(155)
р-250/
996/5

ISSN 0033-8486

РАДИОТЕХНИКА

5 1996

Системы магистральной и сотовой радиосвязи
(новый раздел в журнале)

Общесистемные вопросы и помехоустойчивая обработка цифровых и аналоговых сигналов
(тематическая подборка)

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

РАДИОСИСТЕМЫ

Выпуск 12

Работы Центрального научно-исследовательского института радиоэлектронных систем — к 25-летию ЦНИИРЭС

ВНИМАНИЕ! ПОДПИСКА...

ИПРЖР

УДК 621.391

Оценка периода следования оптических импульсов

А.П.Трифонов, М.Б.Беспалова

Для регулярной и разрывной аппроксимаций интенсивности оптических импульсов определена дисперсия оценки максимального правдоподобия.

В системах оптической связи и локации широко применяются последовательности оптических импульсов [1,2]. Необходимость в оценке их периода следования возникает при измерении скорости цели в оптической локации [1], при обеспечении синхронизации в подвижных системах связи [2] и т.п.

Цель работы — *получение аналитических выражений для дисперсии оценки максимального правдоподобия периода следования импульсов различной формы при наличии оптического шума.*

Пусть на интервале времени $[0,T]$ наблюдается последовательность N оптических импульсов с интенсивностью

$$s(t,\theta)=\sum_{k=0}^{N-1} s_k(t-k\theta)=\sum_{k=0}^{N-1} a_k f[(t-k\theta)/\tau], \qquad (1)$$

где a_k — максимальная интенсивность одного импульса, θ — период следования, $\tau=\int_{-\infty}^{\infty} s_k^2(t)\,dt \times \times [\max s_k^2(t)]^{-1}$ — эквивалентная длительность импульса последовательности. Функция $f(x)\geq 0$ описывает форму интенсивности импульса и нормирована так, что $\max f(x)=1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx=1$. Полагаем, что последовательность (1) наблюдается на фоне оптического шума с интенсивностью ν, и интервал наблюдения больше длительности всей последовательности (1), т.е. $T>N\theta$. Тогда обработке доступна реализация $\pi(t)$ пуассоновского процесса с интенсивностью $\nu+s(t,\theta_0)$. Скважность последовательности (1) считаем не слишком малой ($\theta/\tau>2...3$) так, что отдельные импульсы не перекрываются. В этом случае логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) с точностью до несущественного слагаемого имеет вид [3]

$$L(\theta)=\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^T \ln\{1+a_k f[(t-k\theta)/\tau]/\nu\}\,d\pi(t). \qquad (2)$$

В результате оценка максимального правдоподобия (ОМП) периода следования $\hat\theta$ представляет собой положение абсолютного (наибольшего) максимума функции (2)

$$\hat\theta=\arg\sup L(\theta). \qquad (3)$$

Для определения характеристик ОМП (3) представим (2) в виде суммы сигнальной и шумовой функций [4] $L(\theta)=S(\theta)+N(\theta)+c$,

$$S(\theta)=\langle L(\theta)\rangle-c=$$

$$=\tau\sum_{k=0}^{N-1} a_k\int_{-\infty}^{\infty} f[x+k(\theta-\theta_0)/\tau]\ln[1+a_k f(x)/\nu]\,dx,$$

$$c=\nu\tau\sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}\ln[1+a_k f(x)/\nu]\,dx, \qquad (4)$$

где θ_0 — истинное значение периода следования.

Шумовая функция $N(\theta)=L(\theta)-\langle L(\theta)\rangle$ является реализацией случайного процесса, причем $\langle N(\theta)\rangle=0$,

$$K(\theta_1,\theta_2)=\langle N(\theta_1)N(\theta_2)\rangle=$$

$$=\tau\sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}[\nu+a_k f(x-k\theta_0/\tau)]\times$$

$$\times\ln[1+a_k f(x-k\,\theta_1/\tau)/\nu]\times$$

$$\times\ln[1+a_k f(x-k\,\theta_2/\tau)/\nu]\,dx. \qquad (5)$$

При выводе сигнальной функции (4) и корреляционной функции шумовой функции (5) предполагалось, что

$$\max\{|\theta-\theta_0|,|\theta_1-\theta_0|,|\theta_2-\theta_0|,|\theta_1-\theta_2|\}<$$

$$<\frac{2\tau}{(N-1)}. \qquad (6)$$

Поэтому формулы (4), (5) описывают центральные пики соответствующих функций [4]. Сигнальная функция (4) достигает максимума при $\theta=\theta_0$, так что выходное отношение сигнал-шум (ОСШ) для всей последовательности (1) будет равно [4]

$$=S^2(\theta_0)/K(\theta_0,\theta_0)=$$

$$=\tau\left[\sum_{k=0}^{N-1} a_k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln[1+a_k f(x)/\nu]dx\right]^2\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}[\nu+a_k f(x)]\{\ln[1+a_k f(x)/\nu]\}^2 dx\right]^{-1}. \qquad (7)$$

В дальнейшем полагаем, что ОСШ (7) достаточно велико, так что ОМП (3) обладает высокой апостериорной точностью [4].

Рассмотрим вначале регулярный случай [5], т.е. потребуем, чтобы $s_k(t)$ в (1) были дифференцируемы хотя бы дважды. Решая уравнение правдоподобия методом малого параметра [4], в качестве которого используем величину $1/z_N$, для дисперсии ОМП находим выражение

$$D(\theta)=\left\{\frac{\partial^2 K(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\left[\frac{d^2S(\theta)}{d\theta^2}\right]^{-2}\right\}_{\theta_0}=$$

$$=\left\{\int_0^T\left[\frac{\partial s(t,\theta)}{\partial\theta}\right]^2[\nu+s(t,\theta)]^{-1}dt\right\}_{\theta_0}^{-1}. \qquad (8)$$

Подставим (1) в (8) и выполним дифференцирование, учитывая, что рассматриваемые импульсы не перекрываются. Получаем дисперсию ОМП в виде

$$D(\theta)=\tau\left\{\sum_{k=0}^{N-1}k^2a_k^2\int_{-\infty}^{\infty}[df(x)/dx]^2[\nu+a_k f(x)]^{-1}dx\right\}^{-1}. \qquad (9)$$

Это выражение несколько упрощается, если максимальные интенсивности всех оптических импульсов последовательности одинаковы, так что

$$a_0=a_1=\ldots=a_{N-1}. \qquad (10)$$

Тогда дисперсия ОМП (9) для последовательности регулярных импульсов перепишется как

$$D(\theta)=6\tau^2\left\{mqN(N-1)(2N-1)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}[df(x)/dx]^2[1+qf(x)]^{-1}dx\right\}^{-1}, \qquad (11)$$

где $m=a_0\tau$, а $q=a_0/\nu$ — отношение максимальной интенсивности одного импульса к интенсивности оптического шума.

Конкретизируем формулу (11) для последовательности оптических импульсов, интенсивность которых описывается кривой Лоренца [6]

$$f(x)=[1+(\pi x/2)^2]^{-1}. \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (11), имеем для дисперсии ОМП выражение

$$D_L(\theta)=6\tau^2(1+\sqrt{1+q})^3\times$$

$$\times[mqN(N-1)(2N-1)(3+\sqrt{1+q})]^{-1}. \qquad (13)$$

В частности, если при достаточно большом z_N (7) интенсивность каждого импульса последовательности мала, т.е.

$$q<<1, \qquad (14)$$

то (13) принимает вид: $D_L(\theta)\approx 12\tau^2/mqN(N-1)\times\times(2N-1)$. При больших значениях интенсивности каждого импульса или при весьма малых значениях интенсивности оптического шума, когда

$$q>>1, \qquad (15)$$

из (13) находим

$$D_L(\theta)\approx 6\tau^2/mN(N-1)(2N-1). \qquad (16)$$

Следовательно, при выполнении (15) точность ОМП периода следования оптических импульсов не зависит от q и интенсивности оптического шума.

Полученные выражения для дисперсии ОМП периода следования применимы лишь для оптических импульсов, интенсивности которых дифференцируемы. Однако, реальные оптические импульсы часто имеют весьма короткие фронты, что позволяет их успешно аппроксимировать разрывными функциями. Среди таких функций наиболее распространенной является аппроксимация в виде прямоугольного импульса. Для таких оптических импульсов в (1) следует положить

$$f(x)=I(x)=\begin{cases}1, & |x|<1/2,\\ 0, & |x|>1/2.\end{cases} \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (4), (5) и полагая, что выполняется (6), для сигнальной функции и корреляционной функции шумовой функции находим выражения

$$S(\theta)=A_S-B_S\,|\,\theta-\theta_0\,|\,, \tag{18}$$

$$K(\theta_1,\theta_2)=A_N-B_N\,|\,\theta_1-\theta_2\,|\,-$$

$$-C_N[\max(\theta_0,\theta_1,\theta_2)-\min(\theta_0,\theta_1,\theta_2)\,], \tag{19}$$

где

$$A_S=\tau\sum_{k=0}^{N-1}a_k\ln(1+a_k/\nu)\,,$$

$$B_S=\sum_{k=0}^{N-1}k\,a_k\ln(1+a_k/\nu)\,,$$

$$A_N=\tau\sum_{k=0}^{N-1}(\nu+a_k)[\ln(1+a_k/\nu)\,]^2,$$

$$B_N=\nu\sum_{k=0}^{N-1}k\,[\ln(1+a_k/\nu)\,]^2,$$

$$C_N=\sum_{k=0}^{N-1}k\,a_k\,[\ln(1+a_k/\nu)\,]^2.$$

Согласно (18) и (19), у сигнальной и корреляционной функций не существует второй производной по оцениваемому параметру при $\theta=\theta_1=\theta_2=\theta_0$. Следовательно, сигнал с интенсивностью (1),(17) является разрывным по параметру θ. Найти дисперсию ОМП периода следования в этом случае можно с помощью метода локально-марковской аппроксимации [5]

$$D_R(\theta)=13(2B_N+C_N)^2/8B_S^4=$$

$$=26\left\{\sum_{k=0}^{N-1}k\,(2\nu+a_k)\,[\ln(1+a_k/\nu)\,]^2\right\}^2\times$$

$$\times\left[2\sum_{k=0}^{N-1}k\,a_k\ln(1+a_k/\nu)\right]^{-4}.$$

Это выражение несколько упрощается при одинаковых интенсивностях всех импульсов (10) и принимает вид

$$D_R(\theta)=\frac{13\tau^2(2+q)^2}{2m^2q^2N^2(N-1)^2}=\frac{13\tau^2(2+q)^2}{2z_N^4(1+q)^2}\,, \tag{20}$$

где

$$z_N^2=mNq/(1+q) \tag{21}$$

— ОСШ для всей последовательности (7).

В частности, для импульсов с малой интенсивностью (14) из (20) имеем $D_R(\theta)\approx\dfrac{26\tau^2}{m^2q^2N^2(N-1)^2}$, а при больших значениях интенсивности оптических импульсов (15) из (20) находим $D_R(\theta)\approx\dfrac{13\tau^2}{2m^2N^2(N-1)^2}$. Как и в регулярном случае (16), при выполнении (15) дисперсия ОМП периода следования импульсов с прямоугольной формой интенсивности (17) не зависит от q и интенсивности оптического шума.

Сопоставляя (13) и (20), видим, что с ростом числа импульсов дисперсия ОМП периода следования оптических импульсов с прямоугольной интенсивностью (17) убывает как N^{-4}, в то время как при дифференцируемой интенсивности (12) дисперсия ОМП убывает лишь как N^{-3}. Из (13) и (20) находим

$$\chi=\frac{D_L(\theta)}{D_R(\theta)}=\frac{12mN(N-1)q(1+\sqrt{1+q})^3}{13(2N-1)(2+q)^2(3+\sqrt{1+q})}=$$

$$=\frac{12z_N^2(N-1)(1+q)(1+\sqrt{1+q})^3}{13(2N-1)(2+q)^2(3+\sqrt{1+q})}\,. \tag{22}$$

Очевидно, $\chi>1$, когда

$$z_N>z_0=\left[\frac{13(2N-1)(2+q)^2(3+\sqrt{1+q})}{12(N-1)(1+q)(1+\sqrt{1+q})^3}\right]^{1/2}. \tag{23}$$

Согласно (22), выигрыш в точности ОМП периода следования импульсов с интенсивностью (17) по сравнению с точностью ОМП периода следования импульсов с интенсивностью (12) возрастает с увеличением ОСШ z_N (21). Однако этот выигрыш не может неограниченно возрастать с увеличением ОСШ (7). Действительно, реальные оптические импульсы всегда имеют интенсивности с фронтами конечной длительности [1,2,6]. Поэтому прямоугольная форма (17) при больших значениях ОСШ z_N (21) может оказаться слишком грубой аппроксимацией интенсивности реального оптического импульса.

Для определения верхней границы выигрыша в точности оценки (22) рассмотрим последовательность оптических импульсов с квазипрямоугольной формой интенсивности, которую аналогично [7] запишем в виде

$$f(x)=\begin{cases}(1+\pi^2[x+(1-\delta)/2]^2/4\delta^2)^{-1}, & x<-(1-\delta)/2,\\ 1, & |x|<(1-\delta)/2,\\ (1+\pi^2[x-(1-\delta)/2]^2/4\delta^2)^{-1}, & x>(1-\delta)/2,\end{cases} \tag{24}$$

где $\delta\le 1$ — относительная доля полной энергии импульса (24), сосредоточенная в его фронтах. В частности, при $\delta=1$ квазипрямоугольный импульс совпадает с кривой Лоренца (12), а при $\delta\to 0$ переходит в прямоугольный импульс (17). Подставляя (24) в (11), для дисперсии ОМП периода следования оптических импульсов с интенсивностью квазипрямоугольной формы получаем выражение

$$D_q(\theta)=6\,\delta\,\tau^2(1+\sqrt{1+q})^3\times$$

$$\times[mqN(N-1)(2N-1)(3+\sqrt{1+q})]^{-1}. \tag{25}$$

Эта формула верна лишь асимптотически с ростом ОСШ z_N (7). Причем, чем меньше δ, тем при больших z_N выражение (25) начинает удовлетворительно описывать дисперсию ОМП [5]. Поэтому, если $\delta<<1$, а z_N не слишком велико, более точной может оказаться формула (20), полученная методом локально-марковской аппроксимации.

Аналогично [5], можно показать, что при малой длительности фронтов интенсивности реального импульса применение прямоугольной (17) и квазипрямоугольной (24) аппроксимаций позволяет получить для дисперсии ОМП периода следования выражение

$$D_\theta=\max[D_R(\theta),D_q(\theta)]. \tag{26}$$

Определим выигрыш в точности ОМП периода следования оптических импульсов с интенсивностью квазипрямоугольной формы (24) по сравнению с последовательностью импульсов, интенсивность которых описывается кривой Лоренца (12), как $\chi_\theta=D_L(\theta)/D_\theta$. Используя (13), (20), (25) и (26), находим

$$\chi_\theta=\begin{cases}\dfrac{12z_N^2(N-1)(1+q)(1+\sqrt{1+q})^3}{13(2N-1)(2+q)^2(3+\sqrt{1+q})}, & z_N\le z_0/\sqrt{\delta},\\ 1/\delta, & z_N\ge z_0/\sqrt{\delta},\end{cases} \tag{27}$$

где z_N — ОСШ (21), а z_0 имеет вид (23).

Выражение (27) определяет условия, при которых применение оптических импульсов с квазипрямоугольной формой интенсивности позволяет обеспечить более высокую точность ОМП периода следования, чем при использовании оптических импульсов с интенсивностью, форма которой описывается кривой Лоренца. Таким образом, если z_N фиксировано, то не следует уменьшать относительную длительность фронтов квазипрямоугольного импульса (24) менее величины $\delta_{\min}=13(2+q)^2\times\times(3+\sqrt{1+q})(2N-1)[12mqN(N-1)(1+\sqrt{1+q})^3]^{-1}==z_0^2/z_N^2$. Действительно, выбор $\delta<\delta_{\min}$ при заданном z_N не увеличивает выигрыша (27) в точности ОМП периода следования оптических импульсов.

● Найдены аналитические выражения для дисперсии оценки максимального правдоподобия периода следования оптических импульсов и сформулированы рекомендации по выбору параметров их интенсивности, которые обеспечивают повышение точности оценки.

Приведенные результаты получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. *Воробьев В.И.* Оптическая локация для радиоинженеров. — М.: Радио и связь, 1983.
2. *Гальярди Р.М., Карп Ш.* Оптическая связь. — М.: Связь, 1978.
3. *Большаков И.А., Ракошиц В.С.* Прикладная теория случайных потоков. — М.: Сов. радио, 1978.
4. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978.
5. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986.
6. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
7. *Ярлыков М.С.* Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1980.

Поступила после доработки 3 ноября 1994 г.