией $h(\omega)$, удовлетворяющей условию $|h(\omega)|^2 = I(\omega/\Omega)$, на реализацию $x(t)$. Как известно [9], ПМП принимает решение о наличии полезного сигнала на основе сравнения величины абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП (3) с порогом c , который выбираем в соответствии с заданным критерием оптимальности обнаружения. Следовательно, с порогом сравниваем величину

$$M = \sup_{a, \gamma, \lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} M(\lambda, a, \gamma) = \sup_{\eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]} L(\eta),$$

где $L(\eta) = \sup_{a, \gamma} M(\lambda, a, \gamma)$, $\eta = \lambda/\tau$, $\tilde{\Lambda}_i = \Lambda_i/\tau$, $i = 1, 2$.

Логарифм ФОП (3) достигает максимума при

$$(6) \quad a = \tilde{a}(\eta) = \sqrt{\mu N_0/\tau} L_0(\eta), \quad \gamma = \tilde{\gamma}(\eta) = N_0 [L_1(\eta) - L_0^2(\eta) - 1] / 2.$$

Подставляя (6) в (3), имеем

$$(7) \quad L(\eta) = \mu \{ L_1(\eta) - \ln [L_1(\eta) - L_0^2(\eta) - 1] \}.$$

При наличии полезного сигнала (1) функционалы (4), (5) можно представить в виде суммы регулярных и шумовых составляющих [8]: $L_i(\eta) = S_i(\eta) + N_i(\eta)$, $i = 0, 1$, где $S_i(\eta) = \langle L_i(\eta) \rangle$ — регулярная, $N_i(\eta) = L_i(\eta) - \langle L_i(\eta) \rangle$ — шумовая составляющие, а усреднение выполняется по реализациям $x(t)$ при фиксированных $a_0, \gamma_0, \eta_0 = \lambda_0/\tau$. При выполнении (2) получаем

$$(8) \quad \begin{aligned} S_0(\eta) &= \delta \max(1 - |\eta - \eta_0|; 0) / \sqrt{2}; \quad B_0(\eta_1, \eta_2) = \langle N_0(\eta_1) N_0(\eta_2) \rangle = \\ &= \{ \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0) + q_0 I[(\eta_1 - \eta_2)/2] I[(\eta_1 - \eta_0)/2] I[(\eta_2 - \eta_0)/2] [1 + \min(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0) - \max(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0)] \} / 2\mu; \\ S_1(\eta) &= 1 + (q_0 + \delta^2/2) \max(1 - |\eta - \eta_0|; 0); \\ B_1(\eta_1, \eta_2) &= \langle N_1(\eta_1) N_1(\eta_2) \rangle = \{ \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0) + \\ &+ [q_0(2 + q_0) + \delta^2(1 + q_0)] I[(\eta_1 - \eta_2)/2] I[(\eta_1 - \eta_0)/2] I[(\eta_2 - \eta_0)/2] [1 + \min(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0) - \max(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0)] \} / \mu. \end{aligned}$$

Здесь $q_0 = 2\gamma_0/N_0$, $\delta^2 = z_0^2/\mu$, $z_0^2 = 2a_0^2\tau/N_0$.

При отсутствии полезного сигнала (1) для функционалов (4), (5) имеем

$$\begin{aligned} \langle L_0(\eta) \rangle &= 0, \quad \langle L_0(\eta_1) L_0(\eta_2) \rangle = \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0)/2\mu; \\ (9) \quad \langle L_1(\eta) \rangle &= 1, \quad \langle [L_1(\eta_1) - \langle L_1(\eta_1) \rangle] [L_1(\eta_2) - \langle L_1(\eta_2) \rangle] \rangle = \\ &= \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0)/\mu. \end{aligned}$$

2. ОБНАРУЖЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

Определим вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги) α и 2-го рода (пропуска сигнала) β [1, 9]. Предположим вначале, что полезный сигнал отсутствует. Тогда вероятность ложной тревоги можно записать в виде

$$(10) \quad \alpha = P[\sup_{\eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]} L(\eta) > c] = 1 - P_N(c),$$

где

$$(11) \quad P_N(c) = P[L(\eta) < c], \quad \eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2].$$

Введем в рассмотрение величину

$$(12) \quad \epsilon = \mu^{-1/2},$$

которая при выполнении (2) является малым параметром. Учитывая (9), функционал (7) при отсутствии сигнала перепишем в виде

$$(13) \quad L(\eta) = \mu \{ \epsilon N_{10}(\eta) - \ln[1 - \epsilon N_{10}(\eta) - \epsilon^2 N_{00}(\eta)/2] \}.$$

Здесь нормированные функции $N_{10}(\eta) = [L_1(\eta) - 1] \sqrt{\mu}$, $N_{00}(\eta) = L_0(\eta) \sqrt{2\mu}$, причем согласно (9) $\langle N_{10}(\eta) \rangle = \langle N_{00}(\eta) \rangle = 0$, $\langle N_{10}^2(\eta) \rangle = \langle N_{00}^2(\eta) \rangle = 1$, $\langle N_{10}(\eta_1) N_{10}(\eta_2) \rangle = \langle N_{00}(\eta_1) N_{00}(\eta_2) \rangle = \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0)$.

С учетом (2) разложим (13) в ряд Маклорена по ϵ и ограничимся первым членом разложения, зависящим от $x(\tau)$. В результате при $\epsilon \rightarrow 0$

$$(14) \quad L(\eta) = [N_{10}^2(\eta) + N_{00}^2(\eta)]/2 + o(\epsilon).$$

Опустим здесь члены разложения порядка ϵ и меньше. Учтем, что функционал $N_{00}(\eta)$ гауссовский, а $N_{10}(\eta)$ асимптотически (при выполнении (2)) гауссовский, причем $\langle N_{00}(\eta_1) N_{10}(\eta_2) \rangle \approx 0$. Следовательно, при $\mu \gg 1$ функционал (14) можно аппроксимировать выражением

$$(15) \quad L(\eta) \approx [X_1^2(\eta) + X_2^2(\eta)]/2 = \chi(\eta).$$

Здесь $X_i(\eta)$, $i = 1, 2$, — реализации независимых стационарных центрированных гауссовских случайных процессов с одинаковыми корреляционными функциями $\langle X_i(\eta_1) X_i(\eta_2) \rangle = \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0)$. Нетрудно показать, что функционал $\chi(\eta)$ является реализацией стационарного случайного процесса с плотностью вероятности $W(\chi) = \exp(-\chi)$, $\chi \geq 0$, и коэффициентом корреляции $R_\chi(\Delta)$, который при $\Delta \rightarrow 0$ допускает представление $R_\chi(\Delta) = 1 - 2|\Delta| + o(|\Delta|)$. Эти свойства функционала (15) на основе результатов [9] позволяют найти аппроксимацию функции $P_N(c)$ (11):

$$(16) \quad P_N(c) \approx \begin{cases} \exp[-2mc \exp(-c)], & c \geq 1, \\ 0, & c < 1. \end{cases}$$

где $m = \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{\Lambda}_1 = (\Lambda_2 - \Lambda_1)/\tau$. Согласно (10), (16) приближенное выражение для вероятности ложной тревоги принимает вид

$$(17) \quad \alpha \approx \begin{cases} 1 - \exp[-2mc \exp(-c)], & c \geq 1, \\ 1, & c < 1. \end{cases}$$

Точность формул (16) и (17) возрастает с увеличением m , c , μ [9].

Полагаем теперь, что полезный сигнал (1) присутствует на входе ПМП. Тогда вероятность пропуска сигнала (1)

$$(18) \quad \beta \approx P[\sup_{\eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]} L(\eta) < c] = P[\sup_{\eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]} L(\eta) < c].$$

Разобьем весь интервал возможных значений η на две подобласти: $\theta_S = (\eta^-; \eta^+)$, $\theta_N = \{\tilde{\Lambda}_1; \eta^-\}; [\eta^+; \tilde{\Lambda}_2]\}$, где $\eta^+ = \min(\tilde{\Lambda}_2; \eta_0 + 1)$, $\eta^- = \max(\tilde{\Lambda}_1; \eta_0 - 1)$. Из формул (8) следует, что при $\eta \in \theta_N$ вероятностные характеристики функционала (7) такие же, как и при отсутствии полезного сигнала на входе приемника. Обозначим $H_N = \sup L(\eta)$, $\eta \in \theta_N$ и $H_S = \sup L(\eta)$, $\eta \in \theta_S$. При $m \gg 1$ аналогично [1, 9] запишем (18) как

$$(19) \quad \beta \approx P_N^*(c)P_S(c), \quad P_N^*(c) = P[H_N < c], \\ P_S(c) = P[H_S < c],$$

причем

$$(20) \quad P_N^*(c) \approx P_N(c),$$

где вероятность $P_N(c)$ определена в (11), (16).

Найдем вероятность $P_S(c)$. Введем нормированные функции $\hat{N}_i(\eta) = N_i(\eta)\sqrt{\mu}$, $i = 0, 1$, два первых момента которых при $\eta \in \theta_S$

$$(21) \quad \langle \hat{N}_1(\eta) \rangle = \langle \hat{N}_0(\eta) \rangle = 0, \quad \langle \hat{N}_1^2(\eta) \rangle = 1 + [q_0(2 + q_0) + \\ + \delta^2(1 + q_0)](1 - |\eta - \eta_0|), \quad \langle \hat{N}_0^2(\eta) \rangle = [1 + q_0(1 - |\eta - \eta_0|)]/2.$$

Тогда, используя (12), перепишем (7) в виде

$$(22) \quad L(\eta) = \mu \{S_1(\eta) - 1 + \epsilon \hat{N}_1(\eta) - \ln[S_1(\eta) + \epsilon \hat{N}_1(\eta) - \{S_0(\eta) + \epsilon \hat{N}_0(\eta)\}^2]\}.$$

Предположим, что величины q_0 и δ конечны, так что дисперсии (21) нормированных шумовых функций $\hat{N}_1(\eta)$ и $\hat{N}_0(\eta)$ ограничены при любых μ . Кроме того, сигнальные функции $S_1(\eta)$ и $S_0(\eta)$ (8) не обращаются в нуль при $\eta \in \theta_S$. Разложим (22) в ряд Маклорена по ϵ и аналогично (13)–(15) ограничимся первым членом разложения, зависящим от реализации наблюдаемых данных. Функционал (22) при $\eta \in \theta_S$ перепишем как

$$(23) \quad L(\eta) \approx S(\eta) + N(\eta),$$

где

$$(24) \quad S(\eta) = \mu \{S_1(\eta) - 1 - \ln[S_1(\eta) - S_0^2(\eta)]\}$$

– сигнальная функция, а

$$(25) \quad N(\eta) = \mu \{N_1(\eta)[S_1(\eta) - S_0^2(\eta) - 1] + 2S_0(\eta)N_0(\eta)[S_1(\eta) - S_0^2(\eta)]^{-1}$$

– шумовая [8]. Введем в рассмотрение выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для принятого сигнала:

$$(26) \quad z^2 = S^2(\eta_0)/\langle N^2(\eta_0) \rangle = \\ = \mu \{\delta^2 + 2[q_0 - \ln(1 + q_0)]\}^2 \{4[\delta^2(1 + q_0) + q_0^2]\}^{-1}.$$

Из формулы (26) видно, что при $q_0 > 0$ и $\mu \rightarrow \infty$ ОСШ $z \rightarrow \infty$ при любых конечных значениях δ . Обозначим через

$$(27) \quad \eta_m = \arg \sup_{\eta} L(\eta), \quad \eta \in \theta_S.$$

надежную оценку максимального правдоподобия (ОМП) параметра η_0 [8]. Тогда $H_S = L(\eta_m)$, $P_S(c) = P[L(\eta_m) < c]$. При $z \rightarrow \infty$ ОМП η_m сходится к η_0 в средне-квадратическом смысле [7]. Поэтому, когда $z \gg 1$, для расчета вероятности $P_S(c)$ достаточно исследовать поведение (23) в малой окрестности η_0 [9]. Введем $\Delta = \max\{|\eta_1 - \eta_0|, |\eta_2 - \eta_0|, |\eta_1 - \eta_2|\}$. Тогда для (24), (25) при $\Delta \rightarrow 0$ справед-

$$(28) \quad \begin{aligned} S(\eta) &= \mu[q_0 - \ln(1 + q_0)] + z_0^2/2 - A_S |\eta - \eta_0| + o(\Delta), \\ \langle N(\eta_1)N(\eta_2) \rangle &= \sigma_1^2 + (4S - \sigma_0^2) |\eta_1 - \eta_2| - \\ &- (2A_S + \sigma_1^2 - \sigma_0^2) [\max(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0) - \\ &- \min(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0)] + o(\Delta). \end{aligned}$$

Здесь $A_S = [\mu q_0^2 + z_0^2(2 + q_0)/2]/(1 + q_0)$, $\sigma_0^2 = (\mu q_0^2 + z_0^2)/(1 + q_0)^2$, $\sigma_1^2 = \mu q_0^2 + z_0^2(1 + q_0)$. Обозначим

$$(29) \quad P_r(c) = P[L(\eta) < c], \quad |\eta - \eta_0| < m_r,$$

где значение m_r фиксировано и выбрано настолько малым, что при $\Delta < m_r$ (28) можно аппроксимировать главными членами асимптотических разложений с требуемой точностью. Тогда при $z \gg 1$ в силу сходимости η_m к η_0 в среднеквадратическом [7] $P_S(c)$ можно аппроксимировать вероятностью (29)

$$(30) \quad P_S(c) \approx P_r(c).$$

Перепишем (29) как $P_r(c) = P[R(\eta) < c - L_0], |\eta - \eta_0| < m_r$, где $R(\eta) = L(\eta) - L_0$, $L_0 = L(\eta_0)$. Используя главные члены асимптотических разложений (28), находим при $\Delta < m_r$ два первых момента

$$\begin{aligned} \langle R(\eta) \rangle &= -A_S |\eta - \eta_0|, \quad \langle [R(\eta_1) - \langle R(\eta_1) \rangle] [R(\eta_2) - \langle R(\eta_2) \rangle] \rangle = \\ &= (\sigma_1^2 + \sigma_0^2) \begin{cases} \min(|\eta_1 - \eta_0|, |\eta_2 - \eta_0|), & (\eta_1 - \eta_0)(\eta_2 - \eta_0) \geq 0, \\ 0, & (\eta_1 - \eta_0)(\eta_2 - \eta_0) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Кроме того, при выполнении (2) случайный процесс $R(\eta)$ можно считать приближенно гауссовским. Рассчитывая далее вероятность $P_r(c)$ аналогично [1, 9], получаем

$$(31) \quad \begin{aligned} P_r(c) &= \Phi(u - z) - 2 \exp[\psi^2 z^2/2 + \psi z(z - u)] \Phi[u - z(\psi + 1)] + \\ &+ \exp[2\psi^2 z^2 + 2\psi z(z - u)] \Phi[u - z(2\psi + 1)], \\ u &= c/\sigma_1, \end{aligned}$$

где $\psi = 2\sigma_1^2 A_S / [S(\eta_0)(\sigma_1^2 + \sigma_0^2)]$, а $\Phi(x)$ — интеграл вероятности [9]. Таким образом, согласно (19), (20), (16), (30), (31) приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала принимает вид

$$(32) \quad \beta \approx \exp[-2mc \exp(-c)] \Phi(u - z) - 2 \exp[\psi^2 z^2/2 + \psi z(z - u)] \Phi[u - z(\psi + 1)] + \exp[2\psi^2 z^2 + 2\psi z(z - u)] \Phi[u - z(2\psi + 1)]$$

при $c \geq 1$ и $\beta \approx 0$ при $c < 1$. Точность этой формулы возрастает с увеличением c , m , μ , z .

3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

Рассмотрим характеристики ОМП параметров λ_0 , a_0 , γ_0 случайного импульсного сигнала (1). При этом будем полагать, что сигнал (1) присутствует с вероятностью 1. Согласно [8], оценка $\hat{\eta}$ параметра $\eta_0 = \lambda_0/\tau$ определяется как

$$(33) \quad \hat{\eta} = \arg \sup_{\eta} L(\eta), \quad \eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2],$$

а оценки $\hat{a}$ и $\hat{\gamma}$ параметров a_0 и γ_0 — как

$$(34) \quad \hat{a} = \hat{a}(\hat{\eta}), \quad \hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\eta}).$$

Рассмотрим вначале характеристики ОМП $\hat{\eta}$ (33). Согласно [8], при $m \gg 1$ условное смещение $d_{\eta} = \langle \hat{\eta} - \eta_0 \rangle$ и условное рассеяние $V_{\eta} = \langle (\hat{\eta} - \eta_0)^2 \rangle$ оценки $\hat{\eta}$

имеют вид

$$(35) \quad \begin{aligned} d_{\eta} &= P_0 d_0 + (1 - P_0) [(\tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2)/2 - \eta_0], \\ V_{\eta} &= P_0 V_0 + (1 - P_0) [\tilde{\Lambda}_1^2 + \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\Lambda}_2 + \tilde{\Lambda}_2^2]/3 - \eta_0 (\tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2) + \eta_0^2. \end{aligned}$$

Здесь $d_0 = \langle \eta_m - \eta_0 \rangle$ — условное смещение, $V_0 = \langle (\eta_m - \eta_0)^2 \rangle$ — условное рассеяние надежной оценки η_m (27), а P_0 — вероятность надежной оценки [8]. Полагаем, что кроме (2) выполняется условие $z \gg 1$. Тогда аналогично [1] можно показать, что $d_0 \approx 0$ и согласно [7]

$$(36) \quad V_0 = \frac{13}{8} \frac{\{\mu q_0^2 [1 + (1 + q_0)^2] + z_0^2 [1 + (1 + q_0)^3]\}^2}{\{\mu q_0^2 + z_0^2 (1 + q_0)/2\}^4}.$$

Отметим, что при выводе (36) в [7] считали $V_0 \gg \mu^{-2}$. Аналогично [1, 8] при $m \gg 1$ можем записать $P_0 \approx \int_{-\infty}^{\infty} P_N^*(x) dP_S(x)$. Воспользуемся аппроксимациями

(20), (30) функций $P_N^*(x)$ и $P_S(x)$. Тогда согласно (16), (31) имеем

$$(37) \quad \begin{aligned} P_0 &\approx \frac{2\psi z}{\sigma_1} \exp[\psi^2 z^2 / 2 + \psi z^2] \int_1^{\infty} \exp[-2\pi x \exp(-x)] \times \\ &\times \{ \exp(-\psi z x / \sigma_1) \Phi[x/\sigma_1 - z(\psi + 1)] - \exp[3\psi^2 z^2 / 2 + \psi z(z - 2x/\sigma_1)] \times \\ &\times \Phi[x/\sigma_1 - z(2\psi + 1)] \} dx. \end{aligned}$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением m, μ, z .

Рассмотрим характеристики ОМП $\hat{a}$ и $\hat{\gamma}$ (34). Предположим вначале, что величина параметра η_0 априори известна. Тогда в (34) следует подставить $\hat{\eta} \equiv \eta_0$. При $\hat{\eta} \equiv \eta_0$ и выполнении (2) характеристики оценок (34) определяются выражениями

$$(38) \quad \begin{aligned} d_{a0} &= \langle \hat{a} - a_0 \rangle = 0, \quad V_{a0} = \langle (\hat{a} - a_0)^2 \rangle = N_0(1 + q_0)/2\tau, \\ d_{\gamma 0} &= \langle \hat{\gamma} - \gamma_0 \rangle = -N_0(1 + q_0)/4\mu, \quad V_{\gamma 0} = \langle (\hat{\gamma} - \gamma_0)^2 \rangle = N_0^2(1 + q_0)^2/4\mu. \end{aligned}$$

Полагаем теперь, что величина параметра η_0 не известна. Из формул (38) следует, что при $\hat{\eta} \equiv \eta_0$ и выполнении (2) рассеяния оценок (34) имеют порядок малости μ^{-1} . С другой стороны, согласно (36), рассеяние надежной оценки η_m имеет порядок малости μ^{-2} . Поэтому аналогично [10] можно показать, что при $\mu \gg 1, z \gg 1$, когда $P_0 \approx 1$, т.е. когда оценка $\hat{\eta}$ (33) является надежной, характеристики оценок $\hat{a} = \tilde{a}(\hat{\eta})$ и $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}(\hat{\eta})$ совпадают с характеристиками (38), найденными при известной величине параметра $\eta_0(\lambda_0)$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью установления границ применимости найденных асимптотически точных формул для характеристик обнаружения и оценки выполнено статистическое моделирование ПМП на ЭВМ. В процессе моделирования на интервале $[\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]$ с шагом $\Delta\eta = 0,01$ формировали отсчеты реализаций случайного процесса (7) как при наличии, так и при отсутствии сигнала (1), а также отсчеты реализаций случайных процессов (6) при наличии сигнала (1). Для каждой реализации $x(t)$ сравнивали величину наибольшего отсчета (7) с порогом s и находили вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала. Кроме того, согласно (33), (34) определяли оценки $\hat{\eta}, \hat{a}, \hat{\gamma}$ и находили рассеяния оценок.

Некоторые результаты статистического моделирования представлены на рис. 1–5, где показаны также соответствующие теоретические зависимости. Каждое экспериментальное значение получено в результате обработки не менее 10^3

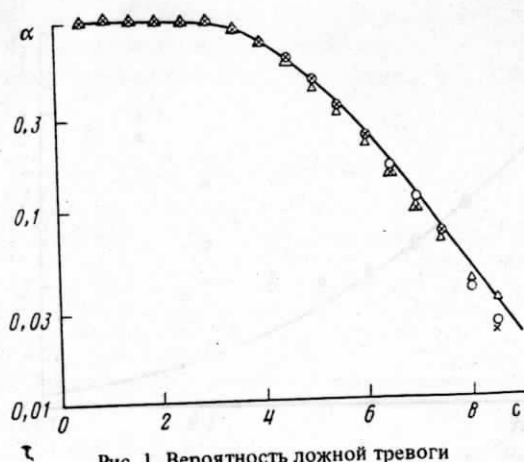


Рис. 1. Вероятность ложной тревоги

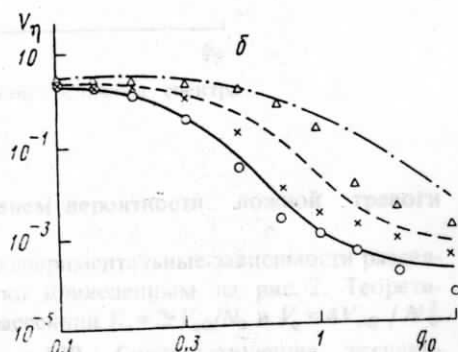
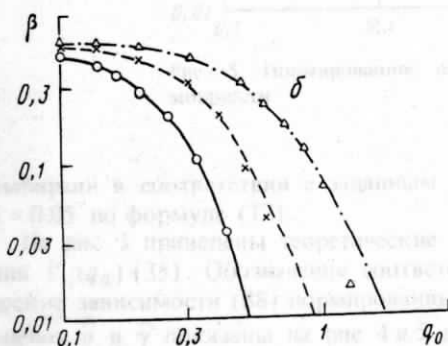
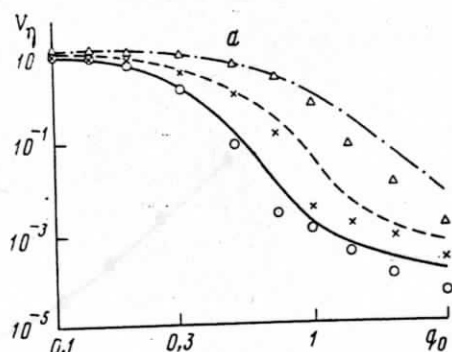
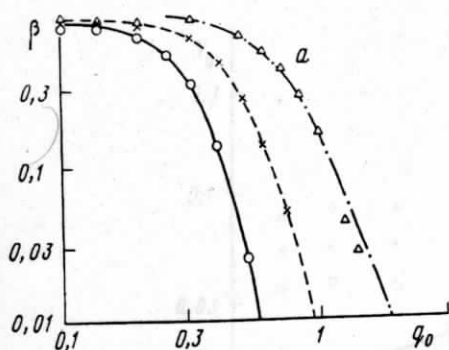


Рис. 2. Вероятность пропуска сигнала: а: $z_0^2 = 0$, б: $z_0^2 = 10$

Рис. 3. Нормированное рассеяние оценки временного положения; а: $z_0^2 = 0$, б: $z_0^2 = 10$

реализаций $x(t)$ при $m = 10$, $\tilde{\Lambda}_1 = 0$, $\tilde{\Lambda}_2 = m$, $\eta_0 = (\tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2)/2$. На рис. 1 приведена теоретическая зависимость вероятности ложной тревоги $\alpha(c)$ (17), на рис. 2 — теоретическая зависимость вероятности пропуска сигнала $\beta(q_0)$ (32) для $\mu = 200$ (сплошные линии), 100 (штриховые), 40 (штрихпунктирные). Экспериментальные значения характеристик обнаружения обозначены на рис. 1 и 2 треугольниками, крестиками, кружочками для $\mu = 40$; — 100 и 200. Величину порога c

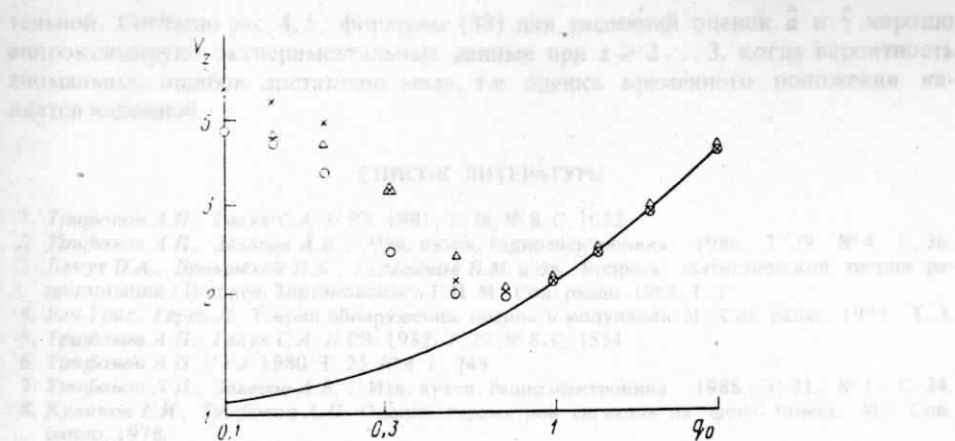


Рис. 4. Нормированное рассеяние оценки математического ожидания

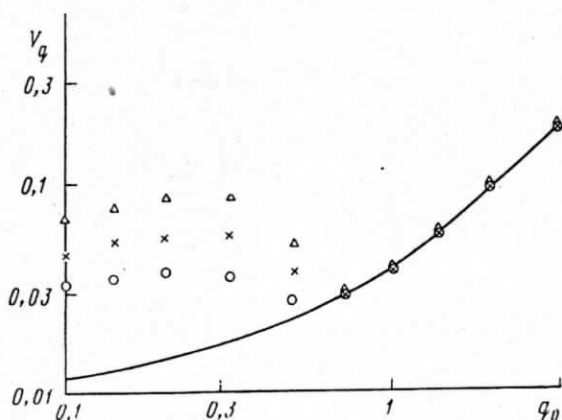


Рис. 5. Нормированное рассеяние величины спектра мощности

выбирали в соответствии с заданным уровнем вероятности ложной тревоги $\alpha = 0.05$ по формуле (17).

На рис. 3 приведены теоретические и экспериментальные зависимости рассеяния $V_\eta(q_0)$ (35). Обозначения соответствуют приведенным на рис. 2. Теоретические зависимости (38) нормированных рассеяний $V_z = 2V_{a0}/N_0$ и $V_q = 4V_{\gamma 0}/N_0^2$ оценок $\hat{a}$ и $\hat{\gamma}$ показаны на рис. 4 и 5 для $\mu = 100$. Соответствующие экспериментальные значения рассеяний V_z и V_q обозначены треугольниками, крестиками и кружочками для $z_0^2 = 0; 5; 10$.

Как следует из рис. 1–3, теоретические зависимости для вероятностей α (17) и β (32) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные уже $\mu = 40$, а теоретические зависимости для рассеяния V_η (35) оценки $\hat{\eta}$ – при $\mu = 100 \dots 200$, что соответствует значениям $z \geq 0.3 \dots 1$. При $q_0 > 2 \dots 3$ теоретические зависимости $V_\eta(q_0)$ (35) отклоняются от экспериментальных значений, поскольку формула (36) для рассеяния V_0 надежной оценки временного положения получена в [7] в пренебрежении ошибками оценивания порядка времени корреляции случайного импульса (1). Следовательно, когда рассеяние убывает до величины порядка μ^{-2} , погрешность формул (35), (36) становится значи-

тельной. Согласно рис. 4, 5, формулы (38) для рассеяний оценок $\hat{a}$ и $\hat{\gamma}$ хорошо аппроксимируют экспериментальные данные при $z \geq 2 \dots 3$, когда вероятность аномальных ошибок достаточно мала, т.е. оценка временного положения является надежной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трифонов А.П., Галун С.А. // РЭ. 1981. Т. 26. № 8. С. 1622.
2. Трифонов А.П., Захаров А.В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1986. Т. 29. № 4. С. 36.
3. Бакут П.А., Большаков И.А., Герасимов Б.М. и др. Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Тартаковского Г.П. М.: Сов. радио, 1963. Т. 1.
4. Ван-Трис, Гарри Л. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1977. Т. 3.
5. Трифонов А.П., Галун С.А. // РЭ. 1982. Т. 27. № 8. С. 1554.
6. Трифонов А.П. // РЭ. 1980. Т. 25. № 4. С. 749.
7. Трифонов А.П., Захаров А.В. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1988. Т. 31. № 1. С. 24.
8. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
9. Трифонов А.П. // Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984. С. 12–89.
10. Боссвиль М., Вилски А., Банвениста А. и др. Обнаружение изменений свойств сигналов и динамических систем / Под ред. Боссвиль М., Банвениста А. М.: Мир, 1989.

Поступила в редакцию
3.01.91