

Российская Академия наук

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том 37

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

6

МОСКВА · 1992

Статистическая радиофизика

УДК 621.396

© 1992 г. А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СОВМЕСТНОЙ ОЦЕНКИ ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ И ПЕРИОДА СЛЕДОВАНИЯ ИМПУЛЬСОВ ПРИ НАЛИЧИИ НЕИНФОРМАТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Получены характеристики совместно-эффективных оценок временного положения и периода следования импульсов медленно и быстро флуктуирующих последовательностей, содержащих конечное число произвольных неинформативных параметров. Показано, что точность оценки периода следования медленно флуктуирующей последовательности не зависит от наличия неинформативных параметров. Найдены потери в точности оценки временного положения и периода следования сверхширокополосных импульсов вследствие наличия неинформативных параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Последовательности различного рода импульсов широко применяются в статистической радиотехнике и радиолокации [1–5]. В работах [3, 4] найдена эффективность оценки параметра последовательности узкополосных радиоимпульсов с неизвестными амплитудами и фазами. Однако импульсы последовательностей, которые применяют в последнее время [1, 2, 6], не всегда являются узкополосными. У отдельных импульсов последовательности могут быть не известны не только амплитуды и фазы, как это предполагали в [3, 4], но и другие параметры. В связи с этим рассмотрим оценку основных параметров последовательности: временного положения и периода следования, полагая, что импульсы последовательности содержат произвольное конечное число неинформативных параметров, т.е. неизвестных параметров, в оценке которых нет необходимости [7].

Полагаем, что на фоне гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0 наблюдается последовательность из N импульсов, каждый из которых описывается функцией $s(t, \vec{l})$. Здесь $\vec{l} = \|l_1, \dots, l_p\|$ – вектор неинформативных параметров. Если неинформативные параметры имеют одинаковые значения для всех импульсов последовательности, назовем ее медленно флуктуирующей (“когерентной”) [3, 4]. Такая последовательность может быть записана в виде

$$(1) \quad s_N(t, \lambda_0, \theta_0, \vec{l}_0) = \sum_{k=0}^{N-1} s[t - (k + \mu)\theta_0 - \lambda_0, \vec{l}_0],$$

где λ – временное положение, θ – период следования. Параметр μ определяет точку последовательности, с которой связано ее временное положение λ . Так, при $\mu = 0$ величина λ представляет собой временное положение первого импульса последовательности, при $\mu = -(N-1)/2$ – временное положение середины

последовательности, а при $\mu = -(N-1)$ — временное положение последнего импульса последовательности.

Если неинформативные параметры $\vec{l}$ имеют различные значения в различных импульсах последовательности, назовем ее быстро флуктуирующей ("некогерентной") [3, 4]. Такая последовательность может быть представлена в виде

$$(2) \quad s_N(t, \lambda_0, \theta_0, \vec{L}_0) = \sum_{k=0}^{N-1} s[t - (k + \mu)\theta_0 - \lambda_0, \vec{l}_{0k}],$$

где $\vec{L} = \|\vec{l}_0, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{N-1}\|$ — блочный (составной) вектор неинформативных параметров, объединяющий все неинформативные параметры последовательности. Согласно (1) и (2), медленно флуктуирующая последовательность содержит p , а быстро флуктуирующая — Np неинформативных параметров. Индексом "нуль" в (1), (2) отмечены истинные значения неизвестных параметров принимаемой последовательности.

Для регулярного случая [8, 9] ниже найдена потенциальная точность совместной оценки временного положения λ и периода следования θ медленно и быстро флуктуирующих последовательностей импульсов. Определены потери в точности оценки λ и θ вследствие наличия неинформативных параметров.

1. МЕДЛЕННО ФЛУКТУИРУЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Согласно [3–5], для расчета потенциальной точности совместных оценок неизвестных параметров последовательности (1) необходимо найти сигнальную функцию (функцию неопределенности)

$$(3) \quad S(\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2, \vec{l}_1, \vec{l}_2) = \frac{2}{N_0} \int_0^T s_N(t, \lambda_1, \theta_1, \vec{l}_1) s_N(t, \lambda_2, \theta_2, \vec{l}_2) dt.$$

Считаем, что интервал наблюдения $[0, T]$ больше длительности всей последовательности (1); величина скважности последовательности не менее двух, так что отдельные импульсы не перекрываются: аргументы функции (3) удовлетворяют условию $|\lambda_1 - \lambda_2 + (\theta_1 - \theta_2)(k + \mu)| < \min(\theta_1, \theta_2)$ для всех $k = 0, N-1$. Тогда, подставляя (1) в (3), получим

$$(4) \quad S(\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2, \vec{l}_1, \vec{l}_2) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k(\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2, \vec{l}_1, \vec{l}_2),$$

$$(5) \quad S_k(\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2, \vec{l}_1, \vec{l}_2) = 2 \int_0^T s[t - (k + \mu)\theta_1 - \lambda_1, \vec{l}_1] \times \\ \times s[t - (k + \mu)\theta_2 - \lambda_2, \vec{l}_2] dt / N_0.$$

Поскольку рассматриваем регулярный случай [8, 9], отдельные импульсы последовательности (1) должны быть дифференцируемы по t и всем $l_i, i = 1, p$. Поэтому потенциальная точность оценки всех неизвестных параметров последовательности (1) характеризуется корреляционной матрицей совместно-эффективных оценок [3–5]

$$(6) \quad K_p = I^{-1}.$$

Здесь I — информационная матрица Фишера, которую представим в виде блочной (клеточной) матрицы:

$$(7) \quad I = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix},$$

где

$$(8) \quad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_2 \partial \theta_1} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 S}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \vec{B}_1 \\ \vec{B}_2 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} \end{vmatrix}, \quad \vec{B}_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_1 \partial l_{2i}} \end{vmatrix}, \quad \vec{B}_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta_1 \partial l_{2i}} \end{vmatrix}$$

— векторы-строки, $i, j = \overline{1, p}$, T — операция транспонирования. Все производные от сигнальной функции (4) в формулах (8) вычисляются при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$, $\vec{l}_1 = \vec{l}_2 = \vec{l}_0$. Подставляя (5) в (4), а (4) в (8) и выполняя дифференцирование, находим

$$(9) \quad \mathbf{A} = A \sum_{k=0}^{N-1} \begin{vmatrix} 1 & k + \mu \\ k + \mu & (k + \mu)^2 \end{vmatrix}, \quad \vec{B}_1 = -N \|B_i\|,$$

$$\vec{B}_2 = -\|B_i\| \sum_{k=0}^{N-1} (k + \mu), \quad \mathbf{D} = N \|D_{ij}\|,$$

$$A \equiv A(\vec{l}_0) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t, \vec{l}_0)}{\partial t} \right]^2 dt,$$

$$B_i \equiv B_i(\vec{l}_0) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t, \vec{l})}{\partial t} \frac{\partial s(t, \vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}_0} dt,$$

$$D_{ij} \equiv D_{ij}(\vec{l}_0) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t, \vec{l})}{\partial l_i} \frac{\partial s(t, \vec{l})}{\partial l_j} \right]_{\vec{l}_0} dt.$$

Параметры $\vec{l}$ неинформативные, поэтому нет необходимости определять все элементы корреляционной матрицы (6). Достаточно найти элементы, расположенные на пересечении первых двух строк и столбцов этой матрицы, которые описывают потенциальную точность совместных оценок временного положения и периода следования импульсов последовательности (1). Матрицу размером 2×2 , образованную из элементов матрицы (6), расположенных на пересечении ее первых двух строк и столбцов, обозначим

$$(10) \quad \mathbf{K}(\vec{l}_0) = \begin{vmatrix} \sigma_\lambda^2(\vec{l}_0) & \sigma_\lambda(\vec{l}_0) \sigma_\theta(\vec{l}_0) R(\vec{l}_0) \\ \sigma_\lambda(\vec{l}_0) \sigma_\theta(\vec{l}_0) R(\vec{l}_0) & \sigma_\theta^2(\vec{l}_0) \end{vmatrix} = \mathbf{F}^{-1}.$$

Здесь $\sigma_\lambda^2(\vec{l}_0)$ — дисперсия совместно-эффективной оценки временного положения медленно флуктуирующей последовательности (1), $\sigma_\theta^2(\vec{l}_0)$ — дисперсия аналогичной оценки периода следования, а $R(\vec{l}_0)$ — их коэффициент корреляции при наличии p неинформативных параметров $\vec{l}$. Матрицу $\mathbf{F}$ в (10) можно найти с помощью формулы Фробениуса [10]

$$(11) \quad \mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}^T.$$

Подставляя (9) в (11), получаем элементы этой матрицы:

$$(12) \quad \begin{aligned} F_{11} &= NA(1 - \rho_p), \quad F_{12} = F_{21} = A(1 - \rho_p) \sum_{k=0}^{N-1} (k + \mu), \\ F_{22} &= A \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (k + \mu)^2 - \rho_p \left[\sum_{k=0}^{N-1} (k + \mu) \right]^2 / N \right\}, \end{aligned}$$

$$(13) \quad \rho_p \equiv \rho_p(\vec{l}_0) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p B_i B_j \Delta_{ij} / A,$$

Δ_{ij} — элементы матрицы, обратной к матрице с элементами D_{ij} (9), т.е. $\|\Delta_{ij}\| = \|D_{ij}\|^{-1}$, $i, j = 1, p$.

Обращая в (10) матрицу F с элементами (12), для характеристик совместно-эффективных оценок временного положения и периода следования импульсов последовательности (1) можно записать следующие выражения:

$$(14) \quad \begin{aligned} \sigma_\lambda^2(\vec{l}_0) &= \sigma_t^2 \frac{N^2 - 1 + 12(1 - \rho_p)[\mu + (N - 1)/2]^2}{N(N^2 - 1)(1 - \rho_p)}, \\ \sigma_\theta^2(\vec{l}_0) &= 12\sigma_t^2 / N(N^2 - 1), \\ R(\vec{l}_0) &= - \frac{[\mu + (N - 1)/2] \sqrt{1 - \rho_p}}{\{(N^2 - 1)/12 + [\mu + (N - 1)/2]^2(1 - \rho_p)\}^{1/2}}. \end{aligned}$$

Здесь

$$(15) \quad \sigma_t^2 \equiv \sigma_t^2(\vec{l}_0) = A^{-1} = \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t, \vec{l}_0)}{\partial t} \right]^2 dt \right\}^{-1}$$

— дисперсия эффективной оценки временного положения одного импульса последовательности при априори известных значениях всех его параметров, т.е. при отсутствии неинформативных параметров.

Рассмотрим влияние наличия неинформативных параметров на точность оценки параметров λ и θ последовательности (1). С этой целью найдем корреляционную матрицу [3–5]

$$(16) \quad K_0 = \begin{Bmatrix} \sigma_\lambda^2 & \sigma_\lambda \sigma_\theta R \\ \sigma_\lambda \sigma_\theta R & \sigma_\theta^2 \end{Bmatrix} = A^{-1}$$

совместно-эффективных оценок λ и θ при отсутствии неинформативных параметров. Обращая матрицу A (9) для характеристик (16) совместно-эффективных оценок λ и θ при отсутствии неинформативных параметров, получаем выражения

$$(17) \quad \begin{aligned} \sigma_\lambda^2 &= \sigma_t^2 \frac{N^2 - 1 + 12[\mu + (N - 1)/2]^2}{N(N^2 - 1)}, \\ \sigma_\theta^2 &= 12\sigma_t^2 / N(N^2 - 1), \\ R &= - \frac{\mu + (N - 1)/2}{\{(N^2 - 1)/12 + [\mu + (N - 1)/2]^2\}^{1/2}}. \end{aligned}$$

Из сопоставления (14) и (17) следует, что наличие в медленно флуктуирующей последовательности (1) конечного числа p произвольных неинформативных параметров не приводит к увеличению дисперсии эффективной оценки периода следования. Поэтому эффективная оценка периода следования медленно флуктуирующей последовательности импульсов инвариантна к неинформативным параметрам последовательности. Однако наличие неинформативных пара-

метров в общем случае приводит к увеличению дисперсии эффективной оценки временного положения медленно флуктуирующей последовательности (1). Убедимся в этом, полагая для определенности

$$(18) \quad \mu = -(N-1)/2.$$

Тогда формулы (14) и (17) упрощаются и принимают вид

$$(19) \quad \sigma_{\lambda}^2(\vec{l}_0) = \sigma_t^2/N(1 - \rho_p), \quad \sigma_{\theta}^2(\vec{l}_0) = 12\sigma_t^2/N(N^2 - 1), \quad R(\vec{l}_0) = 0,$$

$$(20) \quad \sigma_{\lambda}^2 = \sigma_t^2/N, \quad \sigma_{\theta}^2 = 12\sigma_t^2/N(N^2 - 1), \quad R = 0.$$

Сравнивая (19) и (20), находим проигрыш в точности эффективной оценки временного положения последовательности вследствие наличия неинформативных параметров:

$$(21) \quad \chi_p = \sigma_{\lambda}^2(\vec{l}_0)/\sigma_{\lambda}^2 = (1 - \rho_p)^{-1}.$$

Следовательно, проигрыш в точности оценки временного положения последовательности зависит от величины (13), которую перепишем как

$$(22) \quad \rho_p \equiv \rho_p(\vec{l}_0) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p R_{ti} R_{tj} \tilde{R}_{ij} \kappa_i \kappa_j.$$

Здесь

$$(23) \quad R_{ti} \equiv R_{ti}(\vec{l}_0) = -B_i/\sqrt{AD_{ii}}$$

— коэффициент корреляции между совместно-эффективными оценками временного положения и параметра l_i одного импульса, когда значения остальных $p-1$ параметров $l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_p$ этого импульса априори известны; $\tilde{R}_{ij} \equiv \tilde{R}_{ij}(\vec{l}_0) = \Delta_{ij}/\sqrt{\Delta_{ii}\Delta_{jj}}$ — коэффициент корреляции совместно-эффективных оценок параметров l_i и l_j при совместной оценке всех p неинформативных параметров одного импульса;

$$(24) \quad \kappa_i^2 \equiv \kappa_i^2(\vec{l}_0) = \tilde{\sigma}_i^2(\vec{l}_0)/\sigma_i^2 = \Delta_{ii}/D_{ii}$$

— отношение дисперсии $\tilde{\sigma}_i^2(\vec{l}_0)$ совместно-эффективной оценки параметра l_i при совместной оценке всех p неинформативных параметров одного импульса к дисперсии эффективной оценки σ_i^2 параметра l_i одного импульса, когда значения остальных $p-1$ параметров априори известны. В сущности величина (24) определяет проигрыш в точности совместно-эффективной оценки параметра l_i вследствие незнания $p-1$ параметров $l_1, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_p$.

Найденные выражения для характеристик совместно-эффективных оценок (14), (17) могут быть использованы для расчета характеристик асимптотически эффективных оценок временного положения и периода следования последовательности импульсов в условиях высокой апостериорной точности оценок. Например, их можно использовать для расчета характеристик совместных оценок максимального правдоподобия [3], если отношение сигнал/шум

$$(25) \quad z_N^2 = 2N \int_0^T s^2(t, \vec{l}_0) dt / N_0$$

для всей последовательности импульсов (1) достаточно велико.

2. БЫСТРО ФЛУКТУИРУЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Для последовательности (2) сигнальная функция определяется выражением [3-5]

$$(26) \quad S(\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2, \vec{L}_1, \vec{L}_2) = 2 \int_0^T s_N(t, \lambda_1, \theta_1, \vec{L}_1) \times \\ \times s_N(t, \lambda_2, \theta_2, \vec{L}_2) dt / N_0.$$

Опять считаем, что $T > N\theta$ и отдельные импульсы последовательности (2) не перекрываются. Подставляя (2) в (26), находим

$$(27) \quad S(\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2, \vec{L}_1, \vec{L}_2) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k(\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2, \vec{l}_{1k}, \vec{l}_{2k}).$$

Слагаемые в правой части (27) определяются из (5) при замене в этой формуле $\vec{l}_i$ на $\vec{l}_{ik}$, $i = 1, 2$; $k = \overline{0, N-1}$. Действительно, у быстро флуктуирующей последовательности значения неинформативных параметров различны для различных импульсов последовательности.

Поскольку рассматриваем регулярный случай [8, 9], потенциальная точность оценки всех неизвестных параметров последовательности (2) опять характеризуется корреляционной матрицей совместно-эффективных оценок (6). Отличие этой матрицы от представленной в разд. 1 состоит лишь в ее размерах и структуре. Если для медленно флуктуирующей последовательности корреляционная матрица (6) и информационная матрица Фишера (7) имели размер $(2+p) \times (2+p)$, то для быстро флуктуирующей последовательности эти матрицы имеют размер $(2+pN) \times (2+pN)$.

Согласно (27), блоки информационной матрицы Фишера (7) имеют вид

$$(28) \quad \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{N-1} A(\vec{l}_{0k}) \begin{vmatrix} 1 & k + \mu \\ k + \mu & (k + \mu)^2 \end{vmatrix},$$

$$(29) \quad \vec{B}_\nu = -\|\vec{B}_{\nu k}\|, \quad \nu = 1, 2, \\ \vec{B}_{1k} = -\|B_i(\vec{l}_{0k})\|, \quad \vec{B}_{2k} = -\|(k + \mu)B_i(\vec{l}_{0k})\|,$$

$$(30) \quad \mathbf{D} = \|\mathbf{D}_k \delta_{kn}\|, \quad \mathbf{D}_k = \|D_{ij}(\vec{l}_{0k})\|, \quad \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \\ k, n = \overline{0, N-1}, \quad i, j = \overline{1, p}.$$

Здесь $A(\vec{l}_{0k})$, $B_i(\vec{l}_{0k})$, $D_{ij}(\vec{l}_{0k})$ определяются формулами (9) при замене в них $\vec{l}_0$ на $\vec{l}_{0k}$, т.е. на истинные значения неинформативных параметров k -го импульса последовательности (2).

Таким образом, для быстро флуктуирующей последовательности векторы $\vec{B}_\nu$ (29) содержат N блоков, каждый из которых содержит p элементов, т.е. $\vec{B}_\nu$ — числовой вектор (матрица-строка) размерностью $1 \times pN$. Матрица $\mathbf{D}$ (30) теперь является диагональной блочной матрицей размером $N \times N$, каждый блок которой, расположенный на главной диагонали, представляет собой матрицу размером $p \times p$, т.е. матрица $\mathbf{D}$ (30) — числовая матрица размером $pN \times pN$. Отдельные блоки векторов $\vec{B}_\nu$ (29) и матрицы $\mathbf{D}$ (30) с индексами k определяют характеристики совместно-эффективных оценок временного положения и p неинформативных параметров k -го импульса последовательности (2).

Аналогично (10) корреляционную матрицу совместно-эффективных оценок временного положения и периода следования быстро флуктуирующей последо-

вательности импульсов запишем как

$$(31) \quad \mathbf{K}(\vec{L}_0) = \begin{bmatrix} \sigma_\lambda^2(\vec{L}_0) & \sigma_\lambda(\vec{L}_0)\sigma_\theta(\vec{L}_0)R(\vec{L}_0) \\ \sigma_\lambda(\vec{L}_0)\sigma_\theta(\vec{L}_0)R(\vec{L}_0) & \sigma_\theta^2(\vec{L}_0) \end{bmatrix} = \mathbf{F}_L^{-1}.$$

Здесь $\sigma_\lambda^2(\vec{L}_0)$ — дисперсия совместно-эффективной оценки временного положения быстро флуктуирующей последовательности (2), $\sigma_\theta^2(\vec{L}_0)$ — дисперсия аналогичной оценки периода следования, $R(\vec{L}_0)$ — их коэффициент корреляции при наличии pN неинформативных параметров $\vec{L}$. Матрицу $\mathbf{F}_L$ в (31) аналогично (11) можно найти с помощью формулы Фробениуса [10].

Подставляя (28)–(30) в (11) и учитывая (8), получаем элементы матрицы $\mathbf{F}_L$:

$$(32) \quad F_{L11} = M_0, \quad F_{L12} = F_{L21} = M_1, \quad F_{L22} = M_2, \\ M_p = \sum_{k=0}^{N-1} (k+\mu)^p A(\vec{l}_{0k}) [1 - \rho_p(\vec{l}_{0k})],$$

где $A(\vec{l}_{0k})$ и $\rho_p(\vec{l}_{0k})$ определяются из (9) и (13) (или (22)) соответственно при замене в этих формулах $\vec{l}_0$ на $\vec{l}_{0k}$. Обращая в (31) матрицу $\mathbf{F}_L$ с элементами (32), получаем характеристики совместно-эффективных оценок λ и θ последовательности (2):

$$(33) \quad \sigma_\lambda^2(\vec{L}_0) = M_2(M_0M_2 - M_1^2)^{-1}, \quad \sigma_\theta^2(\vec{L}_0) = M_0(M_0M_2 - M_1^2)^{-1}, \\ R(\vec{L}_0) = \frac{M_1(M_0M_2 - M_1^2)^{-1/2}}{M_1(M_0M_2 - M_1^2)^{-1/2}} = M_1/(M_0M_2)^{1/2}$$

Сопоставляя (33) и (14), а также (33) и (17), видим, что наличие неинформативных параметров в общем случае приводит к увеличению дисперсий совместно-эффективных оценок временного положения и периода следования быстро флуктуирующей последовательности (2). Причем возможен проигрыш в точности оценки как по сравнению с последовательностью, не содержащей неинформативных параметров, так и по сравнению с медленно флуктуирующей последовательностью, содержащей те же неинформативные параметры.

Выражения (33) существенно упрощаются, если все неинформативные параметры являются незнергетическими [3] или истинные значения неинформативных параметров одинаковы для всех импульсов последовательности. Последнее условие соответствует случаю, когда в действительности последовательность медленно флуктуирующая, но обрабатывается как быстро флуктуирующая. Итак, полагаем в (32)

$$A(\vec{l}_{00}) = A(\vec{l}_{01}) = \dots = A(\vec{l}_{0p}) = \sigma_t^{-2}, \quad \rho_p(\vec{l}_{00}) = \rho_p(\vec{l}_{01}) = \dots \\ \dots = \rho_p(\vec{l}_{0p}) = \rho_p,$$

где σ_t^2 определяется из (15), а ρ_p — из (22). Кроме того, выберем μ согласно (18). При этом выражения (33) принимают вид

$$(34) \quad \sigma_\lambda^2(\vec{L}_0) = \sigma_t^2/N(1 - \rho_p) = \sigma_\lambda^2(\vec{l}_0) = \sigma_\lambda^2\chi_p, \quad R(\vec{L}_0) = 0, \\ \sigma_\theta^2(\vec{L}_0) = 12\sigma_t^2/N(N^2 - 1)(1 - \rho_p) = \sigma_\theta^2(\vec{l}_0)\chi_p = \sigma_\theta^2\chi_p.$$

Из сопоставления (19), (20), (21) и (34) следует, что величина χ_p (21) определяет проигрыш в точности оценки временного положения медленно и быстро флуктуирующих последовательностей по сравнению с оценкой временного положения последовательности, не содержащей неинформативных параметров. Эта же величина определяет проигрыш в точности оценки периода следования быстро флуктуирующей последовательности по сравнению с оценкой периода следования медленно флуктуирующей последовательности или последовательности, не содержащей неинформативных параметров. Величина χ_p (21) также определяет проигрыш в точности оценки периода следования медленно флуктуирую-

щей последовательности, если из-за ошибки в выборе модели эта последовательность обрабатывается как быстро флуктуирующая. Отметим, что такая ошибка в выборе модели не приводит к увеличению дисперсии эффективной оценки временного положения последовательности.

Найденные выражения для характеристик совместно-эффективных оценок (33) могут быть использованы при расчете характеристик асимптотически эффективных оценок временного положения и периода следования импульсов быстро флуктуирующей последовательности в условиях высокой апостериорной точности оценок всех $2 + pN$ неизвестных параметров. Например, выражения (33) можно использовать для расчета характеристик совместных оценок максимального правдоподобия [3], если отношения сигнал/шум

$$(35) \quad z_k^2 = 2 \int_0^T s^2(t, \vec{l}_{0k}) dt / N_0, \quad k = 0, N-1,$$

для каждого импульса последовательности достаточно велики. Сопоставляя (25) и (35), видим, что условия применимости формул (33) более жесткие по сравнению с условием (25) применимости формул (14), (17).

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-СИНУСНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Найдем характеристики совместно-эффективных оценок временного положения и периода следования импульсов вида

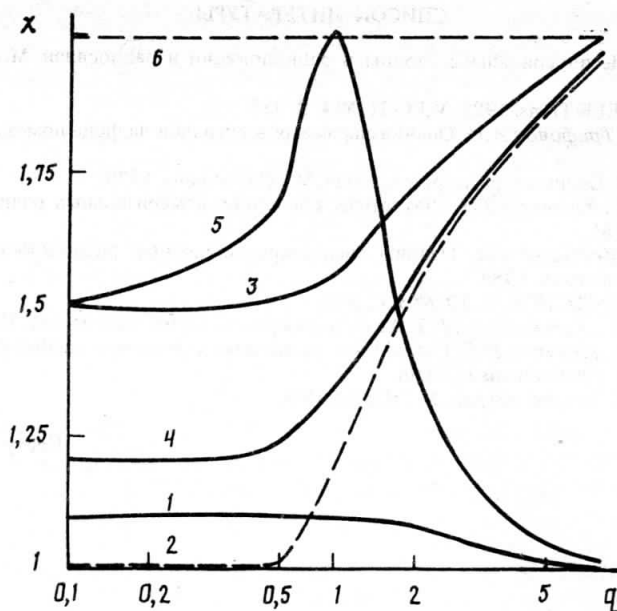
$$(36) \quad s(t) = \begin{cases} a \exp(-\alpha t) \sin \omega t, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Такие импульсы и их последовательности часто используются в качестве модели сверхширокополосных сигналов. Действительно, один из способов формирования сверхширокополосных сигналов заключается в ударном возбуждении пассивной излучающей структуры очень коротким импульсом или ступенчатым сигналом с очень коротким фронтом [6]. Частотную характеристику многих пассивных излучающих структур можно аппроксимировать характеристикой резонансного контура с малой добротностью. При этом излучаемый сверхширокополосный сигнал может быть описан формулой (36). Анализ сигнальной функции (5) для импульса (36) показывает, что при

$$(37) \quad q = \omega/\alpha \leq 10$$

наибольший ее побочный максимум имеет относительное значение не более 0,5. Будем считать, что такой уровень побочного максимума сигнальной функции достаточен для однозначного измерения временного положения импульса (36). Условие (37) требует, чтобы добротность контура, эквивалентного пассивной излучающей структуре, формирующей сверхширокополосный импульс (36), была не более 5...6. В частности, согласно [6], когда $q > 15 \dots 20$, импульс (36) уже нельзя считать сверхширокополосным.

При оценке временного положения и периода следования последовательности импульсов вида (36) каждый импульс может иметь до 3 неинформативных параметров ($p \leq 3$). На рисунке приведена зависимость проигрыша χ в точности оценки от параметра q (37) для различных наборов неинформативных параметров импульса (36). Кривые 1 и 2 иллюстрируют проигрыш в точности оценки, когда неинформативными являются соответственно соответствующие параметры α и ω импульса (36); 3 — параметры α и ω ; 4 — ω и a , 5 — α и a , 6 — α, ω, a . Сопоставление кривых позволяет определить влияние различных неинформативных параметров импульса (36) на точность эффективной оценки временного положения и пе-



Прогресс в точности оценки

риода следования импульсов (36) при медленных или быстрых флуктуациях последовательности. Согласно рисунку, наличие неинформативных параметров у импульса (36) может привести к увеличению дисперсий совместно-эффективных оценок в два раза.

Для надежных оценок максимального правдоподобия параметров последовательности экспоненциально-синусных импульсов (36) конкретизируем условия применимости формул (14), (33) и представленных кривых. По определению [3-5, 9], оценки будут надежными, если возможные значения неизвестных параметров удовлетворяют неравенствам

$$(38) \quad \begin{aligned} |\lambda - \lambda_0| &\leq 1/\alpha_0 \sqrt{1+q^2}, \quad |\theta - \theta_0| \leq \sqrt{12}/\alpha_0 \sqrt{(N^2-1)(1+q^2)}, \\ |\alpha - \alpha_0| &\leq \alpha_0 (1+q^2) \sqrt{2} (q^4 + 3q^2 + 6)^{-1/2}, \\ |\omega - \omega_0| &\leq \alpha_0 q (1+q^2) \sqrt{2} (q^6 + 3q^4 + 2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Сопоставление расчетов по формулам (14), (33) с имеющимися результатами статистического моделирования надежных оценок максимального правдоподобия на ЭВМ, а также с экспериментальными данными, приведенными в [3, 9], позволяет судить о границах применимости этих формул. Именно, формулы (14) и представленные кривые можно использовать для анализа надежных оценок параметров медленно флуктуирующей последовательности (1) импульсов (36), если отношение сигнал/шум (25) для всей последовательности

$$(39) \quad z_N \geq 3 \dots 4.$$

Формулы (33) и указанные кривые можно использовать для анализа надежных оценок параметров быстро флуктуирующей последовательности (2) импульсов (36), если отношение сигнал/шум (35) для каждого импульса

$$(40) \quad z_k \geq 3 \dots 4, \quad k = 0, N-1.$$

При выполнении (37)–(40) погрешность расчета характеристик оценок максимального правдоподобия по формулам (14), (33) не превышает 10...20% и убывает с ростом отношения сигнал/шум (25), (35).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хармут Х.Ф. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи. М.: Радио и связь, 1985.
2. Malek G.M. // IEEE Trans. 1989. V.EC-31. № 4. P. 359.
3. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
4. Фалькович С.Е. Оценка параметров сигнала. М.: Сов. радио, 1970.
5. Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н. Статистическая теория измерительных радиосистем. М.: Радио и связь, 1981.
6. Астанин Л.Ю., Костылев А.А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. М.: Радио и связь, 1989.
7. Шинаков Ю.С. // РЭ. 1974. Т. 19. № 3. С. 542.
8. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
9. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию
12.03.91