141

141

ISSN 0033-8486

Радиотехника

3 | 94

УДК 621.396

Эффективность оценки периода следования импульсов с неизвестными амплитудами

А.П.Трифонов, М.Б.Беспалова

Определена точность оценок максимального правдоподобия периода следования видеоимпульсов с неизвестными амплитудами на фоне белого шума; найден проигрыш в точности оценок из-за незнания амплитуд импульсов.

Последовательности импульсов находят широкое применение в радиотехнике [1– 5]. В [1,2] найдена эффективность оценок периода следования импульсов с априори известными одинаковыми амплитудами. Однако в реальных условиях, в частности из-за наличия модулирующих (мультипликативных) помех [5,6], амплитуды импульсов на выходе канала передачи информации могут быть неизвестны.

Ц е л ь р а б о т ы – *получить аналитические выражения для дисперсий оценок максимального правдоподобия (ОМП) периода следования импульсов с априори неизвестными амплитудами на фоне аддитивного белого шума.*

Пусть на интервале времени $[0, T]$ наблюдается реализация $x(t) = s(t, \Theta_0, a_{ok}) + n(t)$ суммы полезного сигнала $s(t, \Theta_0, a_{ok})$ и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Полезный сигнал представляет собой последовательность из N импульсов

$$s(t, \Theta, a_k) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k(t, \Theta) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k f\,[Q(t - k\Theta)/\Theta]. \tag{1}$$

где a_k– неизвестная амплитуда k-го импульса, Θ – период следования, $Q = \Theta/\tau$ – скважность,

$$\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_k^2(t)\, dt\, [\max s_k^2(t)]^{-1} \tag{2}$$

– эквивалентная длительность одного импульса последовательности.

Дифференцируемая функция $f(\cdot)$ в (1) описывает форму одного импульса последовательности и нормирована так, что

$$\max f(x) = 1\,,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx = 1\,. \tag{3}$$

Аналогично [1,2] считаем, что при изменении периода следования скважность Q последовательности (1) остается постоянной.

Положим, что интервал наблюдения больше длительности всей последовательности, т.е. $T > N\Theta$, и скважность последовательности (1) не слишком мала ($Q > 2 \ldots 3$) так, что отдельные импульсы последовательности не перекрываются. Тогда логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) запишется как [3,4]

$$L(\Theta, a_k) = 2\sum_{k=0}^{N-1} a_k\,[L_k(\Theta) - \Theta a_k/2Q]/N_0\,, \tag{4}$$

$$L_k(\Theta) = \int_0^T x(t) f\,[Q(t - k\Theta)/\Theta]\, dt\,.$$

Чтобы исключить влияние неизвестных амплитуд импульсов последовательности (1), надо заменить их неизвестные значения на ОМП [3]. Максимизируя с этой целью (4) по всем a_k, $k = \overline{0, N-1}$, имеем

$$L(\Theta) = \max_{a_k} L(\Theta, a_k) = Q \sum_{k=0}^{N-1} L_k^2(\Theta) / N_0 \Theta . \qquad (5)$$

В результате ОМП периода следования $\hat{\Theta}$ определяется как положение абсолютного (наибольшего) максимума функционала (5)

$$\hat{\Theta} = \arg \sup L(\Theta) . \qquad (6)$$

Чтобы найти характеристики ОМП (6), представим (5) в виде суммы сигнальной и шумовой функций [3]

$$L(\Theta) = S(\Theta) + N(\Theta) + N/2 , \qquad (7)$$

$$S(\Theta) = \langle L(\Theta) \rangle - N/2 = Q \sum_{k=0}^{N-1} a_{0k}^2 S_k^2(\Theta, \Theta_0)/\Theta N_0 , \qquad (8)$$

$$S_k(\Theta_1, \Theta_2) = \int_0^T f[Q(t - k\Theta_1)/\Theta_1] f[Q(t - k\Theta_2)/\Theta_2] \, dt . \qquad (9)$$

Шумовая функция $N(\Theta) = L(\Theta) - \langle L(\Theta) \rangle$ является реализацией случайного процесса, первые два момента которого

$$\langle N(\Theta) \rangle 0 , B(\Theta_1, \Theta_2) = \langle N(\Theta_1) N(\Theta_2) \rangle = Q^2 \sum_{k=0}^{N-1} S_k(\Theta_1, \Theta_2) \times$$

$$\times [S_k(\Theta_1, \Theta_2) + 4 a_{0k}^2 S_k(\Theta_0, \Theta_1) S_k(\Theta_0, \Theta_2)]/2 \Theta_1 \Theta_2 . \qquad (10)$$

Поскольку сигнальная функция (8) достигает максимума при $\Theta = \Theta_0$, выходное отношение сигнал-шум (ОСШ) [3,4]

$$z^2 = S^2(\Theta_0)/B(\Theta_0, \Theta_0) = N z_m^4 / 2(1 + 2 z_m^2) , \qquad (11)$$

где $$z_m^2 = \sum_{k=0}^{N-1} z_k^2 / N \qquad (12)$$

– среднее ОСШ для одного импульса, а

$$z_k^2 = 2 a_{0k}^2 \Theta_0 / N_0 Q \qquad (13)$$

– ОСШ для k-го импульса принятой последовательности.

Согласно (13), выходное ОСШ (11) зависит от истинного значения периода следования импульсов Θ_0. Следовательно, при постоянной скважности период следования является энергетическим параметром [3]. Отметим также, что выходное ОСШ (11) существенно зависит от среднего ОСШ для одного импульса (12). Так, при $z_m^2 >> 1$ $z^2 \approx N z_m^2/4$, а при $z_m^2 < 1$

$$z^2 \approx N z_m^4 / 2 . \qquad (14)$$

Полагаем далее, что выходное ОСШ (11) достаточно велико при любых z_m^2 (12), так что ОМП (6) обладает высокой апостериорной точностью. Тогда, решая уравнение правдоподобия методом малого параметра, находим, что ОМП (6) несмещенная и обладает дисперсией [3]

$$D(\hat{\Theta}) = \left\{ \frac{\partial^2 B(\Theta_1, \Theta_2)}{\partial \Theta_1 \partial \Theta_2} \left[\frac{d^2 S(\Theta)}{d\Theta^2} \right]^{-2} \right\}_{\Theta_0} . \qquad (15)$$

Подставляя сюда (8), (10) и выполняя дифференцирование, находим дисперсию ОМП периода следования импульсов с неизвестными амплитудами

$$D_Q = \frac{\Theta_0^2}{N z_m^2 (\beta - 1/4 + 2\gamma Q M_1 + \alpha Q^2 M_2)} [1 + (\beta - 1/4 + 2\gamma Q H_1 +$$

$$+ \alpha Q^2 H_2) / \left\{ z_m^2 (\beta - 1/4 + 2\gamma Q M_1 + \alpha Q^2 M_2) \right\}] , \qquad (16)$$

где

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} [df(x)/dx]^2 dx , \beta = \int_{-\infty}^{\infty} [x\, df(x)/dx]^2 dx ,$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} x [df(x)/dx]^2 dx , \ H_n = \sum_{k=0}^{N-1} k^n / N ,$$

$$M_n = \sum_{k=0}^{N-1} k^n P_k , P_k = z_k^n / \sum_{k=0}^{N-1} z_k^2 \qquad (17)$$

и характеризует распределение суммарной энергии принятой последовательности по ее отдельным импульсам.

Для сравнения найдем характеристики ОМП периода следования импульсов с различными, но априори известными амплитудами. С этой целью заменим в (4) неизвестные амплитуды a_k на их истинные значения a_{0k} в принятой последовательности. Выделим затем, аналогично (7), сигнальную составляющую

$$S_0(\Theta) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} a_{0k}^2 [S_k(\Theta, \Theta_0) - \Theta/2Q]/N_0 . \qquad (18)$$

Согласно [3,4] дисперсия ОМП периода следования импульсов с априори известными амплитудами определяется выражением

$$D_{0Q} = - [d^2 S(\Theta) / d\Theta^2]_{\Theta_0}^{-1} . \qquad (19)$$

Подставляя (18) в (19) и выполняя дифференцирование, находим

$$D_{0Q} = \Theta_0^2 / N z_m^2 (\beta + 2\gamma Q M_1 + \alpha Q^2 M_2) . \qquad (20)$$

Полагая здесь амплитуды всех импульсов одинаковыми, приходим к выражению $D_{0QR} = \Theta_0^2 / N z_m^2 (\beta + 2\gamma Q H_1 + \alpha Q^2 H_2)$, которое совпадает с полученным в [2]. Выбрав к тому же форму импульса в виде гауссовской кривой, имеем как частный случай результат [1]. Из сравнения (16) и (20) следует, что в общем случае незнание амплитуд импульсов снижает точность ОМП периода следования. Ухудшение точности оценки периода можно охарактеризовать отношением

$$\chi_0 = \frac{D_Q}{D_{0Q}} = \frac{1}{1 - A} \left[1 + \frac{\chi_R - A}{z_m^2 (1 - A)} \right] \geq 1 , \qquad (21)$$

где $A = D_0(\hat{\Theta}) / 4 N z_m^2 \Theta_0^2 = (\beta + 2\gamma Q M_1 + \alpha Q^2 M_2)^{-1} / 4 > 0$,

$\chi_R = D_{0QR} / D_{0Q} > 0$.

Согласно (21) проигрыш в точности ОМП периода следования импульсов из-за незнания их амплитуд существенно зависит от величины среднего ОСШ для одного импульса (12). Причем этот проигрыш убывает с ростом среднего ОСШ и при

$$z_m^2 >> 1 \tag{22}$$

будет равен

$$\chi_0 \approx [1 - (\beta + 2\gamma Q M_1 + \alpha Q^2 M_2)^{-1}/4]. \tag{23}$$

В свою очередь, проигрыш в точности ОМП периода следования (23) убывает с ростом числа импульсов N и скважности Q. Следовательно, при выполнении (22) максимальный проигрыш в точности ОМП периода следования будет иметь место для вырожденной последовательности, состоящей из одного импульса ($N = 1$) $\chi_{01} = (1 - 1/4\beta)^{-1}$. Этот предельный проигрыш зависит только от вида функции описывающей форму импульса. Найденные выражения для дисперсии ОМП периода следования импульсов с неизвестными амплитудами справедливы при постоянной скважности Q последовательности (1). Однако в ряде задач [2-5] представляет интерес оценка периода следования импульсов с неизвестными амплитудами и постоянной длительностью вида

$$s(t, \Theta, a_k) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k f\ [(T - k\Theta)/\tau\ ], \tag{24}$$

где эквивалентная длительность одного импульса τ определяется (2).

Для последовательности (24), принимаемой на фоне аддитивного гауссовского белого шума, логарифм ФОП запишется как [3,4]

$$L_\tau(\Theta, a_k) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} a_k\ [L_{\tau k}(\Theta) - \tau a_k/2\ ]/N_0, \tag{25}$$

$$L_{\tau k}\Theta) = \int_0^T x(t) f\ [(t - k\Theta)/\tau\ ]dt.$$

Максимизируя (25) по всем a_k, $k = \overline{0, N-1}$, аналогично (5) получаем

$$L_\tau(\Theta) = \max_{a_k} L_\tau(\Theta, a_k) = \sum_{k=0}^{N-1} L^2_{\tau k}(\Theta)/\tau N_0. \tag{26}$$

Теперь ОМП периода следования определяется как положение абсолютного максимума (26). Аналогично (7) представим (26) в виде суммы сигнальной и шумовой функций [3]

$$L_\tau(\Theta) = S_\tau(\Theta) + N_\tau(\Theta) + N/2,$$

$$S_\tau(\Theta) = < L_\tau(\Theta) > - N/2 = \sum_{k=0}^{N-1} a^2_{0k} S^2_{\tau k}(\Theta, \Theta_0)(\tau N_0)^{-1}, \tag{27}$$

$$S_{\tau k}(\Theta_1, \Theta_2) = \int_0^T f\ [(t - k\Theta_1)/\tau\ ] f\ [(t - k\Theta_2)/\tau\ ]dt. \tag{28}$$

Шумовая функция $N_\tau(\Theta) = L_\tau(\theta) - < L_\tau(\Theta) >$ обладает двумя первыми моментами: $< N_\tau(\Theta) > = 0$,

$$B_\tau(\Theta_1,\Theta_2) = \langle N_\tau(\Theta_1) N_\tau(\Theta_2) \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} S_{\tau k}(\Theta_1,\Theta_2) \, [\, S_{\tau k}(\Theta_1,\Theta_2) +$$

$$+ 4 a_{0k}^2 S_{\tau k}(\Theta_0,\Theta_1) S_{\tau k}(\Theta_0,\Theta_2)/N_0 \,]/2\tau^2 . \qquad (29)$$

Учитывая известные свойства [3] сигнальной функции (28) для одного импульса, получаем, что сигнальная функция (27) для всей последовательности (24) достигает максимума при $\Theta = \Theta_0$ и зависит только от $|\Theta - \Theta_0|$. Следовательно, выходное ОСШ и среднее ОСШ для одного импульса последовательности (24) определяются формулами (11) и (12) соответственно. Достаточно в этих формулах заменить ОСШ для k-го импульса (13) на величину $z_k^2 = 2 a_{0k}^2 \tau/N_0$. Отсюда и из (11),(12) видно, что ОСШ для последовательности (24) не зависит от истинного значения периода следования импульса Θ_0, т.е. период следования импульсов с постоянной длительностью является неэнергетическим параметром [3].

Подставляя (27), (29) в (15) и выполняя дифференцирование, находим дисперсию ОМП периода следования импульсов с неизвестными амплитудами и постоянной длительностью

$$D_\tau = \frac{\tau^2}{\alpha N z_m^2 M_2} \left[1 + H_2/z_m^2 M_2\right] . \qquad (30)$$

Для сравнения найдем дисперсию ОМП периода следования импульсов с различными, но априори известными амплитудами и постоянной длительностью. С этой целью заменим в (25) неизвестные амплитуды a_k на их истинные значения a_{0k} в принятой последовательности. Выделим затем аналогично (7), (27) сигнальную составляющую

$$S_{0\tau}(\Theta) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} a_{0k}^2 \, [\, S_{\tau k}(\Theta,\Theta_0) - \tau/2 \,]/N_0 . \qquad (31)$$

Подставляя (31) в (19) и выполняя дифференцирование, находим дисперсию ОМП периода следования с известными амплитудами и постоянной длительностью

$$D_{0\tau} = \tau^2/\alpha N z_m^2 M_2 . \qquad (32)$$

Полагая здесь амплитуды всех импульсов одинаковыми, приходим к выражению $D_{0\tau R} = \tau^2/\alpha N z_m^2 H_2$, которое совпадает с полученным в [2].

Из сравнения (30) и (32) следует, что в общем случае незнание амплитуд импульсов снижает точность ОМП периода следования при постоянной длительности импульсов. Ухудшение точности оценки периода можно охарактеризовать отношением

$$\chi_{0\tau} = D_\tau/D_{0\tau} = 1 + \chi_{\tau R}/z_m^2 , \qquad (33)$$

где $\chi_{\tau R} = D_{0\tau R}/D_{0\tau}$.

Согласно (33) проигрыш в точности ОМП периода следования импульсов с постоянной длительностью из-за незнания их амплитуд существенно зависит от величины среднего ОСШ для одного импульса (12). Причем этот проигрыш убывает с ростом среднего ОСШ и при выполнении (22) практически отсутствует.

Если скважность последовательностей (1) или (24) $Q > 3 \ldots 4$, а число импульсов в них $N > 3 \ldots 4$, то формулы (16), (20), (30), (32) несколько упрощаются и принимают вид

$$D_Q \approx D_\tau = D = \tau^2 (1 + H_2/z_m^2 M_2)/\alpha N z_m^2 M_2, \tag{34}$$

$$D_{0Q} \approx D_{0\tau} = D_0 = \tau^2/\alpha N z_m^2 M_2. \tag{35}$$

Следовательно, если скважность и число импульсов последовательности не слишком малы, точность ОМП периода следования практически одинакова для последовательностей с постоянными скважностью (1) и длительностью импульса (24).

Согласно (34) и (35), при малых значениях среднего ОСШ для одного импульса (12), когда выходное ОСШ определяется формулой (14), проигрыш в точности ОМП периода следования импульсов из-за незнания их амплитуд может быть значительным. Кроме того, из сопоставления (34) и (35) следует, что проигрыш в точности оценки периода следования зависит также от распределения суммарной энергии принятой последовательности по отдельным импульсам, которое характеризуется величинами (17).

● Незнание амплитуд импульсов может привести к существенному проигрышу в точности оценки периода следования, который возрастает с уменьшением среднего отношения сигнал-шум для одного импульса последовательности и практически не зависит от формы импульса.

Литература

1. *Волков А.В.* – Радиотехника, 1990, № 1.
2. *Трифонов А.П., Беспалова М.Б.* – Радиотехника, 1991, № 5.
3. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. – М.: Сов.радио, 1978.
4. *Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н.* Статистическая теория измерительных радиосистем. – М.: Радио и связь, 1981.
5. *Кремер И.Я., Владимиров В.И., Карпухин В.И.* Модулирующие помехи и прием радиосигналов. – М.: Сов.радио, 1972.
6. *Васильев К.К.* Прием сигналов при мультипликативных помехах. – Саратов: Изд. СГУ, 1983.

Поступила после доработки 22 декабря 1992 года

УДК 621.396

Алгоритм обработки измерительной информации при исследовании локальных радиолокационных характеристик рассеяния объектов

С.Е.Просыпкин, А.А.Костылев

Рассмотрен алгоритм оценивания распределения рассеянного поля на поверхности отражателя по результатам измерений поля в зоне Френеля.

При исследовании отражающих свойств объектов возникает задача определения вклада каждого участка поверхности в суммарное поле рассеяния. В частности, требуется по измеренному полю рассеяния в зоне Френеля объекта определить поле рассеяния на его поверхности. Эта задача относится к классу некорректных обратных задач и требует использования методов ре-