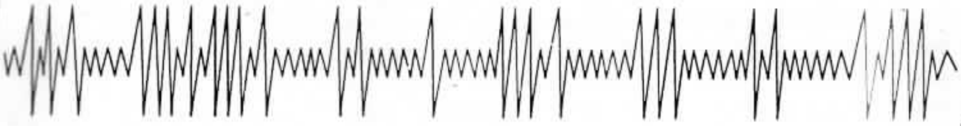
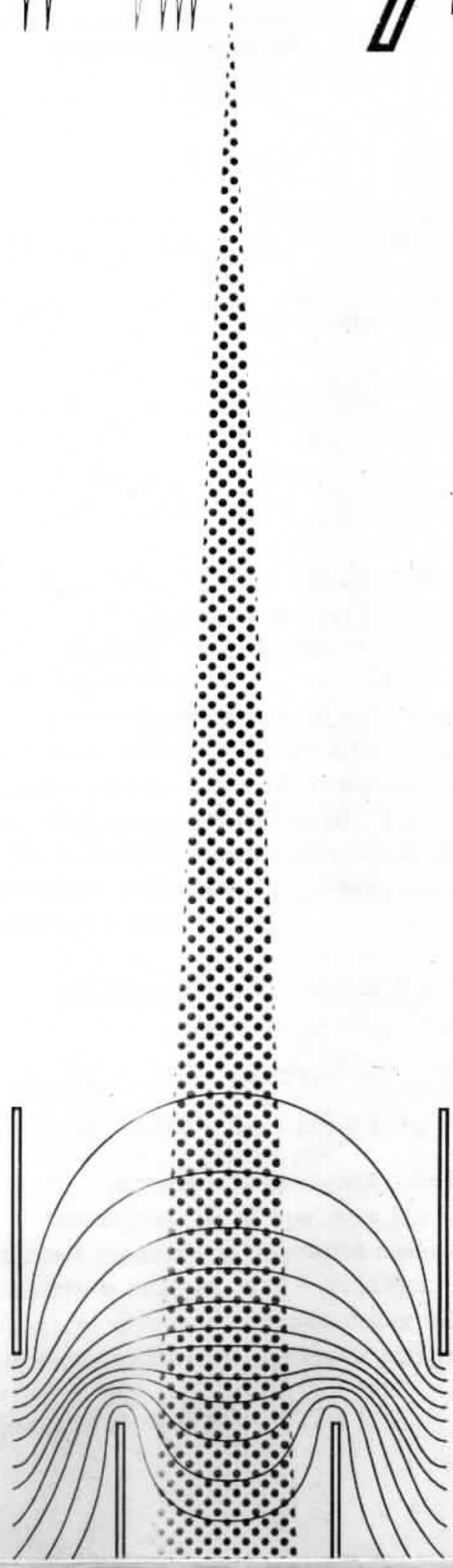
ISSN 0021-3454

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ



7–8

1995



УДК 621. 391

А. П. Трифонов, С. П. Алексеенко, Е. П. Нечаев

Воронежский государственный университет

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕИЗВЕСТНОЙ ПОЛОСОЙ ЧАСТОТ

Исследована помехоустойчивость измерителя величины и центральной частоты спектра мощности случайного процесса в условиях, когда полоса частот обрабатываемого процесса известна неточно. Вычислены допустимые значения ошибок в определении полосы частот процесса, при которых измеритель сохраняет работоспособность.

В работе [1] предложен способ аппаратурной реализации оптимального измерителя N_{s0} и центральной частоты l_0 спектра мощности

$$G(\omega,\, N_{s0},\, l_0) = \begin{cases} N_{s0}/2, & |\omega \pm l_0| \leqslant \Omega_0/2, \\ 0, & |\omega \pm l_0| > \Omega_0/2 \end{cases} \quad (1)$$

гауссовского узкополосного стационарного центрированного случайного процесса $s(t)$, принимаемого на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_{s0}.

Структура и характеристики измерителя приведены в работе [1] для условия, что полоса частот Ω_0 случайного процесса $s(t)$ априори точно известна. Однако полоса частот Ω_0 спектра мощности (1) во многих прикладных задачах не может быть известна с абсолютной точностью. В этом случае рассматриваемый в работе [1] измеритель можно использовать, заменив известное истинное значение полосы частот Ω_0 на некоторое ожидаемое (предполагаемое) значение полосы Ω^*. Получаемые при этом оценки N^*_{sm} и l^*_m величины и центральной частоты спектра мощности (1) естественно уже не будут оптимальными, так как в общем случае $\Omega^* \neq \Omega_0$. Оценки N^*_{sm} и l^*_m можно назвать квазиправдоподобными [2], поскольку при $\Omega^* = \Omega_0$ они переходят в оценки максимального правдоподобия.

Сигнальная составляющая выходного процесса $r(l)$ приемного устройства [1] при $\Omega^* \neq \Omega_0$ имеет форму трапеции, а шумовой компонент представляет собой недифференцируемый случайный процесс. Используя метод локально-марковской аппроксимации [3, 4] и решая соответствующие уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова, находим совместно с распределением надежной оценки l^*_m частоты l_0 ее смещение и рассеяние:

$$d_0 = 0; \quad (2)$$

$$\sigma_0^2 = \Omega_0^2 \left\{ \frac{|\delta\Omega|^2}{8} + \exp\left(\frac{z^2 D|\delta\Omega|}{S^2}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{z}{S}\sqrt{2D|\delta\Omega|}\right)\right] \times \right.$$
$$\times \left[\frac{13S^2}{z^4} + \frac{|\delta\Omega|}{z^2}(3S - 16D) + |\delta\Omega|^2\left(12\frac{D^2}{S^2} - 4\frac{D}{S}\right) + \right.$$
$$\left. + z^2|\delta\Omega|^3\frac{D^2}{S^3}\left(4 - \frac{16}{3}\frac{D}{S}\right)\right] + \left[\frac{|\delta\Omega| D^{1/2}}{z}\left(3 - \frac{22}{3}\frac{D}{S}\right) + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{13SD^{1/2}}{z^3} + 2z|\delta\Omega|^2\frac{D^{3/2}}{S^2}\left(\frac{4}{3}\frac{D}{S} - 1\right)\right]\sqrt{\frac{|\delta\Omega|}{\pi}}\right\}, \quad (3)$$

где $\delta\Omega = (\Omega^* - \Omega_0)/\Omega_0$; $z = \mu q_0$, здесь $\mu = T\Omega_0/2\pi$, $q_0 = N_{s0}/N_0$; $S = \mu[1 + (1 + q_0)^2]/2$; $D = \mu[(1 + q_0(1 - -\mathrm{sgn}(\delta\Omega))]/2)^2$, здесь $\mathrm{sgn}(x) = x/|x|$; $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности [3].

Точность выражений (2) и (3) возрастает с увеличением параметра μ при $\delta\Omega > -1/2$. При $\delta\Omega = 0$ характеристики (2) и (3) совпадают с результатами, полученными в работе [1]. Учитывая аномальные ошибки, уравнения для вычисления значений условных смещения и рассеяния оценки l^*_m можно записать в виде [1, 3, 4]:

$$d(l^*_m|N_{s0},\, l_0) = < l^*_m - l_0 > \simeq (1 - P_0) \times$$
$$\times [(L_1 + L_2)/2 - l_0]; \quad (4)$$

$$V(l^*_m|N_{s0},\, l_0) = < (l^*_m - l_0)^2 > \simeq p_0\sigma_0^2 + (1 - p_0) \times$$
$$\times [l_0^2 - l_0(L_1 + L_2) + (L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2)/3], \quad (5)$$

где p_0 — вероятность надежной оценки.

Аналогично [3, 4] при $m = (L_2 - L_1)/\Omega^* \gg 1$ и $\mu \gg 1$ вероятность надежной оценки можно представить в виде $p_0 = \int F_N(x)dF_s(x)$, где $F_N(x)$ и $F_s(x)$ — функции распределения величины абсолютного максимума процесса $r(l)/N_0$ в шумовой и сигнальной подобластях априорного интервала $[L_1, L_2]$. Распределение $F_N(x)$ при $m \gg 1$ примет вид [4]

$$F_N(x)=\begin{cases}\exp\left[-\dfrac{m}{\Gamma(\mu^*)}x^{\mu^*}\exp(-x)\right], & x \geqslant \mu^*;\\ 0, & x<\mu^*,\end{cases}$$

где $\mu^* = \mu(1+\delta\Omega) = T\Omega^*/2\pi$.

Согласно [5] функция распределения абсолютного максимума процесса в сигнальной области

$$F_s(x) = \int\limits_{-\infty}^{H}\Phi\left[\frac{H-y(1-|\Delta|)}{\sqrt{|\Delta|(2-|\Delta|)}}\right]\frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}}dy -$$

$$-\frac{|\Delta|H}{\sqrt{2\pi}}\exp(-H^2/2)\Phi\left(\sqrt{\frac{|\Delta|}{2-|\Delta|}}H\right) -$$

$$-\frac{\sqrt{|\Delta|(2-|\Delta|)}}{2\pi}\exp[-H^2/(2-|\Delta|)],$$

где

$$H = \frac{x-\mu[1+\delta\Omega+q_0\min(1,1+\delta\Omega)]}{\sqrt{\mu[1+\delta\Omega+\min(1,1+\delta\Omega)(2q_0+q_0^2)]}};$$

$$\Delta = \delta\Omega\Big/\left[1+\delta\Omega+\frac{|\delta\Omega|+\delta\Omega}{2\delta\Omega}(2q_0+q_0^2)\right], \quad |\Delta|\leqslant 1.$$

Аналогично [1] условные смещение и рассеяние квазиправдоподобной оценки N_{sm}^* представим следующим образом:

$$d(N_{sm}^*|N_{s0}, l_0) = \langle N_{sm}^* - N_{s0}\rangle \simeq$$
$$\simeq (N_0+N_{s0})(f_1-1); \tag{6}$$
$$V(N_{sm}^*|N_{s0}, l_0) = \langle (N_{sm}^* - N_{s0})^2\rangle \simeq$$
$$\simeq (N_0+N_{s0})^2(f_2-2f_1+1), \tag{7}$$

где

$$f_1 = \int\limits_{\mu^*/(1+q_0)}^{\infty}[1-F(x)]dx/\mu^* + (1+q_0)^{-1};$$

$$f_2 = 2\int\limits_{\mu^*/(1+q_0)}^{\infty}x[1-F(x)]dx/\mu^{*2} + (1+q_0)^{-2};$$

$$F(x) = F_N[(1+q_0)x]F_s[(1+q_0)x].$$

Точность выражений (4) — (7) возрастает с увеличением параметров m и μ. При $\mu^* \gg 1$ выражения (6), (7) принимают вид

$$d(N_{sm}^*|N_{s0}, l_0) \simeq \begin{cases}\dfrac{2(N_0+N_{s0})\sqrt{|\delta\Omega|}}{\sqrt{\mu\pi}(1+\delta\Omega)}, & \delta\Omega\leqslant 0;\\ -\dfrac{N_{s0}\delta\Omega}{1+\delta\Omega}+\dfrac{2N_0\sqrt{|\delta\Omega|}}{\sqrt{\mu\pi}(1+\delta\Omega)}, & \delta\Omega\geqslant 0;\end{cases}$$

$$V(N_{sm}^*|N_{s0}, l_0) \simeq \begin{cases}\dfrac{(N_0+N_{s0})^2}{\mu(1+\delta\Omega)^2}, \quad \delta\Omega\leqslant 0;\\ \dfrac{N_{s0}^2\delta\Omega^2}{(1+\delta\Omega)^2}-\dfrac{4N_0N_{s0}|\delta\Omega|^{3/2}}{\sqrt{\mu\pi}(1+\delta\Omega)^2}+\\ +\dfrac{1}{\mu}\left[\dfrac{(N_0+N_{s0})^2+2\delta\Omega N_0^2}{(1+\delta\Omega)^2}\right],\\ \delta\Omega\geqslant 0.\end{cases} \tag{8}$$

Проигрыш в точности оценки величины и центральной частоты спектра мощности (1) наблюдаемого случайного процесса будем характеризовать отношениями

$$\rho_1 = V(N_{sm}^*|N_{s0}, l_0)/V(N_{sm}|N_{s0}, l_0); \tag{9}$$

$$\rho_2 = V(l_m^*|N_{s0}, l_0)/V(l_m|N_{s0}, l_0), \tag{10}$$

где $V(N_{sm}|N_{s0}, l_0)$, $V(l_m|N_{s0}, l_0)$ — рассеяния оптимальных оценок величины и центральной частоты спектра мощности при $\delta\Omega = 0$ [1].

Используя формулы (5) и (8), выражения (9) и (10) при $\mu \gg 1$ можно записать в виде

$$\rho_1 = \begin{cases}(1+\delta\Omega)^{-2}, \quad \delta\Omega\leqslant 0;\\ \dfrac{(1+q_0)^2+2\delta\Omega}{(1+\delta\Omega)^2(1+q_0)^2}-\\ -\dfrac{4q_0|\delta\Omega|^{3/2}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}(1+\delta\Omega)^2(1+q_0)^2}+\\ +\mu\left[\dfrac{q_0\delta\Omega}{(1+\delta\Omega)(1+q_0)}\right]^2, \quad \delta\Omega\geqslant 0;\end{cases} \tag{11}$$

$$\rho_2 = \frac{q_0^4\mu^2|\delta\Omega|^2}{13(2+2q_0+q_0^2)^2}. \tag{12}$$

На рис. 1 приведены зависимости проигрыша в точности оценки величины спектра мощности ρ_1 от $\delta\Omega$ (11), на рис. 2 — зависимости проигрыша в точности оценки центральной частоты ρ_2 (12) от величины $|\delta\Omega|$. Здесь сплошные кривые построены при $\mu = 3\cdot 10^2$, штриховые — при $\mu = 10^3$; зависимости *1* рассчитаны для $q_0 = 1$, *2* — для $q_0 = 3$. Анализ этих зависимостей показывает, что отсутствие априорной информации о полосе частот наблюдаемого случайного процесса может привести к существенному снижению точности оценок, формируемых измерителем [1]. С ростом ошибки в определении полосы спектра мощности мощности $\delta\Omega$ в большей степени снижается точность оценки центральной частоты (см. рис. 2). Поэтому допустимый интервал ошибок в определении полосы спектра можно найти из соотношения (12) при заданном значении ρ_2:

$$|\delta\Omega| \leqslant \sqrt{13\rho_2}(2+2q_0+q_0^2)/(\mu q_0^2).$$

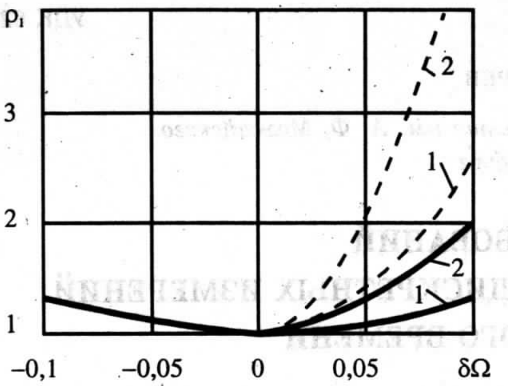


Рис. 1

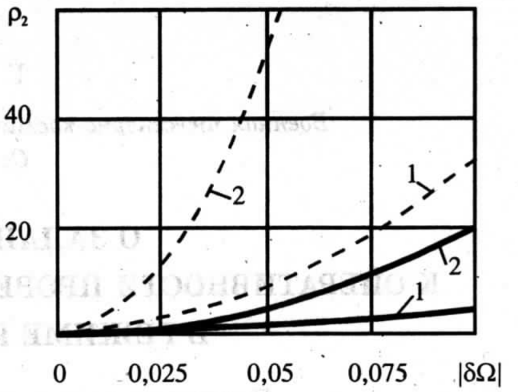


Рис. 2

Полученные результаты позволяют вычислить допустимую погрешность определения полосы частот спектра, которая обеспечивает требуемую точность оценок величины и центральной частоты спектра мощности случайного процесса, вырабатываемых измерителем [1].

Список литературы

1. *Трифонов А. П., Нечаев Е. П.* Совместная оценка величины и центральной частоты спектра мощности случайного процесса // Изв. вузов СССР. Приборостроение. 1988. Т. 31, № 12. С. 3–6.
2. *Мудров В. И., Кушко В. Л.* Методы обработки измерений. М.: Радио и связь, 1983.
3. *Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.* Совместное различие сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
4. *Трифонов А. П.* Прием случайного сигнала с неизвестной частотой // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, № 4. С. 749–757.
5. *Shepp L. A.* Radon-Nicodym Derivatives of Gaussian Measures // Ann. Math. Statist. 1966, Vol. 37, Apr. P. 321–354.

Рекомендована кафедрой радиофизики

Поступила в редакцию 27.04.93 г.