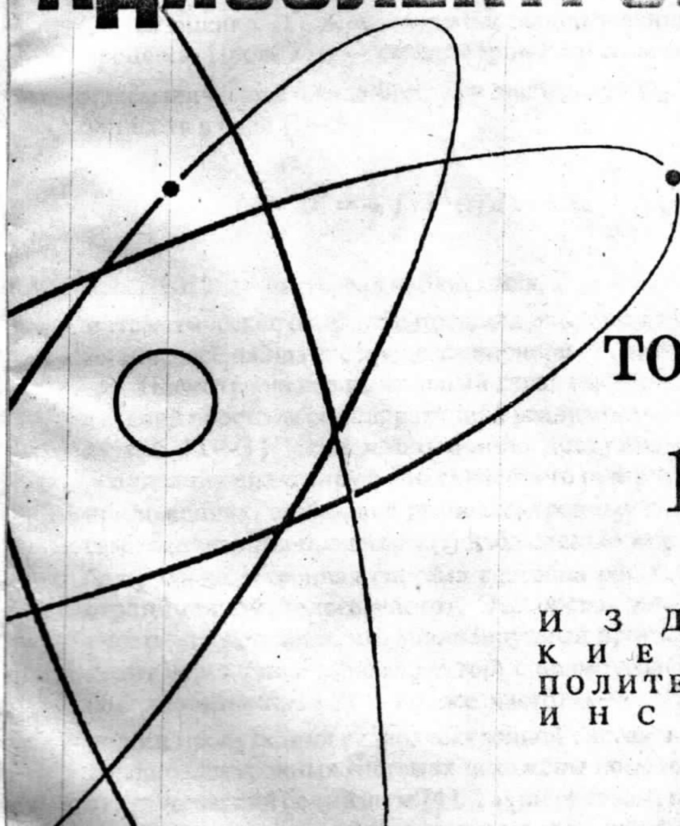
ISSN 0021 — 3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА



ТОМ 37

11-12

ИЗДАНИЕ
КИЕВСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

1994

УДК 621.391

ТРИФОНОВ А. П., АЛЕКСЕЕНКО С. П.

КВАЗИПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ СТАЦИОНАРНОГО ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Найдены структура и характеристики квазиправдоподобного измерителя дисперсии, адаптирующегося к помехе с неизвестной мощностью.

Задача оценки дисперсии D стационарного случайного процесса рассматривается в ряде работ [1—3 и др.]. При этом наиболее часто реализуется оценка D^*, основанная на использовании эргодических свойств процесса. Пусть $s(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием a_0 и дисперсией D_0. Тогда оценку D^* можно записать в виде [1—3]

$$D^* = \frac{1}{T}\int_0^T \widetilde{s}^2(t)\,dt - \left[\frac{c}{T}\int_0^T \widetilde{s}(t)\,dt\right]^2. \tag{1}$$

Здесь $[0; T]$ — интервал наблюдения, $\widetilde{s}(t) = s(t) - (1-c)\,a_0$, $c = 0$ если математическое ожидание процесса априори известно и $c = 1$, если математическое ожидание процесса априори неизвестно.

Несмотря на неоптимальный характер оценки (1), она в силу относительной простоты ее аппаратурной реализации часто оказывается приемлемой [1—3], если наблюдению доступна непосредственно сама реализация анализируемого случайного процесса $s(t)$. Однако во многих приложениях, особенно в радиоэлектронных системах, непосредственно сама реализация процесса $s(t)$ наблюдению недоступна. Во-первых, любая радиоэлектронная система способна обрабатывать сигналы лишь в ограниченной полосе частот. Это обстоятельство можно формально учесть, предполагая, что анализируемый процесс $s(t)$ до обработки проходит через фильтр (преселектор) с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой в полосе частот $[-\omega_m/2; \omega_m/2]$. Здесь ω_m — полоса пропускания радиоэлектронной системы. Во-вторых, все сигналы в радиоэлектронных системах искажены помехой. В простейшем случае это гауссовский белый шум [4]. Таким образом, при измерении дисперсии стационарного случайного процесса в радиоэлектронных системах, наблюдению оказывается доступна реализация профильтрованной входным преселектором суммы

$$x(t) = s(t) + \widetilde{\nu}(t), \tag{2}$$

где $\tilde{\nu}(t)$ — гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью γ_0. В результате оценка дисперсии D^* опять определяется формулой (1), где теперь

$$\tilde{s}(t) = y_1(t) - (1 - c)\, a_0, \tag{3}$$

а $y_1(t)$ — отклик фильтра (преселектора) с передаточной функцией (ПФ)

$$|H_1(j\omega)|^2 = I(\omega / \omega_m), \tag{4}$$

на реализацию наблюдаемых данных $x(t)$ (2); $I(x) = 1$ при $|x| \le 1/2$ и $I(x) = 0$ при $|x| > 1/2$ — индикатор единичной длительности.

Найдем характеристики оценки D^* с учетом наличия преселектора и воздействия помехи. Подставляя в (1) профильтрованную сумму (2), учитывая (3) и выполняя усреднение, получаем для смещения (систематической ошибки) и рассеяния (среднего квадрата ошибки) оценки (1) выражения

$$b(D^* \mid D_0) = \mathrm{M}\{D^* - D_0\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\omega_m/2} \left[G_s(\omega) + \frac{\gamma_0}{2} \right] d\omega - \frac{c}{T} \left[G_s(0) + \frac{\gamma_0}{2} \right] - D_0, \tag{5}$$

$$V(D^* \mid D_0) = \mathrm{M}\{(D^* - D_0)^2\} = b^2(D^* \mid D_0) +$$

$$+ \frac{2}{T\pi} \int\limits_0^{\omega_m/2} \left[G_s(\omega) + \frac{\gamma_0}{2} \right]^2 d\omega - \frac{c}{T^2} \left[G_s(0) + \frac{\gamma_0}{2} \right]^2. \tag{6}$$

Здесь $\mathrm{M}\{\cdot\}$ — означает усреднение, а $G_s(\omega)$ — спектр мощности анализируемого случайного процесса $s(t)$. При выполнении усреднения в (5) и (6) предполагалось, что время наблюдения T существенно превышает время корреляции случайного процесса $s(t)$.

Представим спектр мощности анализируемого процесса в виде

$$G_s(\omega) = 2\pi D_0\, g(\omega / \Omega) / \Omega. \tag{7}$$

Здесь Ω — эффективная полоса частот, определяемая формулой

$$\Omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_s(\omega)\, d\omega \,/ \max G_s(\omega),$$

функция $g(x) = g(-x)$ описывает форму спектра мощности процесса, и нормирована так, что $\max g(x) = 1$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1$. Тогда выражения (5), (6) перепишутся как

$$b(D^* \mid D_0) = D_0\,[2\int\limits_0^{k/2} g(x)\,dx + q\,k - 1 - \frac{c}{2\mu}(1+q)\,], \tag{8}$$

$$V(D^* \mid D_0) = b^2(D^* \mid D_0) + \frac{D_0^2}{\mu}\,\{2\int\limits_0^{k/2} (g(x)+q)^2\,dx - \frac{c}{4\mu}(1+q)^2\}. \tag{9}$$

Здесь $\mu = T\,\Omega\,/\,4\pi$, $k = \omega_m\,/\,\Omega$, $q = \gamma_0\,\Omega\,/\,4\pi\,D_0$ — отношение средней мощности помехи в эффективной полосе частот анализируемого процесса к средней мощности самого процесса.

Полагая в (8), (9) $q = 0$ и устремляя $k \to \infty$, получаем известные выражения [1—3] для смещения и рассеяния оценки дисперсии (1) в отсутствии преселектора и в пренебрежении воздействием помехи. Так при $c = 0$ (математическое ожидание процесса априори известно) имеем [1—3]

$$b_0(D^* \mid D_0) = 0,\; V_0(D^* \mid D_0) = 2\,D_0^2 \int\limits_0^{+\infty} g^2(x)\,dx\,/\,\mu. \tag{10}$$

Для того, чтобы определить проигрыш в точности оценки дисперсии из-за наличия преселектора и воздействия помехи, рассмотрим два, часто встречающихся в приложениях, конкретных примера.

1. Случайный процесс с прямоугольной формой спектра мощности. В этом случае

$$g(x) = I(x) \tag{11}$$

и при $c = 0$ формулы (8), (9), (10) принимают вид $b_1(D^* \mid D_0) = D_0\,q\,k$, $V_1(D^* \mid D_0) = D_0^2\,[q^2 k^2 + \frac{1}{\mu}(1 + 2\,q + q^2 k)\,]$, $V_{01}(D^* \mid D_0) = D_0^2/\mu$.

2. Случайный процесс со спектром мощности Лоренца (экспоненциально-коррелированный случайный процесс). В этом случае

$$g(x) = [1 + (\pi\,x)^2\,]^{-1} \tag{12}$$

и при $c = 0$ формулы (8), (9), (10) принимают вид

$$b_2(D^* \mid D_0) = D_0\left[\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 + q\,k\right],$$

$$V_2(D^* \mid D_0) = b_2^2(D^* \mid D_0) +$$

$$+ \frac{D_0^2}{\mu} \left\{ q^2 k + \frac{1}{\pi}(4q+1)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{k}{2}\left[1 + \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2\right]^{-1} \right\},$$

$$V_{02}(D^* \mid D_0) = D_0^2 / 2\mu.$$

Проигрыш в точности оценки дисперсии из-за наличия преселектора и воздействия помехи будем характеризовать отношением $\chi_i = V_i(D^* \mid D_0) / V_{0i}(D^* \mid D_0)$, где $i = 1$ для процесса со спектром мощности (11), и $i = 2$ — для процесса со спектром мощности (12).

На рис. 1 сплошными линиями нанесены зависимости $\chi_1(k)$ и штриховыми линиями — зависимости $\chi_2(k)$. Кривые *1* соответствуют значениям $q = 0{,}1$; *2* — 0,5; *3* — 1; *4* — 2. Для всех кривых $\mu = 100$. Видно что с увеличением уровня шума проигрыш в точности оценки (1) существенно возрастает.

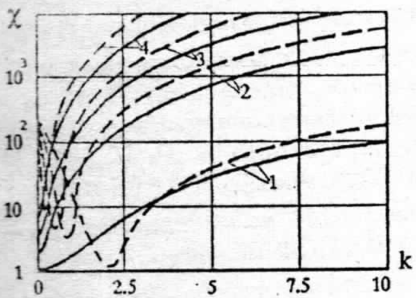


Рис. 1

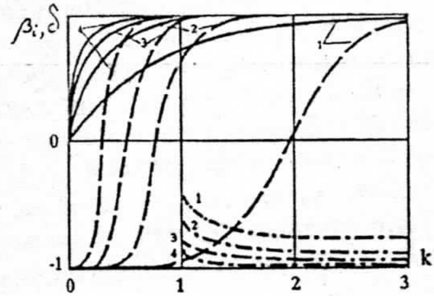


Рис. 2

На рис. 2 приведены зависимости относительного смещения $\beta_i = b_i(D^* \mid D_0) / \sqrt{V_i(D^* \mid D_0)}$ от k при тех же значениях параметров q и μ. Согласно рис. 1, 2 наличие преселектора и воздействие помехи приводят к существенному снижению точности оценки дисперсии (1).

Повысить точность оценки дисперсии в этих условиях можно было бы используя метод максимального правдоподобия [2, 5]. Однако при произвольной форме спектра мощности анализируемого процесса найти оценку максимального правдоподобия (ОМП) дисперсии.в явном виде не удается [5]. Это приводит к существенной сложности аппаратурной реализации алгоритма оценки. Кроме того, часто, кроме оцениваемой дисперсии, неизвестна также спектральная плотность γ_0 помехи. В этом случае необходимо реализовывать совместную оценку дисперсии анализируемого случайного процесса и спектральной плотности помехи.

Получить ОМП дисперсии стационарного гауссовского процесса в явном виде удается сравнительно просто при прямоугольной форме спектра мощности (11). При синтезе ОМП дисперсии будем полагать, что в общем случае могут иметь заметное значение собственные шумы элементов радиоэлектронной системы, включенных после преселектора. Тогда реализация наблюдаемых данных будет иметь вид

$$x(t) = s(t) + \nu(t) + n(t), \tag{13}$$

где $n(t)$ — гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0.

Положим вначале, что кроме дисперсии D_0 и спектральной плотности помехи γ_0, неизвестно также математическое ожидание анализируемого процесса a_0. Для определения структуры измерителя дисперсии, адаптирующегося к помехе с неизвестной спектральной плотностью, введем в рассмотрение три вспомогательные гипотезы H_i, $i = 0,1,2$. Гипотеза H_2 предполагает, что реализация наблюдаемых данных имеет вид (13). Гипотеза H_1 предполагает, что анализируемый случайный процесс отсутствует, так что наблюдается реализация $x(t) = \nu(t) + n(t)$. Наконец, гипотеза H_0 предполагает, что наблюдается только белый шум $x(t) = n(t)$. Обозначим $F_2(D, a, \gamma)$ — логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) для гипотезы H_2 при альтернативе H_0 и $F_1(\gamma)$ — логарифм ФОП для гипотезы H_1 при альтернативе H_0. Тогда ОМП $\hat{D}$ дисперсии при наличии помехи с неизвестной спектральной плотностью γ_0 можно записать в виде

$$\hat{D} = \arg\sup L(D), \tag{14}$$

$$L(D) = \sup_{a,\gamma} F_2(D, a, \gamma) - \sup_{\gamma} F_1(\gamma). \tag{15}$$

Введение вспомогательных гипотез H_i, $i = 0, 1, 2$ позволяет избежать существенных математических трудностей при получении логарифма ФОП. В результате, полагая $\mu \gg 1$ и используя [2, 5], имеем

$$F_2(D, a, \gamma) =$$

$$= \frac{1}{N_0}\int_0^T \left[\frac{N_0\, y_2^2(t)}{(N_0+\gamma+d)(N_0+\gamma)} + \frac{\gamma}{\gamma+N_0} y_1^2(t) - \frac{2\,a\,x(t)}{N_0+\gamma+d}\right] d\,t -$$

$$-\frac{2a_0^2 T}{N_0+\gamma+d}-\mu\left[\ln\left(1+\frac{\gamma+d}{N_0}\right)+(k-1)\ln\left(1+\frac{\gamma}{N_0}\right)\right], \quad (16)$$

$$F_1(\gamma)=F_2(0,0,\gamma), \quad (17)$$

где $y_2(t)$ — отклик фильтра с передаточной функцией (ПФ) $|H_2(j\omega)|^2=I(\omega/\Omega)$ на реализацию наблюдаемых данных (13), $d=4\pi D/\Omega$. Подставляя (16), (17) в (14), (15), находим ОМП дисперсии

$$\hat{D}=\frac{1}{T(k-1)}\left[k\int_0^T y_2^2(t)\,dt-\int_0^T y_1^2(t)\,dt\right]-\left[\frac{1}{T}\int_0^T y_1(t)\,dt\right]^2, \quad (18)$$

структура которой инвариантна к спектральным плотностям помехи γ_0 и белого шума N_0.

В частном случае, когда априори известно математическое ожидание a_0 анализируемого процесса, целесообразно обрабатывать центрированную реализацию наблюдаемых данных (13)

$$\tilde{x}(t)=x(t)-a_0. \quad (19)$$

В этом случае ОМП дисперсии опять определяется формулой (14), куда следует подставить

$$L(D)=\sup_{\gamma} F_2(D,0,\gamma)-\sup_{\gamma} F_1(\gamma), \quad (20)$$

где $F_2(D,0,\gamma)$, $F_1(\gamma)$ имеют вид (16), (17) при замене реализации $x(t)$ (13) на ее центрированное значение (19). Подставляя (20) в (14), для ОМП дисперсии получаем выражение

$$\hat{D}=\frac{1}{T(k-1)}\left[k\int_0^T \tilde{y}_2^2(t)\,dt-\int_0^T \tilde{y}_1^2(t)\,dt\right], \quad (21)$$

где $\tilde{y}_i(t)$ — отклики фильтров с передаточными функциями $H_i(j\omega)$ $(i=1,2)$ на центрированную реализацию наблюдаемых данных (19).

Объединяя (18) и (21), ОМП дисперсии можем представить в виде, аналогичном (1)

$$\hat{D}=\frac{1}{T(k-1)}\left[k\int_0^T y_2^2(t)\,dt-\int_0^T y_1^2(t)\,dt\right]-\left[\frac{c}{T}\int_0^T y_1(t)\,dt\right]^2, \quad (22)$$

где $y_1(t)$ — отклики соответствующих фильтров на $\tilde{x}(t) = x(t) - (1-c)\,a_0$.

Структурная схема измерителя дисперсии приведена на рис. 3, где H_i — фильтры с ПФ $H_i(j\omega)$. Такой измеритель вырабатывает ОМП дисперсии процесса с прямоугольной формой спектра мощности. Если же форма спектра мощности анализируемого процесса отличается от прямоугольной, то измеритель вырабатывает квазиправдоподобную оценку (КПО) дисперсии [6]. Действительно, КПО переходит в ОМП по мере приближения формы спектра мощности анализируемого процесса к прямоугольной. Следует отметить, что измеритель (22) синтезирован при условии, что полоса пропускания преселектора больше эффективной полосы частот сигнала ($k > 1$).

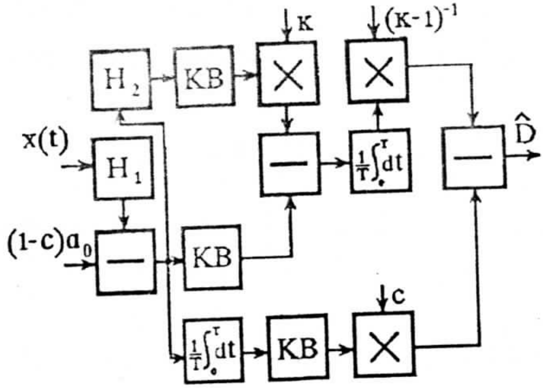


Рис. 3

Найдем характеристики оценки (22), рассматривая ее как квазиправдоподобную. Для этого подставим в (22) реализацию наблюдаемых данных (13) и положим, что спектр мощности анализируемого процесса (7) имеет произвольную форму, описываемую функцией $g(\cdot)$. Выполняя затем усреднение, получаем для смещения и рассеяния КПО дисперсии выражения

$$b(\hat{D} \mid D_0) = \frac{D_0}{k-1}\left\{k\left[2\int_0^{1/2} g(x)\,dx - 1\right] - 2\int_0^{k/2} g(x)\,dx + 1 - \frac{c(k-1)}{2\mu}(1+q+qN)\right\}, \tag{23}$$

$$V(\hat{D} \mid D_0) = b^2(\hat{D} \mid D_0) + \frac{2D_0^2}{\mu(k-1)^2}\{k(k-2)\int_0^{1/2}[q + q_N + g(x)]^2\,dx +$$

$$+\int\limits_0^{k/2} [q + q_N + g(x)]^2 d x - \frac{c(k-1)^2}{8\mu}(1 + q + q_N)^2 \}. \qquad (24)$$

…десь $q_N = N_0 \Omega / 4\pi D_0$ — отношение средней мощности белого шума в …ффективной полосе частот анализируемого процесса к средней мощно…ти процесса.

Конкретизируем общие выражения (23), (24) для случайных процес…ов, форма спектра мощности которых описывается функциями (11) и …12). При оценке дисперсии процесса с прямоугольной формой спектра …ощности (11) получаем, полагая $c = 0$, $b_1(D \mid D_0) = 0$,

$$V_1(\hat{D} \mid D_0) = D_0^2 [(1 + q + q_N)^2 (k-1) + (q + q_N)^2] / \mu (k-1).$$

…оответственно, для процесса со спектром мощности Лоренца (12) имеем, …пять полагая $c = 0$,

$$b_2(\hat{D} \mid D_0) = D_0 \left\{ \frac{2}{\pi(k-1)} \left[k \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\pi k}{2} \right] - 1 \right\},$$

$$V_2(\hat{D} \mid D_0) = b_2^2(\hat{D} \mid D_0) + \frac{D_0^2}{\mu(k-1)^2} \left\{ k(k-1)(q + q_N)^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi} [k(k-2) \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\pi k}{2}] [4(q + q_N) + 1] +$$

$$\left. + \frac{k}{2} \left(\frac{k-2}{1 + \pi^2/4} + \frac{1}{1 + k^2 \pi^2 / 4} \right) \right\}.$$

Сравним точность оценок дисперсии (1) и (22). При этом будем …итать, что математическое ожидание анализируемого процесса априо… известно ($c = 0$) и белый шум $n(t)$ в наблюдаемой реализации (13) …сутствует, т. е. $q_N = 0$. Действительно, при наличии белого шума в …ализации наблюдаемых данных (13) алгоритм оценки (1) не применим, …к как интегралы в этом выражении тогда не существуют ни в каком …роятностном смысле [4].

Выигрыш в точности КПО (22) по сравнению с оценкой (1) будем …рактеризовать отношениями

$$\kappa_i = V_i(D^* \mid D_0) / V_i(\hat{D} \mid D_0),$$

…е $i = 1$ для процесса со спектром мощности (11) и $i = 2$ для процесса со …ктром мощности (12).

На рис. 4 сплошными линиями нанесены зависимости $\varkappa_1(k)$ и штриховыми линиями — зависимости $\varkappa_2(k)$. Кривые *1* соответствуют значениям $q = 0,1$; *2* — $q = 0,5$; *3* — $q = 1$; *4* — $q = 2$. Для всех кривых $\mu = 100$. Кроме того, на рис. 2 для сравнения нанесена штрихпунктирными линиями зависимость относительного смещения $\delta = b_2(\hat{D} \mid D_0) / \sqrt{V_2(\hat{D} \mid D_0)}$ КПО дисперсии от k при тех же значениях μ и q.

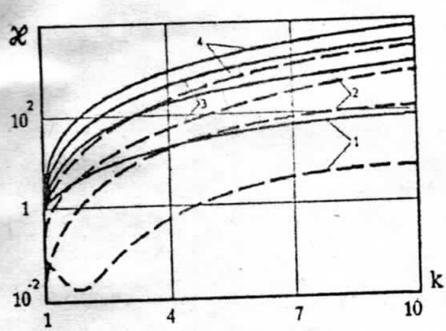


Рис. 4

Как видно из рис. 4, измеритель (22) обеспечивает существенный выигрыш в точности при оценке дисперсии процесса со спектром мощности (11) по сравнению с (1) даже при малых значениях q для всех $k > 1$. При оценке дисперсии процесса со спектром мощности (12) измеритель (22) обеспечивает выигрыш в точности оценки для всех $k > 1$, если $q > 1$. При меньших значениях q точность оценки (1) может быть выше, если k близко к единице.

Как следует из формул (8), (9), (23), (24), кривые рис. 1, 2, 4 верны и при априори неизвестном математическом ожидании, если $q^2 / \mu \ll 1$.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор между оценками (1) и (22) в зависимости от имеющейся априорной информации об анализируемом процессе, а также в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценок и к степени простоты аппаратурной реализации измерителя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мирский Г. Я.* Аппаратурное определение характеристик случайных процессов.— М.: Энергия, 1972.— 456 с.
2. *Куликов Е. И.* Методы измерения случайных процессов.— М. : Радио и связь, 1986.— 272 с.
3. *Виленкин С. Я.* Статистическая обработка результатов исследования случайных функций.— М. : Энергия, 1979.— 320 с.
4. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника.— М. : Радио и связь, 1982.— 624 с.
5. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М. : Сов. радио, 1978.— 296 с.
6. *Мудров В. И., Кушко В. Л.* Методы обработки измерений.— М. : Радио и связь, 1983.— 304 с.

Поступила в редакцию 02.02.94

Воронежский госуниверситет.