135

ISSN 0033-8486

Радиотехника

10. 92/11. 92

вблизи частоты ω_0, однако вклад их невелик из-за члена $|H(\omega)-H(\theta)|$ под интегралом (6) [1]. Входной процесс распределен равномерно в полосе частот $0,4\pi \ldots 0,6\pi$. В спектре выходного процесса возникают две отстоящие на Ω уменьшенные копии сигнальной составляющей.

- Полученные результаты позволяют учесть влияние неидеальности тактового сигнала ЦФ на характеристики выходного сигнала.

Литература

1. *Рогожкин И.Б., Черняков М.С.* Материалы конференции "Методы и микроэлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов" — Рига, 1989, 5-7 декабря.
2. *Горелов Г.В.* Нерегулярная дискретизация сигналов. — М.: Радио и связь 1982.
3. *Рогожкин И.Б., Черняков М.С.* — Материалы III научно-технической конференции молодых специалистов "Формирование, прием и обработка сигналов в системах связи". — Ростов Великий 1990, 26-30 ноября.
4. Цифровые радиоприемные системы. Справочник / Под ред. *М.И. Жодзижского.* — М.: Радио и связь 1990.

Поступила после доработки 2 июля 1991 г.

УДК 621.391

Эффективность оценки периода следования прямоугольных видеоимпульсов

А. П. Трифонов, М. Б. Беспалова

Найдена дисперсия оценки максимального правдоподобия периода следования при наличии белого шума методом локально-марковской аппроксимации.

В [1] получено аналитическое выражение для потенциальной точности оценки периода следования видеоимпульсов колокольной формы на фоне аддитивного белого шума. В то же время, во многих приложениях статистической радиотехники необходимо оценивать период повторения прямоугольных или близких к ним по форме импульсов [2—4 и др.].

Цель работы — *получение аналитических выражений для дисперсии оценки максимального правдоподобия периода следования прямоугольных видеоимпульсов на фоне белого шума.*

Пусть на интервале времени $[0,T]$ наблюдается реализация $x(t)=s(t,\Theta_0)+n(t)$ суммы полезного сигнала $s(t,\Theta_0)$ и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Полезный сигнал представляет собой последовательность из N прямоугольных видеоимпульсов

$$s(t,\Theta)=\sum_{k=0}^{N-1} s_1[t-k\Theta]=a\sum_{k=0}^{N-1} I\,[(t-k\Theta)Q/\Theta\,], \tag{1}$$

где Θ — период следования; a — амплитуда; $Q=\Theta/\tau$ — скважность,

$$\tau=\int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t)dt/\max s_1^2(t) \tag{2}$$

— эквивалентная длительность одного импульса,

$$I(x)=\begin{cases}1, & |x|<1/2,\\ 1, & |x|<1/2\end{cases}.$$

Аналогично [1] полагаем, что при изменении Θ остается постоянной Q последовательности (1).

Согласно [2, 3] для расчета дисперсии оценки максимального правдоподобия надо найти сигнальную функцию (функцию неопределенности)

$$\hat{S}(\Theta_1,\Theta_2)=2\int_0^T s(t,\Theta_1)s(t,\Theta_2)dt/N_0\,. \tag{3}$$

Положим, что интервал наблюдения больше длительности всей последовательности, т. е. $T>N\Theta$, и скважность последовательности не слишком мала ($Q\geq 2..3$) так, что отдельные импульсы последовательности не перекрываются. Тогда, подставляя (1) в (3), находим

$$\hat{S}(\Theta_1,\Theta_2)=2a^2\sum_{k=0}^{N-1} S_k(\Theta_1,\Theta_2)/N_0, \tag{4}$$

где $S_k(\Theta_1,\Theta_2)=\int_{-\infty}^{\infty} I[(t-k\Theta_1)Q/\Theta_1]I[(t-k\Theta_2)Q/\Theta_2]dt.$

Выполняя здесь интегрирование, получаем
при $k=0$

$$S_0(\Theta_1,\Theta_2)=\min(\Theta_1,\Theta_2)/Q, \tag{5}$$

при $k\geq 1$

$$S_k(\Theta_1,\Theta_2)=\max\left[(\Theta_1+\Theta_2)/2Q-k|\Theta_1-\Theta_2|,0\right]. \tag{6}$$

После подстановки (5), (6) в (4) и суммирования имеем

$$\hat{S}(\Theta_1,\Theta_2)=z_N^2 S(\Theta_1,\Theta_2), \tag{7}$$

где $z_N^2=\hat{S}(\Theta_0,\Theta_0)=Nz^2$ — отношение сигнал-шум для всей последовательности (1);

$$z^2=2a^2\Theta_0/N_0Q=2a^2\tau/N_0 \tag{8}$$

— отношение сигнал-шум для одного импульса; нормированная сигнальная функция при $|\Theta_1-\Theta_2|<(\Theta_1+\Theta_2)/QN$

$$S(\Theta_1,\Theta_2)=\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2\Theta_0}-\frac{QN(N-1)+1}{2N\Theta_0}|\Theta_1-\Theta_2|, \tag{9}$$

при $|\Theta_1-\Theta_2|>(\Theta_1+\Theta_2)/QN$

$$S(\Theta_1,\Theta_2)=\min(\Theta_1,\Theta_2)/\Theta_0\,. \tag{10}$$

Согласно (8) отношение сигнал-шум для принятого сигнала зависит от истинного значения Θ_0 оцениваемого периода следования. Поэтому параметр Θ является энергетическим [2, 3]. Для расчета характеристик оценки максимального правдоподобия энергетического параметра необходимо найти сигнальную составляющую на выходе приемника максимального правдоподобия [2]

$$S(\Theta)=S(\Theta,\Theta_0)-S(\Theta,\Theta)/2\,. \tag{11}$$

При выполнении (10) подставим в (11) нормированную сигнальную функцию (9). Тогда

$$S(\Theta)=1/2-[QN(N-1)+1]|\Theta-\Theta_0|(2\Theta_0N)^{-1}. \tag{12}$$

Как следует из (9) и (12) у сигнальных функции и составляющей не существует второй производной при $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta = \Theta_0$. Следовательно, сигнал (1) является разрывным по параметру Θ. Найдем дисперсию оценки максимального правдоподобия периода следования с помощью метода локально-марковской аппроксимации [2]

$$D_Q(\Theta) = 26\Theta_0^2 / z_N^4 [QN(N-1)+1]^2 . \tag{13}$$

Сравнивая (13) с выражением для дисперсии оценки периода следования последовательности колокольных импульсов из [1], видим, что с ростом N в (1) дисперсия оценки (13) убывает как N^{-4}. В то же время дисперсия оценки периода следования колокольных импульсов убывает лишь как N^{-3}.

Выражение (13) справедливо при постоянной Q последовательности (1). Однако в ряде задач представляет интерес оценка периода следования прямоугольных импульсов с постоянной длительностью

$$s(t,\Theta) = a\sum_{k=0}^{N-1} I\,[(t-k\Theta)/\tau], \tag{14}$$

где τ определяется (2).

Для расчета характеристик оценки максимального правдоподобия периода Θ следования импульсов последовательности (14) найдем сигнальную функцию (4), куда подставим $S_k(\Theta_1,\Theta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} I[(t-k\Theta_1)/\tau]\,I[(t-k\Theta_2)/\tau]\,dt$.

После интегрирования имеем

$$S_k(\Theta_1,\Theta_2) = \max[\tau - k|\Theta_1-\Theta_2|, 0]. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), приходим к (7), где

$$S(\Theta_1,\Theta_2) = 1 - |\Theta_1-\Theta_2|(N-1)(2\tau)^{-1} \text{ при } |\Theta_1-\Theta_2| < 2\tau/(N-1), \tag{16}$$

$$S(\Theta_1,\Theta_2) = 0 \text{ при } |\Theta_1-\Theta_2| > 2\tau/(N-1). \tag{17}$$

Если выполняется (17), то (11) для последовательности с постоянной длительностью импульсов принимает вид

$$S(\Theta) = 1/2 - (N-1)\,|\Theta-\Theta_0|(2\tau)^{-1}. \tag{18}$$

Согласно (15), (16), (18) Θ последовательности с постоянной длительностью импульсов является неэнергетическим параметром [2, 3], но по-прежнему функции (16), (18) не имеют второй производной при $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta = \Theta_0$. Поэтому, опять используя метод локально-марковской аппроксимации [2], следует найти дисперсию оценки максимального правдоподобия при постоянной длительности

$$D_\tau(\Theta) = 26\tau^2 / [z_N^4 (N-1)^2]. \tag{19}$$

Выражения (13), (19) приближенные [2], однако их точность возрастает с увеличением отношения сигнал-шум z_N для всей последовательности импульсов (1) или (14). Сопоставим сигнальные составляющие (12), (18) с аналогичными выражениями из [2, 5], описывающими сигнальные составляющие при оценке времени прихода и длительности прямоугольного импульса на фоне белого шума. Видим, что сигнальные составляющие, которые полностью определяют свойства оценок максимального правдоподобия, здесь и в

[2, 5], имеют одинаковую форму, отличаясь лишь параметрами. В [2, 5] расчеты по асимптотическим формулам вида (13), (19) сравнивались с расчетами по точным формулам и с результатами статистического моделирования оценок максимального правдоподобия на ЭВМ. Сравнение показало, что уже при $z_N \geq 4 \ldots 6$, относительная погрешность (13), (19) не превосходит 15...5%, когда оценка максимального правдоподобия надежная [2]. Последнее выполняется, если возможные значения периода следования удовлетворяют (10) для последовательности (1) или (17) для последовательности (14). Если $Q > 3 \ldots 4$, , а $N > 2 \ldots 3$, то (13), (19) упрощаются

$$D_Q(\Theta) \sim D_\tau(\Theta) = D(\Theta) = 26\tau^2 / z_N^4 (N-1)^2 = 26\tau^2 / [z^4 N^2 (N-1)^2]. \tag{20}$$

Следовательно, когда Q и N не слишком малы, $D_Q(\Theta)$ практически одинакова для последовательностей (1) и (14).

В то же время при малых значениях Q и N $D_Q(\Theta)$ меньше, чем $D_\tau(\Theta)$.. Действительно, из (13) и (19) имеем $D_\tau(\Theta)/D_\Theta(\Theta) = [1 + 1/N(N-1)Q]^2 \geq 1$.
В частности, при постоянной Q оценка периода следования оказывается возможной даже для вырожденной последовательности, состоящей из одного импульса($N=1$). Это объясняется тем, что при постоянной Q длительность каждого импульса последовательности (1) зависит от неизвестного периода следования Θ . При постоянной длительности импульсов необходимо иметь не менее двух импульсов ($N=2$) в последовательности (14) для получения оценки периода следования.
Как уже отмечалось, скорость убывания дисперсии оценки периода следования прямоугольных импульсов с ростом N выше, чем для колокольных. Обозначим $\sigma^2(\Theta)$ — дисперсия оценки периода следования колокольных импульсов с такими же энергией, амплитудой и скважностью, как и прямоугольных (1). Используя результаты [1] и (20), находим

$$\chi = \sigma^2(\Theta)/D(\Theta) = 6 z_N^2 (N-1)/13\pi(2N-1). \tag{21}$$

Очевидно, $\chi > 1$, когда

$$z_N > \sqrt{13\pi(2N-1)/6(N-1)}. \tag{22}$$

Следовательно, при выполнении (22) точность оценки периода следования выше для прямоугольных импульсов, чем для колокольных. Причем выигрыш в точности оценки растет с увеличением z_N^2. Однако, этот выигрыш не может неограниченно возрастать с увеличением z_N^2 или N в последовательности. Действительно, реальные импульсы всегда обладают фронтами конечной длительности. Поэтому прямоугольная форма при больших z_N^2 может оказаться слишком грубой аппроксимацией реального импульса.
Для определения верхней границы выигрыша в точности оценки (21) рассмотрим последовательность квазипрямоугольных импульсов [4]

$$s_1(t) = \begin{cases} \exp[-\frac{\pi}{2\delta^2}(\frac{t}{\tau} - \frac{1-\delta}{2})^2], & \frac{t}{\tau} \geq \frac{1-\delta}{2} \\ 1, & \frac{|t|}{\tau} < \frac{1-\delta}{2} \\ \exp[-\frac{\pi}{2\delta^2}(\frac{t}{\tau} + \frac{1-\delta}{2})^2], & \frac{t}{\tau} \leq -\frac{1-\delta}{2}, \end{cases} \tag{23}$$

где $\delta \leq 1$ — относительная доля полной энергии импульса (23), сосредоточенная в его фронтах. В частности, при $\delta = 1$ квазипрямоугольный импульс принимает колокольную форму, при $\delta \to 0$ он переходит в прямоугольный импульс.

Используя формулу Крамера-Рао [2, 3], аналогично [1], для дисперсии эффективной оценки периода следования квазипрямоугольных импульсов (23) имеем

$$D_q(\Theta)=12\delta\tau^2/[\pi z_N^2(2N-1)(N-1)] \ . \tag{24}$$

Применительно к оценке максимального правдоподобия (24) верна лишь асимптотически — с ростом z_N^2. Причем, чем меньше δ, тем при больших z_N^2 (24) начинает удовлетворительно описывать дисперсию оценки максимального правдоподобия [2,3]. Поэтому, если $\delta << 1$, а z_N^2 не слишком велико, более точной может оказатъся (20), полученная методом локально-марковской аппроксимации.

Как показано в [2], при малой длительности фронтов реального импульса применение прямоугольной и квазипрямоугольной аппроксимаций позволяет получить

$$D_\Theta=\max\,[D(\Theta),D_q(\Theta)]. \tag{25}$$

Это выражение справедливо при равных амплитудах, энергиях и длительностях прямоугольной и квазипрямоугольной аппроксимаций импульса.

Определим выигрыш в точности оценки периода следования квазипрямоугольных импульсов по сравнению с колокольными как $\chi_\Theta=\sigma^2(\Theta)/D_\Theta$. Используя (20), (24), (25) и результаты [1], получаем

$$\chi_\Theta=\begin{cases}\dfrac{6z_N^2(N-1)}{13\pi(2N-1)}, & z_N\le\sqrt{\dfrac{13\pi(2N-1)}{6\delta(N-1)}}\ ,\\[2ex] \dfrac{1}{\delta}, & z_N>\sqrt{\dfrac{13\pi(2N-1)}{6\delta(N-1)}}\ .\end{cases} \tag{26}$$

Согласно (26), если z_N фиксировано, то не следует уменьшать относительную длительность фронтов квазипрямоугольного импульса (23) менее величины $\delta_{\min}=13\pi(2N-1)\,[6z_N^2(N-1)]^{-1}$. С другой стороны, если δ фиксирована, то не следует увеличивать $z_{N\max}=\sqrt{13\pi(2N-1)/6\delta(N-1)}$. Действительно, выбор $\delta<\delta_{\min}$ при заданном z_N^2 не увеличивает выигрыша (26) в точности оценки. Аналогично, выбор $z_N>z_{N\max}$ при заданном δ так же не увеличивает выигрыша в точности оценки по сравнению с последовательностью колокольных импульсов.

- Сформулированы рекомендации по выбору параметров квазипрямоугольных импульсов, обеспечивающих выигрыш в точности оценки периода следования по сравнению с колокольными импульсами.

Литература

1. *Волков А. В.* — Радиотехника, 1990, № 1.
2. *Трифонов А. П., Шинсков Ю. С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986.
3. *Фалькович С. Е., Хомяков Э. Н.* Статистическая теория измерительных радиосистем. — М.: Радио и связь, 1981.
4. *Ярлыков М. С.* Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1980.
5. *Трифонов А. П., Бутейко В. К.* — Радиотехника и электроника, 1989, № 11.

Поступила после доработки 12 августа 1991 г.