144

144

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

# РАДИОТЕХНИКА
# И
# ЭЛЕКТРОНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

N1, 1995

5. *Кац Л. И., Синицын Е. В., Сомов А. Ю.*//ПТЭ. 1978. № 2. С. 171.
6. *Райзер М. Д., Цопп Л. Э.*//РЭ. 1976. Т. 20. № 8. С. 1641.
7. *Синицын Н. И., Зайцев Б. Д., Федоренко В. А., Клюев Е. Е.* Детектор мощных одиночных и редкоповторяющихся СВЧ-радиоимпульсов: А. с. 1290188 СССР//Б. И. 1987. № 6. С. 165.
8. *Gulyaev Yu. V., Zaitsev B. D., Kalinin V. Yu. et al.*//Proc. Int. Symp. «Surface Waves in Solids and Layered Structures». Novosibirsk, 1986. С. 347.
9. *Зайцев Б. Д., Калинин В. Ю., Синицын Н. И.* Измеритель пространственного распределения электрических полей одиночных и редкоповторяющихся СВЧ-радиоимпульсов: А. с. 1283670 СССР//Б. И. 1987. № 2. С. 5.
10. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982.
11. *Зайцев Б. Д., Калинин В. Ю., Магда И. И. и др.*//ПТЭ. 1993. № 3. С. 133.

Поступила в редакцию
11.02.94

УДК 621.391

© 1995 г. **А. П. Трифонов, С. П. Алексеенко**

# КВАЗИПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СПЕКТРА МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

Найдены потери в точности оценок за счет различия в форме спектров мощности ожидаемого и принимаемого сигналов.

В работах [1—3] исследованы оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров $\vec{\vartheta}_0 = \|\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p\|$ спектра мощности (СМ) центрированного стационарного гауссовского случайного сигнала $s(t)$, наблюдаемого на фоне гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью $N_0$. При этом предполагали, что СМ $G_0(\omega, \vec{\vartheta}_0)$ и корреляционная функция $B_0(\tau, \vec{\vartheta}_0) = \langle s(t)\, s(t+\tau)\rangle$ случайного сигнала априори известны с точностью до оцениваемых параметров $\vec{\vartheta}_0$. В действительности, форма СМ $G(\omega, \vec{\vartheta})$, которая используется при синтезе ОМП, может отличаться от реальной формы СМ $G_0(\omega, \vec{\vartheta})$ полезного сигнала. В связи с этим представляет интерес определить степень ухудшения качества оценок СМ за счет отличия СМ $G_0(\omega, \vec{\vartheta}_0)$ сигнала, поступающего на вход приемника, от СМ $G(\omega, \vec{\vartheta})$ ожидаемого сигнала, для которого синтезирован алгоритм ОМП. Введем обозначение

$$B(\tau, \vec{\vartheta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \vec{\vartheta}) \exp(j\omega\tau)\, d\omega \tag{1}$$

— корреляционная функция ожидаемого сигнала, причем в общем случае $B(\tau, \vec{\vartheta}) \neq B_0(\tau, \vec{\vartheta})$.

Для стационарного гауссовского случайного сигнала с корреляционной функцией (1) и принимаемого на фоне белого шума логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) имеет вид [2]

$$L(\vec{\vartheta}) = \frac{1}{N_0}\int_0^T\int_0^T x(t_1)\, x(t_2)\, Q(t_1, t_2, \vec{\vartheta})\, dt_1 dt_2 - \tag{2}$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^1 d\chi \int_0^T \widetilde{Q}(t, t, \vec{\vartheta}, \chi)\, dt,$$

где $x(t)$ — реализация суммы сигнала и шума, наблюдаемая на интервале времени $[0;\ T]$, $Q(t_1, t_2, \vec{\vartheta}) = \tilde{Q}(t_1, t_2, \vec{\vartheta}, \chi = 1)$, а $\tilde{Q}(t_1, t_2, \vec{\vartheta}, \chi)$ определяется из решения интегрального уравнения

$$(3)\qquad \frac{N_0}{2}\tilde{Q}(t_1, t_2, \vec{\vartheta}, \chi) + \chi\int_0^T \tilde{Q}(t_1, t, \vec{\vartheta}, \chi)\, B(t - t_2, \vec{\vartheta})\, dt = B(t_1 - t_2, \vec{\vartheta}).$$

Поскольку реализация наблюдаемых данных $x(t)$ в (2) содержит сигнал $s(t)$ со спектром мощности $G_0(\omega, \vec{\vartheta}_0) \neq G(\omega, \vec{\vartheta}_0)$, оценка $\hat{\vec{\vartheta}}$ параметров $\vec{\vartheta}_0$, определяемая как положение абсолютного (наибольшего) максимума функции (2), не является ОМП. Эту оценку можно назвать квазиправдоподобной (КПО) [4], поскольку она совпадает с ОМП при $G_0(\omega, \vec{\vartheta}) = G(\omega, \vec{\vartheta})$ и соответственно при $B_0(\tau, \vec{\vartheta}) = B(\tau, \vec{\vartheta})$. Для определения характеристик КПО $\hat{\vec{\vartheta}}$ параметров $\vec{\vartheta}_0$ СМ $G_0(\omega, \vec{\vartheta}_0)$ наблюдаемого сигнала представим (2) как сумму [1, 3] $L(\vec{\vartheta}) = S(\vec{\vartheta}) + N(\vec{\vartheta})$, где $S(\vec{\vartheta}) = \langle L(\vec{\vartheta})\rangle$ — сигнальная функция, а $N(\vec{\vartheta}) = L(\vec{\vartheta}) - \langle L(\vec{\vartheta})\rangle$ — шумовая. Полагаем далее, что время наблюдения достаточно велико, при этом

$$(4)\qquad \mu_m = T\Omega_m/2\pi \gg 1,$$

где

$$\Omega_m = \min\left\{ \min_{\vec{\vartheta}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0^2(\omega, \vec{\vartheta}_0)\, d\omega\, [2\max_\omega G_0^2(\omega, \vec{\vartheta}_0)]^{-1};\ \min_{\vec{\vartheta}} \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(\omega, \vec{\vartheta})\, d\omega\, [2\max_\omega G^2(\omega, \vec{\vartheta})]^{-1}\right\}$$

— минимальная эквивалентная полоса частот СМ действительного и ожидаемого сигналов.

При выполнении (4), решая уравнение (3) при помощи преобразования Фурье, находим сигнальную функцию

$$(5)\qquad S(\vec{\vartheta}) = \frac{T}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{[1 + \rho_0(\omega, \vec{\vartheta})]\,\rho(\omega, \vec{\vartheta})}{1 + \rho(\omega, \vec{\vartheta})} - \ln\,[1 + \rho(\omega, \vec{\vartheta})]\right\} d\omega$$

и два первых момента шумовой функции

$$(6)\qquad \langle N(\vec{\vartheta})\rangle = 0,\ B_N(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2) = \langle N(\vec{\vartheta}_1)\, N(\vec{\vartheta}_2)\rangle = \frac{T}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[1 + \rho_0(\omega, \vec{\vartheta}_0)]^2\,\rho(\omega, \vec{\vartheta}_1)\,\rho(\omega, \vec{\vartheta}_2)}{[1 + \rho(\omega, \vec{\vartheta}_1)]\,[1 + \rho(\omega, \vec{\vartheta}_2)]}\, d\omega.$$

В (5), (6) использованы обозначения $\rho_0(\omega, \vec{\vartheta}_0) = 2G_0(\omega, \vec{\vartheta}_0)/N_0$, $\rho(\omega, \vec{\vartheta}) = 2G(\omega, \vec{\vartheta})/N_0$.

Так как по определению КПО функция $L(\vec{\vartheta})$ при $\vec{\vartheta} = \hat{\vec{\vartheta}}$ обращается в абсолютный максимум, КПО $\hat{\vec{\vartheta}}$ является решением системы уравнений

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta_i}\,[S(\vec{\vartheta}) + N(\vec{\vartheta})]_{\hat{\vec{\vartheta}}} = 0,\ i = \overline{1, p}.$$

При этом при отсутствии шумовой функции ($N(\vec{\vartheta}) \equiv 0$) функция (3) достигает максимума в некоторой точке $\vec{\vartheta}^* \neq \vec{\vartheta}_0$, определяемой из системы уравнений

$$(8)\qquad \left[\frac{\partial S(\vec{\vartheta})}{\partial\vartheta_i}\right]_{\vec{\vartheta}^*} = \frac{T}{4\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_0(\omega, \vec{\vartheta}_0) - \rho(\omega, \vec{\vartheta})}{[1 + \rho(\omega, \vec{\vartheta})]^2}\,\frac{\partial\rho(\omega, \vec{\vartheta})}{\partial\vartheta_i}\, d\omega\right\}_{\vec{\vartheta}^*} = 0,\ i = \overline{1, p}.$$

Поскольку $\max S(\vec{\vartheta}) = S(\vec{\vartheta})$, отношение сигнал/шум (ОСШ) получаем в виде [3] $z^2 = S^2(\vartheta)/B_N(\vartheta, \vartheta)$, откуда следует, что ОСШ возрастает с увеличением времени наблюдения $T$. Полагая ОСШ достаточно большим, для решения системы уравнений (7) воспользуемся методом малого параметра [3], в качестве которого используем величину $1/z$. Ограничиваясь рассмотрением первого приближения, находим смещение (систематическую ошибку) КПО $i$-го параметра

$$b_i = \langle \hat{\vartheta}_i - \vartheta_{0i} \rangle = \tilde{\vartheta}_i - \vartheta_{0i} \tag{9}$$

и корреляционную матрицу КПО

$$\mathbf{K} = \| \langle (\hat{\vartheta}_i \langle \tilde{\vartheta}_i \rangle)(\hat{\vartheta}_k - \langle \tilde{\vartheta}_k \rangle) \rangle \| = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{S}^T)^{-1}, \tag{10}$$

где $T$ означает транспонирование,

$$\mathbf{S} = \left\| -\left[ \frac{\partial^2 S(\vec{\vartheta})}{\partial\vartheta_i \partial\vartheta_k} \right]_{\vec{\vartheta}} \right\| = \frac{T}{4\pi} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 2\rho_0(\omega, \vec{\vartheta}_0) - \rho(\omega, \vec{\vartheta})}{[1 + \rho(\omega, \vec{\vartheta})]^3} \times \right.$$

$$\times \frac{\partial\rho(\omega, \vec{\vartheta})}{\partial\vartheta_i} \frac{\partial\rho(\omega, \vec{\vartheta})}{\partial\vartheta_k} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_0(\omega, \vec{\vartheta}_0) - \rho(\omega, \vec{\vartheta})}{[1 + \rho(\omega, \vec{\vartheta})]^2} \times$$

$$\left. \times \frac{\partial^2\rho(\omega, \vec{\vartheta})}{\partial\vartheta_i \partial\vartheta_k} d\omega \right\}_{\vec{\vartheta}} \Big\|, \tag{11}$$

$$\mathbf{B} = \left\| \left[ \frac{\partial^2 B_N(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2)}{\partial\vartheta_{1i} \partial\vartheta_{2k}} \right]_{\vec{\vartheta}} \right\| = \frac{T}{4\pi} \left\| \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[1 + \rho_0(\omega, \vec{\vartheta}_0)]^2}{[1 + \rho(\omega, \vec{\vartheta})]^4} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \ldots \times \frac{\partial\rho(\omega, \vec{\vartheta})}{\partial\vartheta_i} \frac{\partial\rho(\omega, \vec{\vartheta})}{\partial\vartheta_k} d\omega \right\}_{\vec{\vartheta}} \right\|, \; i, k = \overline{1, p}.$$

В общем случае КПО смещенная, тем не менее, согласно (10), (11) дисперсия КПО убывает с ростом времени наблюдения как $1/T$, аналогично дисперсии ОМП [1—3].

В частном случае, когда $G_0(\omega, \vec{\vartheta}) = G(\omega, \vec{\vartheta})$ и соответственно $\rho_0(\omega, \vec{\vartheta}) = \rho(\omega, \vec{\vartheta})$, КПО переходит в ОМП и выражения (9), (10) могут быть переписаны в виде

$$b_i = 0, \mathbf{K} = \frac{4\pi}{T} \left\| \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\rho_0(\omega, \vec{\vartheta})}{\partial\vartheta_i} \frac{\partial\rho_0(\omega, \vec{\vartheta})}{\partial\vartheta_k} \times \right. \right. \tag{12}$$

$$\left. \left. \times [1 + \rho_0(\omega, \vec{\vartheta})]^{-2} d\omega \right\}_{\vec{\vartheta}_0} \right\|^{-1}.$$

Последние выражения совпадают с характеристиками совместно-эффективных оценок параметров СМ случайного сигнала [2]. В частности, при $p = 1$ из (12) получаем результат [1, 3].

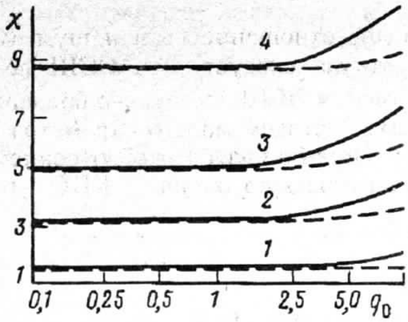
Сопоставление (9), (11) и (12) позволяет определить степень ухудшения качества оценок за счет различия формы СМ ожидаемого и принимаемого сигналов.

В качестве примера рассмотрим оценку центральной частоты $\nu$ узкополосного случайного сигнала, предполагаемый СМ которого имеет вид [5]

$$G(\omega, \nu, \gamma, \Omega) = \frac{\gamma}{2}\left[ g\left(\frac{\nu + \omega}{\Omega}\right) + g\left(\frac{\nu - \omega}{\Omega}\right) \right], \tag{13}$$

где $\gamma$ — максимальная величина СМ, $\Omega$ — эквивалентная полоса частот, а функция $g(\cdot)$ описывает форму СМ и удовлетворяет условиям

$$g(x) = g(-x) \geq 0, \; \max g(x) = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\, dx = 1. \tag{14}$$




Проигрыш в точности оценки частоты

Так как необходимо оценить лишь частоту ν, параметры γ и Ω являются неинформативными [6], а КПО ν определяется соотношением

$$\hat{\nu} = \arg\sup L(\nu), \; L(\nu) = \sup_{\gamma,\,\Omega} L(\nu, \gamma, \Omega). \tag{15}$$

Здесь $L(\nu, \gamma, \Omega)$ — логарифм ФОП (3), найденный для ожидаемого случайного сигнала, который обладает СМ (13). Аналогично (13) СМ принимаемого сигнала запишем как

$$G_0(\omega, \nu_0, \gamma_0, \Omega_0) = \frac{\gamma_0}{2}\left[g_0\left(\frac{\nu_0 + \omega}{\Omega_0}\right) + g_0\left(\frac{\nu_0 - \omega}{\Omega_0}\right)\right], \tag{16}$$

где функции $g_0(\cdot)$ в общем случае отличается от $g(\cdot)$ в (13), но удовлетворяет условиям (14). Подставляя (13) и (16) в (8) и учитывая (14), получаем $\tilde{\nu} = \nu_0$ и, следовательно, КПО центральной частоты будет несмещенной. Для определения дисперсии $D(\hat{\nu})$ КПО $\hat{\nu}$ (15) частоты надо найти значения $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\Omega}$ из (8) и затем получить элемент матрицы (10), лежащий на пересечении первых строки и столбца. Соответственно дисперсию $D(\nu_m)$ ОМП $\nu_m$ центральной частоты получаем, обращая матрицу (12) для СМ (16). Полагаем далее, что форма СМ ожидаемого и принимаемого сигналов описывается полиномами Баттерворта [7]

$$\beta_n(x) = [1 + (\alpha_n x)^{2n}]^{-1}, \tag{17}$$

где $n$ — степень полинома, $\alpha_n$ — нормировочный коэффициент, определяемый из условия нормировки вида (14) $\int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n^2(x)\,dx = 1$.

Функция (17) позволяет аппроксимировать форму СМ широкого класса случайных сигналов [7].

На рисунке приведены кривые зависимости проигрыша $\chi = D(\hat{\nu})/D(\nu_m)$ в точности КПО по сравнению с ОМП от отношения спектральных плотностей сигнала и шума $q_0 = \gamma_0/N_0$. Сплошные кривые соответствуют зависимости $\chi(q_0)$, когда форма СМ ожидаемого сигнала описывается полиномом Баттерворта со степенью $n$, т. е. $g(x) = \beta_n(x)$, а принимаемый сигнал имеет форму СМ, описываемую полиномом Баттерворта первой степени, т. е. $g_0(x) = \beta_1(x) = [1 + (\pi x/2)]^{-1}$. Штриховые кривые соответствуют случаю, когда $g(x) = \beta_1(x)$, а $g_0(x) = \beta_n(x)$. Кривые *1—4* рассчитаны при $n = 2;\ 4;\ 6;\ 10$.

Как следует из рисунка, проигрыш в точности КПО может быть значительным, причем при не слишком больших $q_0$ он практически от $q_0$ не зависит. Отметим также, что проигрыш несколько уменьшается, если измеритель синтезирован для ожидаемого СМ, фронты которого, т. е. участки спада СМ, более пологие, чем у СМ принимаемого сигнала.

Приведенные результаты получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куликов Е. И.* Методы измерения случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986.
2. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 3. М.: Сов. радио, 1977.
3. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
4. *Мудров В. И., Кушко В. Л.* Методы обработки измерений. М.: Радио и связь, 1983.
5. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
6. *Шинаков Ю. С.*//РЭ. 1974. Т. 19. № 3. С. 542.
7. *Фомин А. Ф., Хорошавин А. И., Щелухин О. И.* Аналогичные и цифровые синхронно-фазовые измерители и демодуляторы. М.: Радио и связь, 1987.

Поступила в редакцию
05.05.94