ISSN 0033-8486

РАДИОТЕХНИКА

3 1996

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

РАДИОСИСТЕМЫ

Выпуск 10

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ № 2

ИПРЖР

УДК 621.391

Квазиправдоподобная оценка частоты случайного сигнала с неизвестной полосой частот

А.П.Трифонов, С.П.Алексеенко

Выполнен анализ измерителя частоты узкополосного гауссовского стационарного случайного сигнала на фоне белого шума; найдены характеристики оценок частоты экспоненциально коррелированного процесса и процесса с прямоугольным спектром мощности.

Во многих прикладных задачах статистической радиотехники необходимо производить измерение несущей частоты флуктуирующих сигналов [1—4]. При гауссовских флуктуациях радиосигнала эта задача сводится к оценке смещения ν_0 центральной частоты спектра мощности узкополосного центрированного гауссовского случайного процесса

$$S(t, \nu_0) = a(t)\cos[(\omega_0 + \nu_0)t + \varphi(t)],\ 0 < t < T, \tag{1}$$

принимаемого на фоне гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0. Согласно [1], спектр мощности сигнала (1)

$$G(\omega,\nu_0,\theta_0)=\frac{G_0}{2}\left[f\left(\frac{\omega_0+\nu_0+\omega}{\theta_0}\right)+f\left(\frac{\omega_0+\nu_0-\omega}{\theta_0}\right)\right], \tag{2}$$

где $f(x)$ определяет форму спектра мощности и удовлетворяет условиям $f(x)=f(-x)$, $\max f(x)=1$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx=1$, $\theta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega, \nu)d\omega\left[2\max G^2(\omega, \nu)\right]^{-1}$ — эквивалентная полоса частот сигнала (1).

В [2—4] оценка частоты случайного сигнала исследовалась в предположении, что полоса частот θ_0 сигнала (1) априори известна.

Цель работы — *определение потерь в точности оценки частоты ν_0 случайного сигнала* (1) *из-за незнания его полосы частот θ_0*.

Полагая сигнал (1) узкополосным ($\omega_0 >> \theta$ и $\omega_0 >> \nu$), обозначим $\mu = T\theta_0/2\pi$. При $\mu >> 1$ логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) [2, 3]

$$M(\nu,\theta)=\frac{1}{2}\int\limits_0^T x^2(t,\nu,\theta)dt-\frac{T\theta}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln[1+qf(x)]dx, \tag{3}$$

где $q = G_0/N_0$; $x(t, \nu, \theta)$ — отклик фильтра с передаточной функцией $H(i\omega, \nu, \theta)$ на реализацию наблюдаемых данных, причем

$$|H(i\omega,\nu,\theta)|^2=2G(\omega,\nu,\theta)\left\{N_0[N_0/2+G(\omega,\nu,\theta)]\right\}^{-1}.$$

Оценка максимального правдоподобия (ОМП) [1,2] несущей частоты сигнала (1) с неизвестной полосой частот определяется как соответствующая координата наибольшего максимума случайной функции двух переменных (3). Необходимость формирования случайной функции (3) двух переменных ν и θ во всей области их возможных значений существенно затрудняет техническую реализацию алгоритма максимального правдоподобия [2]. Поэтому целесообразно рассмотреть квазиправдоподобную оценку (КПО) частоты $\hat{\nu}$, которую определим как положение наибольшего максимума члена логарифма ФОП (3), зависящего от частоты ν

$$M^*(\nu) = M(\nu, \theta^*) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T x^2(t, \nu, \theta^*)dt, \tag{4}$$

где θ^* — ожидаемое значение полосы частот случайного сигнала.

В общем случае $\theta^* \neq \theta_0$, если же $\theta^* = \theta_0$, то, очевидно, КПО $\hat{\nu}$ совпадает с ОМП ν_m сигнала, полоса частот которого точно известна. Аналогично [2,3], для (4) справедливо представление

$$M^*(\nu) = S(\nu) + N(\nu) + C,$$

где $C = \mu\theta^* q\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)[1 + qf(x)]^{-1}dx/\theta_0$ — несущественная постоянная;

$$S(\nu)=\mu q^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f[x/(1+\delta\theta)]f[x-(\nu-\nu_0)/\theta_0]}{1+qf[x/(1+\delta\theta)]}dx \tag{5}$$

— сигнальная функция; $N(\nu) = M^*(\nu) - \langle M^*(\nu)\rangle$ — шумовая функция, которую при $\mu >> 1$ можно считать реализацией центрированного гауссовского процесса [1,2] с корреляционной функцией

$$K(\nu_1, \nu_2) = \mu q^2(1 + \delta\theta)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x - \nu_1/\theta^*)f(x - \nu_2/\theta^*)\{1 + qf[x(1 + \delta\theta) - \nu_0/\theta_0]\}^2}{[1 + qf(x - \nu_1/\theta^*)][1 + qf(x - \nu_2/\theta^*)]}dx. \tag{6}$$

Здесь $\delta\theta = (\theta^* - \theta_0)/\theta_0$. Когда $|\delta\theta| < 1$, сигнальная функция (5) достигает максимума при $\nu = \nu_0$. Если к тому же $\mu >> 1$, то оценка будет несмещенной, а дисперсия оценки [2]

$$D(\hat{\nu})= \frac{\partial^2 K(\nu_1,\nu_2)}{\partial\nu_1 \partial\nu_2}\left[\frac{\partial^2 S(\nu)}{\partial\nu^2}\right]^{-2}\Bigg|_{\nu_1=\nu_2=\nu=\nu_0} . \qquad (7)$$

Подставляя (5), (6) в (7), находим

$$D(\hat{\nu}) = \frac{\theta_0^2}{\mu q^2(1+\delta\theta)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2 \frac{\{1+qf[x(1+\delta\theta)]\}^2}{[1+qf(x)]^4}dx \times$$

$$\times \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\frac{f[x/(1+\delta\theta)]}{1+qf[x/(1+\delta\theta)]}dx\right\}^{-2} . \qquad (8)$$

Отметим, что при $\mu \to \infty$, т. е. при неограниченном увеличении времени наблюдения T, согласно (8), $D(\hat{\nu}) \to 0$. Полагая в (8) $\delta\theta = 0$, получаем дисперсию ОМП ν_m несущей частоты случайного сигнала с априори известной полосой частот [2,3]

$$D(\nu_m) = D(\hat{\nu})\big|_{\delta\theta=0} =$$

$$= \theta_0^2\left\{\mu q^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2\left[1+qf(x)\right]^{-2}dx\right\}^{-1} . \qquad (9)$$

Формула (8) для дисперсии КПО несколько упрощается в случае слабого сигнала (когда $q << 1$) и принимает вид

$$D(\hat{\nu}) = \frac{\theta_0^2}{\mu q^2(1+\delta\theta)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2 dx \times$$

$$\times \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2f(x)}{dx^2}f\left[x/(1+\delta\theta)\right]dx\right\}^{-2} .$$

В качестве примера рассмотрим оценку частоты случайного сигнала, форма спектра мощности которого описывается функцией

$$f(x) = \left[1+(\pi x/2)^2\right]^{-1} . \qquad (10)$$

Спектру мощности (2), (10) соответствует корреляционная функция

$$K(\tau,\nu) = (G_0\theta/2\pi)\exp(-2\theta|\tau|/\pi)\cos(\omega_0+\nu)\tau .$$

Подставляя (10) в (8) и (9), находим проигрыш в точности оценки частоты из-за незнания полосы случайного сигнала

$$\chi_1 = \frac{D(\hat{\nu})}{D(\nu_m)} = [(1+\delta\theta)\sqrt{1+q}((1+\delta\theta)^4+10(1+\delta\theta)^2+5)+$$

$$+5(1+\delta\theta)^4+2(1+\delta\theta)^2(4q+5)+1]\times$$

$$\times\ [(1+\delta\theta)\sqrt{1+q}+1]\{2(1+\delta\theta)(1+\sqrt{1+q})\}^{-3} . \qquad (11)$$

На рис.1 приведены зависимости проигрыша χ_1 (11) от $\delta\theta$. Кривая *1* построена для $q = 0{,}3$; *2* — $q = 1$; *3* — $q = 5$. Анализ приведенных кривых показывает, что зависимость проигрыша χ_1 от q относительно слабая. Кроме того, как видно из (11), величина χ_1 не зависит от μ, т. е. увеличение времени наблюдения T не изменяет проигрыша в точности КПО.

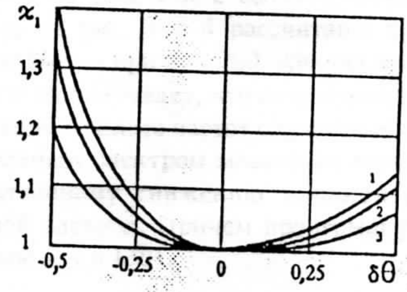

Рис. 1

На рис.2 приведены зависимости проигрыша χ_1 от q. Кривая *1* построена для $\delta\theta = +0{,}1$; *2* — $\delta\theta = -0{,}1$; *3* — $\delta\theta = +0{,}3$; *4* — $\delta\theta = -0{,}3$. Как следует из рис.2, при $|\delta\theta| < 0{,}3$ дисперсия КПО превосходит дисперсию ОМП не более чем на 10 %.

Формулы (8) — (10) позволяют определить

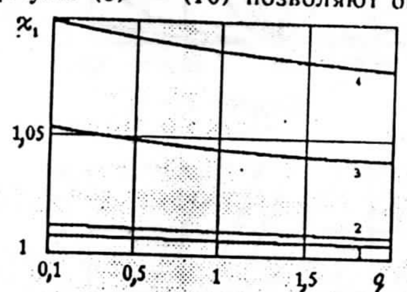

Рис. 2

потери в точности оценки частоты случайного сигнала из-за незнания его полосы частот лишь в случае, когда функция $f(x)$, описывающая форму спектра мощности, дифференцируема хотя бы дважды. Однако, полученные формулы не применимы, когда спектр мощности (2) сигнала (1) недифференцируем. Таким спектром мощности обладает полосовой случайный сигнал [4], для которого $f(x) = 1$ (когда $|x| < 1/2$) и $f(x) = 0$ (когда $|x| > 1/2$). При обработке полосового сигнала функции (5), (6) принимает вид

$$S(\nu) \equiv S(l) =$$

$$= \frac{\mu q^2}{1+q}\begin{cases}\min(1,1+\delta\theta), |l-l_0| \le |\delta\theta|/2,\\ \max(1+\delta\theta/2-|l-l_0|,0), |l-l_0|>|\delta\theta|/2,\end{cases} \qquad (12)$$

$$K(\nu_1,\nu_2)\equiv K(l_1,l_2)=\mu q^2\{\max(1+\delta\theta-|l_1-l_2|,0)+$$

$$+\ q(2+q)\max[1+\delta\theta-\max(l_1,l_2,l_0+\delta\theta/2)+ \qquad (13)$$

$$+\ \min(l_1,l_2,l_0-\delta\theta/2),0]\}(1+q)^{-2},$$

где $l = \nu/\theta_0$, $l_i = \nu_i/\theta_0$, $i = 0, 1, 2$.

Используя (12), (13) и метод локально-марковской аппроксимации [4,5], для дисперсии КПО частоты полосового сигнала получаем

$$D(\hat{\nu}) = \theta_0^2 \left\{ \frac{\delta\theta^2}{8} + \exp\left(\frac{z^2 A\,|\delta\theta|}{B^2}\right) \times \right.$$

$$\times \left[1-\Phi\left(\frac{z}{B}\sqrt{2A\,|\delta\theta|}\right)\right] \left[\frac{13B^2}{z^4} + \frac{|\delta\theta|}{z^2}\left(3B-16A\right) + \right.$$

$$\left. + 4\delta\theta^2 \frac{A}{B}\left(\frac{3A}{B}-1\right) + 4|\delta\theta|^3 z^2 \frac{A^2}{b^3}\left(1-\frac{4A}{3B}\right)\right] +$$

$$+ \left[\frac{13B\sqrt{A}}{z^3} + \frac{|\delta\theta|\sqrt{A}}{z}\left(3-\frac{22A}{3B}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + 2z\delta\theta^2 \frac{A\sqrt{A}}{B^2}\left(\frac{4A}{3B}-1\right)\right] \sqrt{\frac{|\delta\theta|}{\pi}} \right\}. \qquad (14)$$

Здесь $z^2 = \mu q^2$, $A = [1+q(|\delta\theta|-\delta\theta)/2|\delta\theta|]^2$, $B = [1+(1+q)^2]/2$, $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности [1].

Отметим, что при $\mu \to \infty$, т. е. при неограниченном увеличении времени наблюдения из (14) имеем: $D(\hat{\nu}) \to (\theta^* - \theta_0)^2/8 > 0$. Отсюда следует, что рассеяние КПО центральной частоты полосового случайного сигнала ограничено снизу постоянной величиной, в общем случае не равной нулю. Поэтому незнание ширины спектра мощности полосового случайного сигнала, в отличие от сигнала с дифференцируемым спектром мощности, не позволяет добиться идеальной точности КПО центральной частоты посредством неограниченного увеличения времени наблюдения T.

Полагая в (14) $\delta\theta = 0$, получаем дисперсию ОМП ν_m центральной частоты случайного полосового сигнала с априори известной полосой частот [4]

$$D(\hat{\nu}_m) = D(\hat{\nu})\Big|_{\delta\theta=0} = 13\pi^2[1+(1+q)^2]^2/2T^2q^4. \qquad (15)$$

Формула (14) для дисперсии КПО центральной частоты полосового сигнала несколько упрощается в случае слабого сигнала, когда $q \ll 1$. При этом $A \simeq B \simeq 1$ и (14) принимает вид

$$D(\hat{\nu}) = \theta_0^2 \left\{ \frac{\delta\theta^2}{8} + \exp\left(z^2|\delta\theta|\right)\left[1-\Phi(z\sqrt{2|\delta\theta|})\right] \times \right.$$

$$\times \left[\frac{13}{z^4} - \frac{13|\delta\theta|}{z^2} + 8\delta\theta^2 - \frac{4}{3}z^2|\delta\theta|^3\right] +$$

$$\left. + \left[\frac{13}{z^3} - \frac{13|\delta\theta|}{3z} + \frac{2}{3}z\delta\theta^2\right]\sqrt{\frac{|\delta\theta|}{\pi}} \right\}.$$

Используя (14) и (15), находим проигрыш в точности оценки частоты из-за незнания полосы частот случайного сигнала $\chi_2 = D(\hat{\nu})/D(\nu_m)$.

На рис.3 приведены зависимости проигрыша χ_2 от $\delta\theta$, на рис.4 — зависимости χ_2 от q. Графики на рис.3 и 4 построены для тех же значений q, $\delta\theta$, что и графики на рис. 1 и 2 соответственно. Сплошные кривые на рис. 3 и 4 рассчитаны при $\mu = 100$, а штриховые — при $\mu = 200$. Анализ зависимостей на рис. 3 и 4 показывает, что отсутствие априорной информации о полосе частот случайного сигнала с прямоугольным спектром мощности может привести к существенному снижению точности оценки центральной частоты. Причем проигрыш увеличивается с ростом q, μ и $|\delta\theta|$.

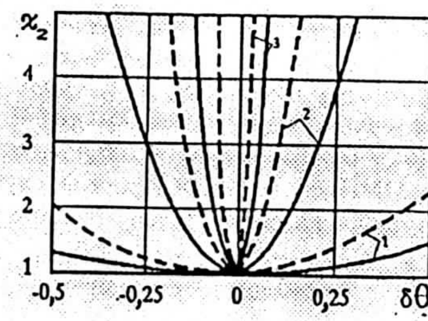

Рис. 3

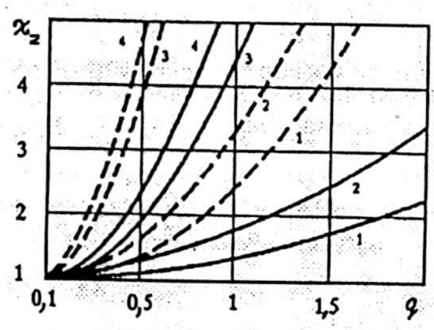

Рис. 4

Полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор между КПО и ОМП частоты случайного сигнала в зависимости от имеющейся априорной информации о его полосе частот и от требований к точности измерения частоты.

Литература

1. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982.
2. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978.
3. *Трифонов А.П., Енина Е.П.* — Радиотехника, 1983, №8.
4. *Трифонов А.П.* — Радиотехника и электроника, 1980, т.25, №4.
5. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986.

Поступила после доработки 6 сентября 1993 г.