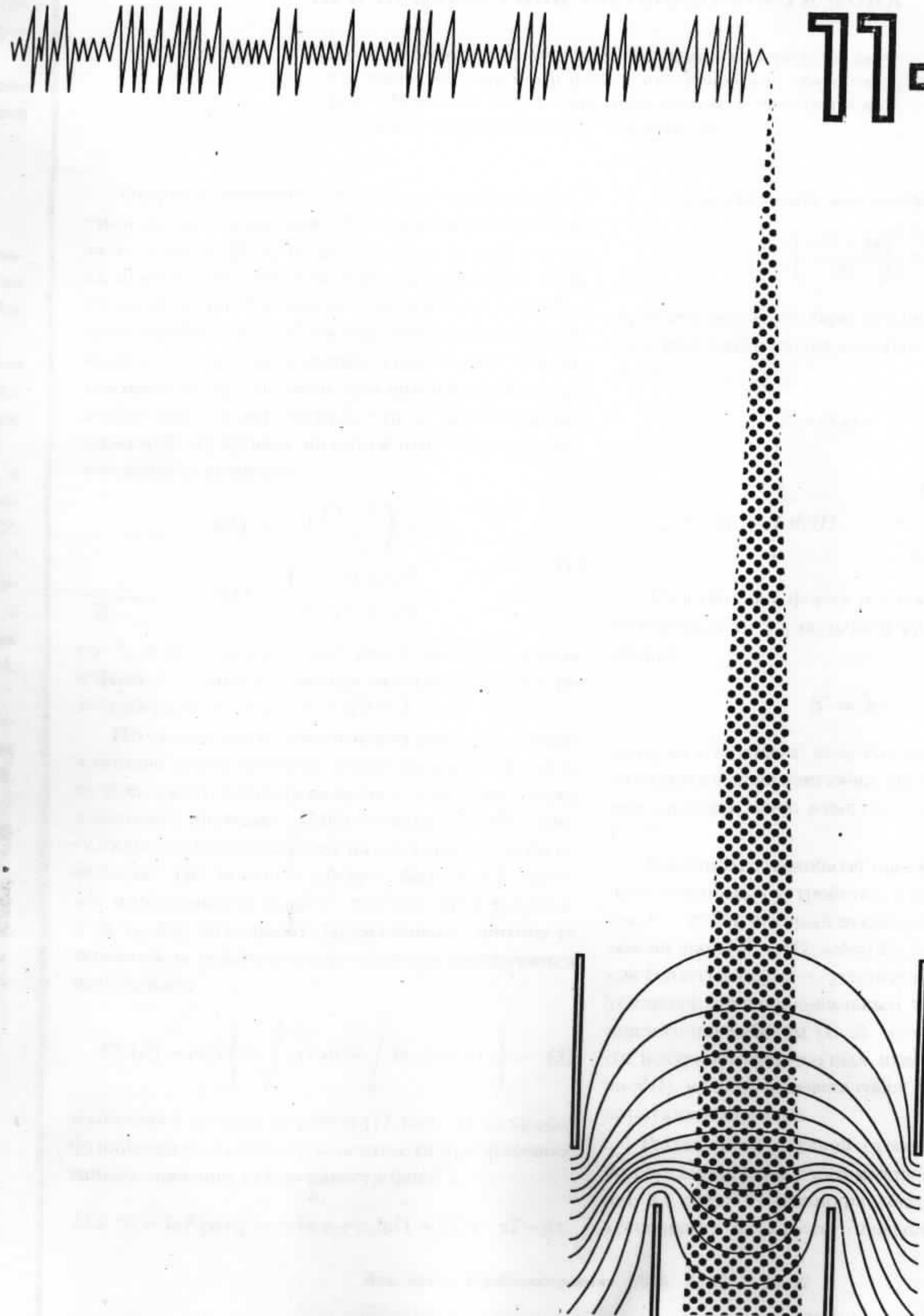
(150)

ISSN 0021-3454

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ



11-12

1995

УДК 621.391

А. П. Трифонов, Т. М. Овчинникова

Воронежский государственный университет

ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА ПРИ НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ФОНА

Предложена аппаратурная реализация измерителя интенсивностей сигнала и фона с пуассоновской статистикой. Найдены характеристики оценок и рассмотрена статистическая аттестация измерителя.

Оценка интенсивности оптического сигнала часто необходима при решении задач оптической связи и локации [1 3] и др. Однако в этих случаях фоновым излучением либо пренебрегают, либо считают его интенсивность априори известной. Полагая профиль интенсивности оптического сигнала прямоугольным, рассмотрим здесь оценку его интенсивности при условии, что интенсивность фона неизвестна. Будем считать, что во временно́м интервале $[0; T]$ процесс является пуассоновским, интенсивность которого

$$\rho(t) = \beta_0 I\left(\frac{t-\lambda}{\tau}\right) + \alpha_0;$$
$$I(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1/2; \\ 0, & |x| > 1/2, \end{cases} \tag{1}$$

где β_0 и α_0 — неизвестные интенсивности сигнала и фона, λ — момент прихода сигнала, τ — его длительность, $0 < \lambda - \tau/2$, $\lambda + \tau/2 < T$.

Пусть имеется независимый от наблюдаемой реализации канал синхронизации, на выходе которого формируется синхроимпульс с длительностью τ и временем прихода λ. Найдем вначале оценки максимального правдоподобия интенсивности сигнала, полагая, что задано некоторое ожидаемое значение интенсивности фона α^*, причем в общем случае $\alpha^* \neq \alpha_0$. Согласно работе [2] функционал плотности вероятности пуассоновского процесса определяется выражением

$$F[\pi(t)] = \exp\left\{-\int_0^T \rho(t)dt + \int_0^T \ln\rho(t)d\pi(t)\right\}, \tag{2}$$

подставив в которое формулу (1), найдем логарифм функционала плотности вероятности при фиксированном значении интенсивности фона α:

$$L(\alpha, \beta) = \ln F[\pi(t)] = \pi_T \ln\alpha + \pi_\tau \ln(1+\beta/\alpha) - \alpha T - \beta\tau.$$

Решая уравнение правдоподобия

$$\left[\frac{\partial L(\alpha, \beta)}{\partial\beta}\right]_{\tilde\beta} = 0,$$

находим условную (при фиксированном α) оценку максимального правдоподобия интенсивности сигнала

$$\tilde\beta = \tilde\beta(\alpha) = \frac{\pi_\tau}{\tau} - \alpha, \tag{3}$$

$$\pi_T = \int_0^T d\pi(t), \quad \pi_\tau = \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} d\pi(t). \tag{4}$$

Подставляя в формулу (3) ожидаемое значение интенсивности α^*, получаем квазиправдоподобную оценку

$$\beta^* = \tilde\beta(\alpha^*), \tag{5}$$

которая в случае $\alpha^* = \alpha_0$ совпадает с оценкой максимального правдоподобия интенсивности сигнала при априори точно известной интенсивности фона [1, 2].

Квазиправдоподобную оценку (5) можно получить с помощью устройства, показанного на рис. 1, где *1* — ключ, который открывается синхроимпульсом на время $[\lambda - \tau/2; \lambda + \tau/2]$; *2* — счетчик импульсов (интегратор); *3* — усилитель с коэффициентом усиления, пропорциональным τ^{-1}. Предполагаем, аналогично работам [1, 2], что на вход измерителя поступает производная пуассоновского процесса $\pi'(t)$, представляющая собой последовательность коротких импульсов.

Рассмотрим, в какой степени ошибка в выборе ожидаемого значения интенсивности фона влияет на точность квазиправдоподобной оценки интенсивности оптического сигнала. С этой целью

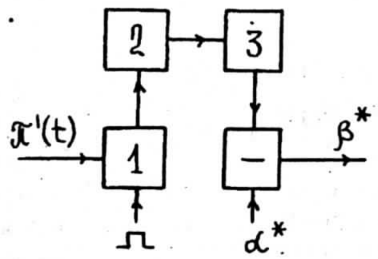


Рис. 1

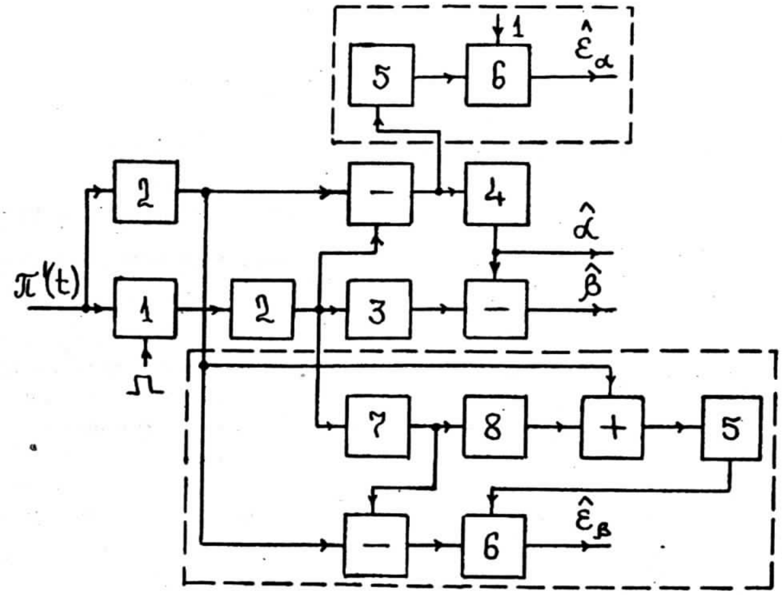


Рис. 2

найдем основные характеристики оценки (5). Используя формулы (1), (4) и (5), получаем выражения, определяющие условное смещение (систематическую ошибку)

$$b(\beta^*) = <\beta^* - \beta_0> = -\beta_0\delta/q \tag{6}$$

и условное рассеяние (средний квадрат ошибки)

$$V(\beta^*) = <(\beta^* - \beta_0)^2> = \frac{\beta_0^2(q^2 + q + \delta^2\mu)}{\mu q^2}, \tag{7}$$

где $\delta = (\alpha^* - \alpha_0)/\alpha_0$ — относительная погрешность выбора ожидаемого значения интенсивности фона, $q = \beta_0/\alpha_0$ — отношение сигнал/фон, $\mu = \beta_0\tau$ — среднее число сигнальных точек.

Если в формулах (6) и (7) принять $\delta = 0$, то характеристики оценки максимального правдоподобия интенсивности сигнала при априори известной интенсивности фона [1, 2] могут быть представлены как

$$b_0(\beta) = 0, \quad V_0(\beta) = \beta^2(1 + q)/\mu q. \tag{8}$$

Согласно выражениям (7) и (8) относительный проигрыш в точности оценки интенсивности сигнала, если не учитывать интенсивность фона, имеет вид

$$\chi = V(\beta^*)/V_0(\beta) = 1 + \delta^2\mu/q(1 + q),$$

отсюда следует, что при малых отношениях q сигнал/фон и большом среднем числе сигнальных точек μ проигрыш в точности оценки может быть значительным.

Повысить точность оценки интенсивности сигнала при неизвестной интенсивности фона можно путем определения совместной оценки максимального правдоподобия $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ параметров α_0 и β_0 интенсивности пуассоновского процесса (1). Решая систему уравнений правдоподобия [3]

$$\left[\frac{\partial L(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}\right]_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} = 0, \quad \left[\frac{\partial L(\alpha, \beta)}{\partial \beta}\right]_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} = 0,$$

находим

$$\hat{\alpha} = \frac{\pi_T - \pi_\tau}{T - \tau}, \quad \hat{\beta} = \frac{\pi_\tau}{\tau} - \frac{\pi_T - \pi_\tau}{T - \tau}. \tag{9}$$

Эти оценки можно получить с помощью устройства, показанного на рис. 2 (обозначения *1–3* соответствуют принятым для рис. 1, *4* — усилитель с коэффициентом усиления, пропорциональным $(T - \tau)^{-1}$).

Для оценок (9) аналогично формулам (6)–(8) получим соотношения, характеризующие смещение $b(\hat{\beta}) = b(\hat{\alpha}) = 0$, рассеяние

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\beta_0^2[m + q(m - 1)]}{\mu q(m - 1)}, \tag{10}$$

$$V(\hat{\alpha}) = \frac{\alpha_0^2 q}{\mu(m - 1)} \tag{11}$$

и коэффициент корреляции

$$R = \frac{<(\hat{\alpha} - \alpha_0)(\hat{\beta} - \beta_0)>}{\sqrt{<(\hat{\alpha} - \alpha_0)^2><(\hat{\beta} - \beta_0)^2>}} = -\frac{1}{\sqrt{m + q(m - 1)}}, \tag{12}$$

где $m = T/\tau$.

Отметим, что при $m \gg 1$ коэффициент корреляции совместных оценок $R \approx 0$, а рассеяние оценки максимального правдоподобия интенсивности сигнала $V(\hat{\beta})$ (10) при неизвестной интенсивности фона практически совпадает с рассеянием оценки интенсивности сигнала (8) при априори известной интенсивности фона. Очевидно, сравнение выражений (7) и (10) при конкретных значениях m, q, μ и δ позволяет сделать выбор между устройствами, изображенными на рис. 1 и 2, в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценки и простоте технической реализации.

Рассеяния (10), (11) совместных оценок максимального правдоподобия (9) неизвестных интенсивностей сигнала и фона зависят от истинных значений измеряемых величин α_0 и β_0 (являются условными). Поэтому рассчитать по формулам (10), (11) точность оценок можно только для предполагаемых (априори неизвестных) истинных значений интенсивностей.

Для контроля точности оценок целесообразно дополнить измеритель (см. рис. 2) устройством статистической аттестации оценок [4] (показано на рисунке штриховой линией). Это устройство предназначено для оценки рассеяний измеряемых величин, т. е. определяет одновременно точность измерений. Заменяя с этой целью в выражениях (10) и (11) истинные значения интенсивностей сигнала и фона их оценками максимального правдоподобия (9), получаем уравнения для оценок рассеяний (средних квадратов ошибок)

$$\widehat{V}(\hat{\beta}) = \frac{\pi_\tau(m^2-2m)+\pi_T}{\tau^2(m-1)^2},$$
$$\widehat{V}(\hat{\alpha}) = \frac{\pi_T-\pi_\tau}{\tau^2(m-1)^2}. \qquad (13)$$

В ряде приложений точность оценки удобнее характеризовать значениями относительной среднеквадратичной ошибки:

$$\varepsilon_\beta = \sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta})}\Big/\beta_0, \quad \varepsilon_\alpha = \sqrt{\widehat{V}(\hat{\alpha})}\Big/\alpha_0, \qquad (14)$$

которые, так же как и рассеяния (10) и (11), зависят от априори неизвестных интенсивностей сигнала и фона.

Определим оценки (14): заменяя истинные значения неизвестных интенсивностей α_0 и β_0 на их оценки (9) аналогично уравнениям (13), получаем

$$\hat{\varepsilon}_\beta = \sqrt{m\pi_\tau(m-2)+\pi_T}\Big/(m\pi_\tau-\pi_T),$$
$$\hat{\varepsilon}_\alpha = 1\Big/\sqrt{\pi_T-\pi_\tau}. \qquad (15)$$

Анализ показывает, что с ростом m и μ точность оценок тем выше, чем меньше значения самих оценок (15).

Устройство статистической аттестации (см. рис. 2) согласно (15) вырабатывает оценки относительных среднеквадратичных ошибок измерения. На рис. 2, кроме уже известных, приняты следующие обозначения: *5* — блок извлечения квадратного корня, *6* — делители, *7*, *8* — усилители с коэффициентами усиления m и $(m-2)$ соответственно. Если полученные в конкретном опыте величины оценок (15) недостаточно малы, то целесообразно в этом случае использовать измеритель, показанный на рис. 1, поскольку при $m \to 1$ измеритель, показанный на рис. 2, теряет работоспособность. В этом предельном случае коэффициент корреляции (12) между оценками $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ стремится к -1, а их рассеяния неограниченно возрастают.

Список литературы

1. *Гальярди Р. М., Карп Ш.* Оптическая связь. М.: Связь, 1978.
2. *Большаков И. А., Ракошиц В. С.* Прикладная теория случайных потоков. М.: Сов. радио, 1978.
3. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
4. *Фалькович С. Е., Хомяков Э. А.* Статистическая теория измерительных радиосистем. М.: Радио и связь, 1981.

Рекомендована кафедрой радиофизики

Поступила в редакцию 04.09.93 г.