

146

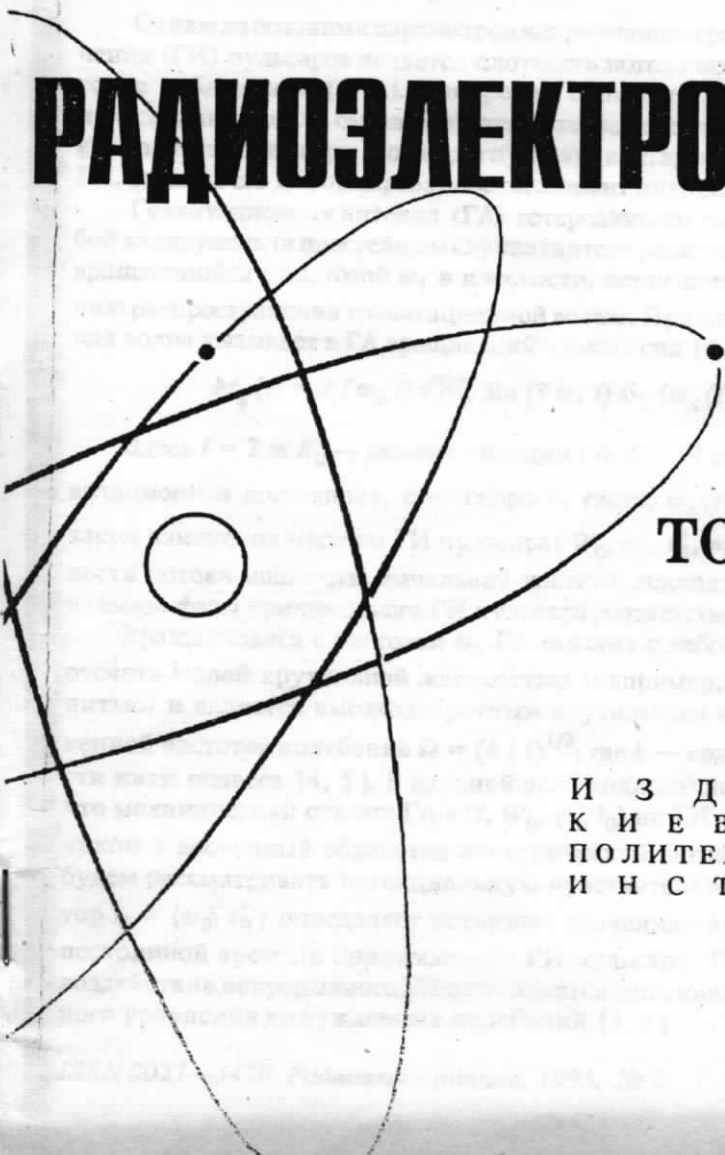
146

р- 6264/
995/38/1-2
62

ISSN 0021 — 3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА



ТОМ 38

1-2

ИЗДАНИЕ
КИЕВСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

1995

ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ ПОТОКА МОЩНОСТИ ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПУЛЬСАРОВ

Выполнен синтез и анализ максимально правдоподобного и байесовского алгоритмов оценки при использовании гравитационной антенны гетеродинного типа. Найдены допустимые погрешности предварительного определения частоты и постоянной времени пульсара.

Одним из основных параметров непрерывного гравитационного излучения (ГИ) пульсаров является плотность потока мощности излучения в точке наблюдения [1, 2]. Измерение плотности потока мощности ГИ пульсара позволило бы наблюдателю экспериментально определить такие важные параметры эволюции пульсара как: время торможения за счет ГИ, степень его деформированности, момент инерции и др. [3].

Гравитационная антенна (ГА) гетеродинного типа представляет собой квадруполь (в простейшем случае гантель радиуса R_0 из двух масс m), вращающийся с частотой ω_1 в плоскости, перпендикулярной направлению распространения гравитационной волны. Приходящая гравитационная волна вызывает в ГА вращающий момент сил [4, 5]

$$M_g(t) = 2 I \omega_0 B \sqrt{W_0} \sin(2 \omega_1 t) \sin(\omega_g(t) t - \varphi_0). \quad (1)$$

Здесь $I = 2 m R_0^2$ — момент инерции ГА; $B = (8 \pi G / c^3)^{1/2}$, G — гравитационная постоянная, c — скорость света; $\omega_g(t) = \omega_0 (1 - t/\tau_0^*)$ — закон изменения частоты ГИ пульсара; $W_0, \omega_0, \tau_0^*, \varphi_0$ — значения плотности потока мощности, начальной частоты, постоянной времени и начальной фазы принимаемого ГИ пульсара соответственно.

Вращающаяся с частотой ω_1 ГА связана с лабораторной системой отсчета малой крутильной жесткостью (например, тонкой кварцевой нитью) и является высокочастотным крутильным маятником с собственной частотой колебаний $\Omega = (k/I)^{1/2}$, где k — коэффициент упругости нити подвеса [4, 5]. В дальнейшем, аналогично [4, 5], полагаем, что механический отклик ГА $s(t, W_0, \varphi_0, I_0)$ на ГИ преобразуется датчиком в доступный для обработки электрический сигнал без потерь, т. е. будем рассматривать потенциальную чувствительность ГА. Здесь вектор $I_0 = \{\omega_0, \tau_0^*\}$ определяет истинные значения начальной частоты и постоянной времени принимаемого ГИ пульсара. Тогда отклик ГА на воздействие непрерывного ГИ описывается решением дифференциального уравнения вынужденных колебаний [4, 5]

$$D_t [s(t, W_0, \varphi_0, I_0)] = s_0(t, W_0, \varphi_0, I_0) \quad (2)$$

с нулевыми начальными условиями. В (2) $D_t = d^2/dt^2 + 2\delta d/dt + \Omega^2$ — линейный дифференциальный оператор, характеризующий работу ГА; $\delta = H_\varphi / I$ — декремент затухания; H_φ — коэффициент трения кручения нити подвеса; $s_0(t, W_0, \varphi_0, I_0) = M_g(t) / I$ — вынуждающая сила, «эквивалентная» воздействию ГИ на ГА.

Помимо ГИ пульсара на ГА действует случайный момент сил $M_{fl}(t)$, вызванный тепловыми флуктуациями в нити подвеса [4]. Согласно [4], $M_{fl}(t)$, представляет собой центрированный гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью $N_\mu = 4\kappa T_\mu H_\varphi$, где κ — постоянная Больцмана, T_μ — температура ГА. Шумовой отклик $n(t)$ на выходе ГА описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$D_t [n(t)] = M_{fl}(t) / I. \quad (3)$$

Итак, на выходе ГА в течение интервала времени $[0, T]$ наблюдается реализация

$$x(t) = s(t, W_0, \varphi_0, I_0) + n(t). \quad (4)$$

На основе анализа реализации $x(t)$ (4) наблюдателю необходимо оценить плотность потока мощности W_0 , принимаемого ГИ с неизвестной начальной фазой φ_0 . Согласно [6, 7], оптимальное радиоэлектронное устройство обработки выходного сигнала ГА должно формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) $L(W, \varphi | I_0)$ как функцию неизвестных параметров W, φ при заданных значениях компонент вектора I_0 . Используя с учетом (2) и (3) метод замены переменных в функционале плотности вероятности [8], можем представить логарифм ФОР в виде

$$L(W, \varphi | I_0) = [2 \int_0^T D_t [x(t)] s_0(t, W, \varphi, I_0) dt - \int_0^T s_0^2(t, W, \varphi, I_0) dt] / N_\mu. \quad (5)$$

Отношение сигнал—шум (ОСШ) по мощности [6, 7] на выходе оптимального устройства обработки, формирующего (5), определяется как

$$\rho(W, \omega_0) = 16\pi G W \omega_0^2 R_0^4 m^2 T / c^3 \kappa T_\mu H_\varphi. \quad (6)$$

Для формирования достаточной статистики (5) наблюдателю необходимо знать истинные значения начальной частоты ω_0 и постоянной времени τ_0^* принимаемого ГИ. Однако, в общем случае, наблюдателю могут быть известны лишь некоторые оценочные значения ω и τ^* , полученные, например, в результате наблюдений пульсара в оптическом диапазоне и отличающиеся от истинных значений ω_0 и τ_0^* . Следовательно, при формировании достаточной статистики (5) вместо истинных значений ω_0 и τ_0^* (компонент вектора I_0) придется использовать значения ω и τ^* . Тогда выходная статистика приемника может быть записана как $L_1(W, \varphi) = L(W, \varphi | I)$, где $I = \{\omega, \tau^*\}$. Статистику $L_1(W, \varphi)$ назовем квазидостаточной статистикой, поскольку она совпадает с достаточной статистикой (5) лишь при $I = I_0$.

Введем две случайные величины, являющиеся функционалами от реализации наблюдаемых данных $x(t)$ (4)

$$\hat{W} = X_1^2 + Y_1^2, \quad \hat{\varphi} = \arctg(Y_1 / X_1), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\omega B T} \int_0^T D_t [x(t)] \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left[((\omega_0 - 2\omega_1)t - \frac{\omega t^2}{\tau^*}) - \right. \\ &\quad \left. - \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left[((\omega_0 + 2\omega_1)t - \frac{\omega t^2}{\tau^*}) \right] \right] dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя (7), представим с учетом (8) квазидостаточную статистику $L_1(W, \varphi)$ в виде

$$L_1(W, \varphi) = z_1^2 [(W \hat{W})^{1/2} \cos(\varphi - \hat{\varphi}) - W/2]. \quad (9)$$

Здесь $z_1^2 = \rho(W=1, \omega)$ — ОСШ по мощности для ГИ с единичной плотностью потока мощности и начальной частотой ω . Поскольку квазидостаточная статистика $L_1(W, \varphi)$ выражается, согласно (9), через $\hat{W}$ и $\hat{\varphi}$ (7), то $\hat{W}$ и $\hat{\varphi}$ так же являются квазидостаточными статистиками. Статистические характеристики квазидостаточных статистик (7) оказываются инвариантными по отношению к собственной частоте колебаний Ω ГА. Действительно, плотность вероятности случайной величины W , условная относительно истинных значений параметров W_0 и φ_0 имеет вид

$$P_1(\hat{W} | W_0) = \frac{z_1^2}{2} I_0(z_1^2 R \omega_0 (\hat{W} W_0)^{1/2} / \omega) \times \\ \times \exp \left[-\frac{z_1^2}{2} (\hat{W} + W_0 R^2 (\omega / \omega_0)^2) \right], \quad (10)$$

где

$$R = (S_c^2 + S_s^2)^{1/2};$$

$$S_c = \left(\frac{\pi}{2a} \right)^{1/2} \left\{ \cos \left(\frac{b^2}{4a} \right) \left[C \left(\frac{2a+b}{\sqrt{[2\pi a]}} \right) - C \left(\frac{b}{\sqrt{[2\pi a]}} \right) \right] + \right. \\ \left. + \sin \left(\frac{b^2}{4a} \right) \left[S \left(\frac{2a+b}{\sqrt{[2\pi a]}} \right) - S \left(\frac{b}{\sqrt{[2\pi a]}} \right) \right] \right\};$$

$$S_s = \left(\frac{\pi}{2a} \right)^{1/2} \left\{ \cos \left(\frac{b^2}{4a} \right) \left[S \left(\frac{2a+b}{\sqrt{[2\pi a]}} \right) - S \left(\frac{b}{\sqrt{[2\pi a]}} \right) \right] + \right. \\ \left. + \sin \left(\frac{b^2}{4a} \right) \left[C \left(\frac{2a+b}{\sqrt{[2\pi a]}} \right) - C \left(\frac{b}{\sqrt{[2\pi a]}} \right) \right] \right\};$$

$$a = \omega_0 T^2 (1 - (1 + \delta \omega) / (1 + \delta \tau^2)) / \tau_0^*; b = \omega_0 T \delta \omega;$$

$\delta \omega = (\omega - \omega_0) / \omega_0$, $\delta \tau^* = (\tau^* - \tau_0^*) / \tau_0^*$ — относительные погрешности предварительного определения начальной частоты ω и постоянной времени τ^* ГИ пульсара; $S(\cdot)$ и $C(\cdot)$ — синус и косинус интегралы Френеля; $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Согласно [6, 7], оценки максимального правдоподобия (ОМП) плотности потока мощности W_0 и начальной фазы φ_0 ГИ определяются как координаты абсолютного максимума достаточной статистики (5). Оценки, определяемые по положению абсолютного максимума квазидостаточной статистики $L_1(W, \varphi)$ при $\omega \neq \omega_0$, $\tau^* \neq \tau_0^*$, назовем квазиправдоподобными оценками (КПО). Выполняя в (9) максимизацию по W и φ , получим, что КПО плотности потока мощности и начальной фазы ГИ совпадают с квазидостаточными статистиками $\hat{W}$ и $\hat{\varphi}$ (7).

Используя распределение (10) квазидостаточной статистики $\hat{W}$ (7), найдем характеристики КПО плотности потока мощности ГИ. Условные значения систематической ошибки (смещения) и среднего квадрата ошибки (рассеяния) оценки плотности потока мощности W имеют, соответственно, вид:

$$b[\hat{W} | W_0, \delta\omega, \delta\tau^*] = M[\hat{W} - W_0] = \\ = W_0 \{(1 + \delta\omega)^{-2} [R^2 + 2/z_0^2] - 1\}; \quad (11)$$

$$V[\hat{W} | W_0, \delta\omega, \delta\tau^*] = M[(\hat{W} - W_0)^2] = W_0 \{8(1 + \delta\omega)^{-4} / z_0^4 + \\ + 4(2(1 + \delta\omega)^{-4} R^2 + (1 + \delta\omega)^{-2}) / z_0^2 + (R^2 - 1)^2 ((1 + \delta\omega)^{-2} - 1)^2\}, \quad (12)$$

где $z_0^2 = \rho(W_0, \omega_0)$.

Если $\delta\omega = \delta\tau^* = 0$, то КПО плотности потока мощности ГИ переходит в ОМП [7, 8] с условными характеристиками, которые с учетом (11) и (12) могут быть представлены как

$$b_0(W_0) = b[\hat{W} | W_0, \delta\omega = 0, \delta\tau^* = 0] = 2W_0 / z_0^2; \\ V_0(W_0) = V[\hat{W} | W_0, \delta\omega = 0, \delta\tau^* = 0] = 4W_0^2(1 + 2/z_0^2) / z_0^2. \quad (13)$$

Рассмотрим влияние погрешностей $\delta\omega$ и $\delta\tau^*$ на точность оценки плотности потока мощности ГИ. Введем $\chi_1 = V[\hat{W} | W_0, \delta\omega, \delta\tau^* = 0] / V_0(W_0)$ — проигрыш в точности КПО по сравнению с ОМП, обусловленный погрешностями в определении начальной частоты ГИ и $\chi_2 = V[\hat{W} | W_0, \delta\omega = 0, \delta\tau^*] / V_0(W_0)$ — проигрыш, обусловленный погрешностями в определении постоянной времени пульсара.

Выберем в качестве примера, аналогично [4, 5], пульсар NP0532 в Крабовидной туманности. Оценочные значения параметров ГИ пульсара примем, согласно [1, 4]: $W_0 \approx 10^{-6}$ эрг/см²с, $\omega_0 \approx 400$ рад/с, $\tau_0^* \approx 10^{11}$ с. На рис. 1 и 2 для пульсара NP0532 представлены рассчитанные по (12) и (13) зависимости $\chi_1 = f(\delta\omega)$ и $\chi_2 = f(\delta\tau^*)$ соответственно. Из анализа кривых рис. 1 и 2 следует, что для достижения приемлемой величины проигрыша (например, 50%) в точности КПО по сравнению с ОМП допустима при времени наблюдения $T \approx 10^6$ с [1, 3] относительная погрешность в определении параметров пульсара не более, чем $|\delta\omega| \lesssim 3 \cdot 10^{-9}$, $|\delta\tau^*| \lesssim 4 \cdot 10^{-4}$.

Из (12) при $z_0 \rightarrow \infty$ имеем, что

$$V[\hat{W} | W_0, \delta\omega, \delta\tau^*] \rightarrow W_0^2(R^2 - 1)^2((1 + \delta\omega)^{-2} - 1)^2,$$

при $\delta\omega \neq 0$ и $\delta\tau^* \neq 0$. Следовательно, если при проведении гравитационно-волнового эксперимента наблюдателю не удастся обеспечить указанные относительные погрешности $\delta\omega$ и $\delta\tau^*$, то улучшение конструкции ГА (снижение T_μ и увеличение добротности подвеса) не приведет к существенному повышению точности оценки плотности потока мощности ГИ.

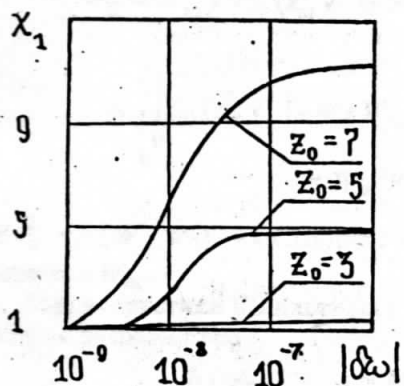


Рис. 1

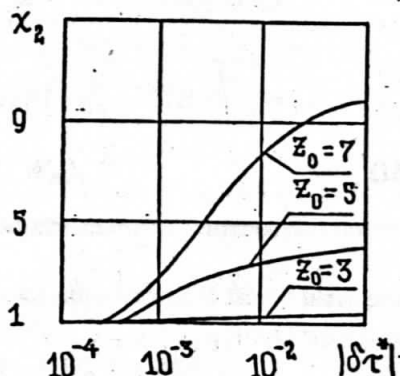


Рис. 2

Предположим теперь, что наблюдателю удалось обеспечить требуемые значения погрешностей предварительного измерения параметров ω_0 и τ_0^* (такие, что можем считать $\delta\omega = \delta\tau^* \approx 0$ и $R^2 \approx 1$) и проанализируем возможные пути повышения точности оценки. Одним из них является использование априорной информации об оцениваемом параметре [6, 7]. Известно [7], что байесовский алгоритм оценивания позволяет максимально использовать имеющуюся априорную информацию о параметрах принимаемого сигнала и требует задания функции потерь. При этом байесовская оценка (БО) параметров принимаемого сигнала обладает наибольшей эффективностью и обеспечивает достижение теоретического предела точности оценивания [7]. Выберем квадратичную функцию потерь [7] и равномерное априорное распределение плотности потока мощности ГИ

$$P_{pr}(W_0) = \begin{cases} 1/(\alpha W_m), & 0 \leq W_0 \leq \alpha W_m; \\ 0, & W_0 > \alpha W_m, \end{cases} \quad (14)$$

где W_m — верхняя граница величины плотности потока мощности ГИ пульсара и пока $\alpha = 1$. Кроме того, для реализации байесовского алгорит-

ма оценивания требуется знание априорного распределения начальной фазы ГИ пульсара.

Полагая распределение начальной фазы ГИ пульсара равномерным в интервале $(-\pi, \pi)$, найдем байесовский алгоритм оценивания. Согласно [7], БО плотности потока мощности ГИ может быть записана как

$$W_B = W_m \int_0^1 y I_0(z_m^2 \sqrt{y \hat{W} / W_m}) \exp(-z_m^2 y / 2) dy \times \\ \times \left[\int_0^1 I_0(z_m^2 \sqrt{y \hat{W} / W_m}) \exp(-z_m^2 y / 2) dy \right]^{-1} = \\ = W_m \Psi(\hat{W} / W_m), \quad (15)$$

где $z_m^2 = \rho(W_m, \omega_0)$ — ОСШ для ГИ с максимальной плотностью потока мощности W_m .

Характеристики БО плотности потока мощности ГИ могут быть рассчитаны по формулам

$$b[W_B | W_0] = M[W_B | W_0] - W_0; \\ V[W_B | W_0] = M[W_B^2 | W_0] - 2W_0 M[W_B | W_0] + W_0^2, \quad (16)$$

где

$$M[W_B^i | W_0] = W_m^i \int_0^\infty \Psi^i(x) P_1(x | W_0) dx - \quad (17)$$

начальный момент БО порядка $i = 1, 2$, а $P_1(x | W_0)$ — условное распределение (10) нормированной переменной $x = \hat{W} / W_0$ при $\delta\omega \doteq \delta\tau^* = 0$ ($R^2 = 1$).

Характеристики БО (16), (17) являются условными относительно истинного значения W_0 плотности потока мощности наблюдаемого ГИ. Для получения безусловных характеристик БО необходимо усреднить (17) по априорному распределению величины W_0 (14). Тогда безусловное рассеяние БО может быть записано как

$$V_\alpha[W_B] = \frac{1}{\alpha W_m} \int_0^{\alpha W_m} V[W_B | W_0] dW_0. \quad (18)$$

Алгоритм БО (15) синтезирован в предположении, что в (14) $\alpha = 1$. Значение $\alpha = 1$ в (18) соответствует верному астрофизическому прогнозу относительно значений верхней границы плотности потока мощности ГИ

пульсара W_m ; $\alpha < 1$ — завышенным прогностическим значениям W_m и $\alpha > 1$ — заниженным значениям W_m .

Если гравитационно-волновой эксперимент не производится, то БО плотности потока мощности определяется на основе только априорного распределения (14). Как не трудно убедиться, рассеяние такой БО (априорное рассеяние) $V_{pr} = W_m^2 (3 - 6\alpha + 4\alpha^2) / 12$. В результате проведения гравитационно-волнового эксперимента объем знаний о значении плотности потока мощности ГИ должен возрасти, если используется достаточно эффективный алгоритм обработки результатов эксперимента. В связи с чем будем характеризовать эффективность рассмотренных алгоритмов оценки величиной нормированного рассеяния: $\varepsilon_1 = V_{0\alpha} / V_{pr}$ — для ОМП

и $\varepsilon_2 = V_{\alpha} [W_B] / V_{pr}$ — для БО. Здесь $V_{0\alpha} = \int_0^{\alpha W_m} V_0(W_0) P_{pr}(W_0) dW_0$, где $V_0(W_0)$ определяется из (13), а $P_{pr}(W_0)$ — из (14). Таким образом, величины ε_i ($i = 1, 2$) показывают, как уменьшается рассеяние оценки плотности потока мощности ГИ в результате проведения гравитационно-волнового эксперимента.

На рис. 3 приведены зависимости $\varepsilon_i = \varepsilon_i(z_m)$ ($i = 1, 2$), рассчитанные при условии, что астрофизический прогноз относительно верхней границы плотности потока мощности ГИ верен ($\alpha = 1$). На рис. 4 приведены зависимости аналогичные рис. 3, рассчитанные при $\alpha = 5$ (сплошные кривые) и $\alpha = 1/5$ (штриховые кривые).

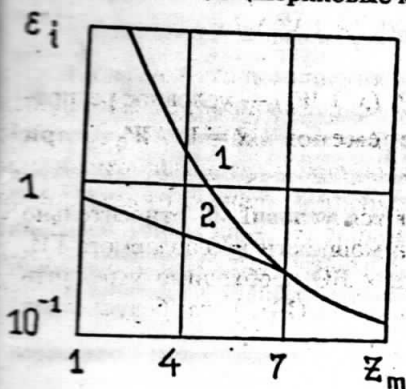


Рис. 3

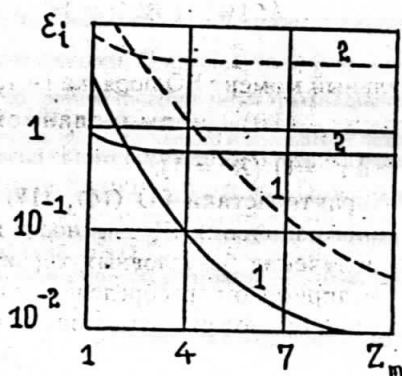


Рис. 4

Из анализа кривых рис. 3 следует, что при верном астрофизическом прогнозе ($\alpha = 1$) наиболее эффективна БО (15). При ОСШ $z_m \geq 7$ эффек-

тивность обоих рассмотренных алгоритмов практически совпадает. В случае малых ОСШ ($z_m < 5$) эффективность ОПМ резко ухудшается, в то время как эффективность БО падает значительно медленнее. В случае ошибочного астрофизического прогноза ($\alpha \neq 1$) из рис. 4 следует, что ОМП остается при больших z_m достаточно эффективной, в то время как байесовский алгоритм теряет свою работоспособность. Причем, при неверном астрофизическом прогнозе и использовании байесовского алгоритма, нецелесообразно увеличивать z_m , улучшая конструкцию ГА и снижая ее температуру, так как точность БО при этом практически не меняется.

Таким образом, показано, что при проведении гравитационно-волнового эксперимента необходимо обеспечить весьма высокий уровень точности предварительного измерения начальной частоты и постоянной времени ГИ пульсара. Если требуемый уровень точности предварительного измерения указанных параметров ГИ обеспечить не удастся, то рассчитанный на некоторые фиксированные значения ω и τ^* , измеритель не может обеспечить эффективного оценивания величины плотности потока мощности ГИ, даже при существенном усовершенствовании конструкции ГА.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бичак И., Руденко В. Н. Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 264 с.
2. Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Измерение малых сил в физических экспериментах. — М.: Наука, 1974. — 152 с.
3. Гришук Л. П. Гравитационно-волновая астрономия // УФН, 1988. — Вып. 2. — Т. 156. — С. 297—322.
4. Брагинский В. Б., Назаренко В. С. О гетеродинном способе приема гравитационного излучения // Вест. МГУ, Сер. физика, астрон. — 1971. — № 1. — С. 115—118.
5. Брагинский В. Б., Назаренко В. С. О приеме гравитационного излучения от некоторых источников неземного происхождения с помощью гетеродинного детектора // Гравитация. Киев: Наукова думка, 1972. — С. 9—16.
6. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
7. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
8. Амиантов И. Н. Избранные вопросы статистической теории связи. — М.: Сов. радио, 1974. — 416 с.

Воронежский госуниверситет.

Поступила в редакцию 05.05.94.