

162

Р- 50/4/
956/41/12

162

Том 41, Номер 12

Декабрь 1996

ISSN 0033-8494

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

РАДИОТЕХНИКА и ЭЛЕКТРОНИКА

Главный редактор
Ю.В. Гуляев

полупроводниковой аппаратуре обработки наблюдаемых данных на базе ЭЦГА с интерферометром Фабри-Перо и представлены результаты статистического моделирования синхронизирующего алгоритма.

1. ЛОГАРИФМ ФУНКЦИОНАЛА ОТНОШЕНИЯ ПРЯМОПОДОБИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Векторными источниками когерентного ГИ могут быть двойные звезды и пульсары [1, 2]. Спектроскоп [2], пульсар излучает периодическую антенноуловимую волну с плотностью потока энергии H_0 , начальной фазой Ψ_0 и длиной волны λ_0 . Векторные источники когерентного ГИ могут быть двойные звезды и пульсары. В качестве примера ЭЦГА рассматривается антенна с интерферометром Фабри-Перо [2]. Накачка интерферометра осуществляется посредством когерентного

$$U(\theta_0, \varphi_0) = \sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0$$

$$Q = 4\pi/\lambda_0(1-R), \quad \delta = 4\pi/\lambda_0$$

$$X = \eta\rho/\lambda_0, \quad B = \sqrt{3}aG/\delta$$

G – гравитационная постоянная; λ – длина волны Планка; c – скорость света в вакууме; ω – $2\pi\nu/\lambda_0$ – частота лазерной накачки; I – интенсивность интерферометра; R – показатель качества зеркала интерферометра; η – квантовая эффективность фотодетектора; θ и φ – углы направления падающей волны в сферической системе координат, связанной с интерферометром; λ_0 – длина волны естественного дробового шума "темного" фотодетектора [2].

Векторные источники когерентного ГИ могут быть двойные звезды и пульсары. В качестве примера ЭЦГА рассматривается антенна с интерферометром Фабри-Перо [2]. Накачка интерферометра осуществляется посредством когерентного

МАИК "НАУКА"



"НАУКА"

НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

УДК 621.391

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ДЕТЕКТОРОМ С ИНТЕРФЕРОМЕТРОМ ФАБРИ–ПЕРО

© 1996 г. А. П. Трифонов, С. В. Ветров

Поступила в редакцию 03.07.93 г.

Найдены структура и условные характеристики обнаружителя при использовании резонатора Фабри–Перо. Приведены результаты статистического моделирования алгоритма обнаружения на ЭВМ.

ВВЕДЕНИЕ

Оценочные расчеты потенциальной чувствительности различных типов гравитационных детекторов проведены в [1, 2]. Для уверенного обнаружения непрерывного гравитационного излучения (ГИ) необходимо длительное время наблюдения. Это время может быть в среднем заметно сокращено при использовании последовательных (двух-пороговых) алгоритмов обнаружения [3, 4].

В настоящее время разрабатывается новый тип гравитационного детектора, в котором для регистрации ГИ используется интерферометр с лазерной накачкой [1, 2]. Планируется [1] создание лазерно-интерферометрических гравитационных обсерваторий, которые, возможно, позволят обеспечить необходимую чувствительность. Очевидно, что совершенствование техники гравитационно-волнового эксперимента должно сопровождаться разработкой эффективных статистических алгоритмов обработки выходного сигнала лазерно-интерферометрической гравитационной антенны (ЛИГА).

Ниже проведены синтез и анализ адаптивного последовательного алгоритма обработки наблюдаемых данных на выходе ЛИГА с интерферометром Фабри–Перо и представлены результаты статистического моделирования синтезированного алгоритма.

1. ЛОГАРИФМ ФУНКЦИОНАЛА ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Внеземными источниками непрерывного ГИ могут быть двойные звезды и пульсары [1, 2]. Согласно [2], пульсар излучает периодическую гравитационную волну с плотностью потока мощности W_0 , начальной фазой ψ_0 и линейно убывающей частотой $\omega_g(t) = \omega_0(1 - t/\tau^*)$, где ω_0 – частота ГИ в момент начала наблюдения $t = 0$, τ^* – постоянная времени вращения пульсара. В качестве примера ЛИГА рассмотрим антенну с интерферометром Фабри–Перо [2]. Накачка интерферометра осуществляется посредством когерентного

лазерного излучения мощностью p с длиной волны λ_e . Воздействие на интерферометр непрерывного ГИ вызывает модуляцию интенсивности оптического излучения [2], которое на выходе интерферометра преобразуется при помощи фотодетектора в доступный для обработки электрический сигнал. Следовательно, на выходе фотодетектора наблюдается пуассоновский случайный процесс $\xi(t)$ с интенсивностью [2, 5]

$$\lambda_1(t) = \lambda' \rho_1(\delta) \{1 + \rho_2(\delta) B \sqrt{W_0} U(\theta_0, \varphi_0) \times \\ \times \cos[\omega_0(1 - t/2\tau^*)t - \psi_0]/\omega_0\} + \lambda, \quad (1)$$

при наличии ГИ и

$$\lambda_0(t) = \lambda' \rho_1(\delta) + \lambda, \quad (2)$$

при его отсутствии. Здесь

$$\rho_1(\delta) = (1 - R)^2 / [(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\delta/2)],$$

$$\rho_2(\delta) = RQ(1 - R) \sin \delta / [(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\delta/2)],$$

$$U(\theta_0, \varphi_0) = \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0,$$

$$Q = 4\pi l / \lambda_e (1 - R), \quad \delta = 4\pi l / \lambda_e,$$

$$\lambda' = \eta p / \hbar \omega_e; \quad B = \sqrt{8\pi G / c^3},$$

G – гравитационная постоянная; $\hbar$ – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме; $\omega_e = 2\pi c / \lambda_e$ – частота лазерной накачки; l – длина плеча интерферометра; R – показатель качества зеркал интерферометра; η – квантовая эффективность фотодетектора; θ_0 и φ_0 – углы прихода гравитационной волны в сферической системе координат, связанной с интерферометром; λ_e – интенсивность естественного дробового шума (“темнового” тока) фотодетектора [5].

Для реализации процедуры последовательного обнаружения необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) как функцию текущего времени наблюдения τ и параметров ГИ [3, 4]. Согласно [6],

логарифм ФОП может быть представлен в виде стохастического интеграла по пуассоновской мере:

$$L(\tau, W, \psi) = \int_0^\tau \ln[\lambda_1(t)/\lambda_0(t)] d\xi(t) - \int_0^\tau [\lambda_1(t) - \lambda_0(t)] dt, \quad (3)$$

где W, ψ – плотность потока мощности и начальная фаза ГИ, в общем случае априори неизвестные наблюдателю. Прогнозируемые значения плотности потока мощности непрерывного ГИ пульсаров достаточно малы [1, 2]:

$$W_0 \leq 10^{-11} \text{ Дж/см}^2 \text{ с}. \quad (4)$$

Полагая к тому же $\omega_0 \tau \gg 1$, что обычно выполняется в гравитационно-волновом эксперименте [1, 2], логарифм ФОП (3) приближенно представим в виде

$$L(\tau, W, \psi) = \frac{BU(\theta_0, \varphi_0)\rho_2(\delta)}{\omega_0(1+\varepsilon)} \sqrt{W} \times \int_0^\tau \cos[\omega_0(1-t/2\tau^*)t - \psi] [d\xi(t) - \lambda' \rho_1(\delta)(1+\varepsilon)dt] - \frac{B^2 U^2(\theta_0, \varphi_0) \rho_2^2(\delta)}{\omega_0^2(1+\varepsilon)^2} W \int_0^\tau d\xi(t), \quad (5)$$

где $\varepsilon = \lambda'/\lambda' \rho_1(\delta)$. В выражении (5) опущены члены более высокого порядка малости, чем $B^2 W/\omega_0^2 \leq 10^{-29}$.

Одним из способов преодоления априорной неопределенности относительно параметров ГИ W и ψ является применение метода максимального правдоподобия [7, 8, 13]. В соответствии с этим методом неизвестные параметры ГИ в логарифме ФОП (5) заменяют на их оценки максимального правдоподобия (ОМП) [7, 8]. Замена неизвестных параметров в (5) на их ОМП сводится к максимизации логарифма ФОП (5) по W и ψ . В результате находим решающую статистику

$$u(\tau) = \max_{W, \psi} L(\tau, W, \psi) = [X^2(\tau) + Y^2(\tau)] / \int_0^\tau d\xi(t), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \end{Bmatrix} &= \int_0^\tau \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} [\omega_0(1-t/2\tau^*)t] \times \\ &\times [d\xi(t) - \lambda' \rho_1(\delta)(1+\varepsilon)dt]. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу малости W_0 (4), последовательную процедуру целесообразно применять [9–11], начиная с некоторой фиксированной длительности наблюдения $\tau_0 > 0$. На интервале $[0, \tau_0]$ осуществляется предварительное накопление данных на выходе ЛИГА. Соответственно, при $\tau \geq \tau_0$ необходимо сравнивать решающую статистику (6) с постоянными порогами a и b , $0 < a < b$. Если $u(\tau) \geq b$, то выносится решение о наличии ГИ, а если $u(\tau) \leq a$ – решение о его отсутствии. Пороги a и b последовательного обнаружителя выбирают из условия обеспечения требуемых значений вероятностей ошибок 1- и 2-го родов [3, 4].

Для характерных в гравитационно-волновом эксперименте значений мощности накачки $p = 1$ Вт и квантовой эффективности фотодетектора $\eta = 0.3 \dots 1$ [2] интенсивность пуассоновского потока фотоэлектронов равна

$$\lambda' = 10^{17} \dots 10^{18} \text{ с}^{-1}. \quad (8)$$

Поэтому уже при $\tau \geq 1$ с квадратуры (7) можно с высокой точностью аппроксимировать реализациями гауссовских случайных процессов [5, 6, 12]. Найдем два первых момента этих процессов. При отсутствии ГИ (2) имеем

$$\langle X(\tau) \rangle = \langle Y(\tau) \rangle = 0, \quad (9)$$

$$K_{XY} = \langle X(\tau)Y(\tau) \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} K_X(\tau_1, \tau_2) &= K_Y(\tau_1, \tau_2) = \langle X(\tau_1)X(\tau_2) \rangle = \\ &= \langle Y(\tau_1)Y(\tau_2) \rangle = D_0 \min(\tau_1, \tau_2), \end{aligned} \quad (10)$$

где $D_0 = \mu_0 \rho_1(\delta)(1+\varepsilon)/2\tau_0$; $\mu_0 = \lambda' \tau_0$ – среднее за время τ_0 число фотоэлектронов, вызванных лазерной накачкой. При наличии ГИ (1)

$$\begin{Bmatrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \end{Bmatrix} = z(\tau) \sqrt{D_0 \tau} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \Psi_0, \quad (11)$$

а корреляционные функции квадратур в силу (4) совпадают с (10). В формуле (11)

$$\begin{aligned} z^2(\tau) &= [\langle X(\tau) \rangle^2 + \langle Y(\tau) \rangle^2] / D_0 \tau = \\ &= B^2 U^2(\theta_0, \varphi_0) \rho_2^2(\delta) \rho_1(\delta) \mu_0 W_0 \tau / 2 \omega_0^2 (1+\varepsilon) \tau_0 \end{aligned} \quad (12)$$

– отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе линейной части приемника, формирующего решающую статистику $u(\tau)$ (6) [7].

Кроме того, для интеграла в (6) допустима аппроксимация

$$\int_0^\tau d\xi(t) \approx \mu_0 \rho_1(\delta)(1+\varepsilon) \tau / \tau_0. \quad (13)$$

Действительно, в силу (4) и (8)

$$\left\langle \left[\int_0^{\tau} d\xi(t) - \mu_0 \rho_1(\delta)(1 + \varepsilon)\tau/\tau_0 \right]^2 \right\rangle [\mu_0 \rho_1(\delta) \times$$

$$\times (1 + \varepsilon)\tau/\tau_0]^{-2} = [\mu_0 \rho_1(\delta)(1 + \varepsilon)\tau/\tau_0]^{-1} \approx 10^{-18}$$

уже при $\tau \geq 1$ с. Тогда решающую статистику (6) с учетом (9)–(13) можно записать как [8]

$$u(\tau) = [X_0^2(\tau) + Y_0^2(\tau)]/2, \quad (14)$$

где

$$\begin{Bmatrix} X_0(\tau) \\ Y_0(\tau) \end{Bmatrix} = iz(\tau) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \psi_0 + \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}} w_{\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}}(\tau/\tau_0). \quad (15)$$

Здесь при наличии ГИ (1) $i = 1$, $i = 0$ при его отсутствии (2); $w_k(\tau)$, $k = 1, 2$, – независимые стандартные винеровские процессы [13]. Как нетрудно убедиться, функции (7) и их аппроксимации (15) имеют одинаковые два первых момента (9)–(12). Хотя функции (7) в общем случае не являются гауссовскими, при выполнении (8) и $\tau \geq 1$ с коэффициенты асимметрии и эксцесса их распределений имеют порядок малости соответственно 10^{-15} и 10^{-11} . Это позволяет с достаточной для большинства практических приложений точностью аппроксимировать решающую статистику (6) функцией (14). Отметим также, что согласно [12, 13] точность такой аппроксимации растет с увеличением μ_0 . Одномерная плотность вероятности аппроксимации решающей статистики (14) имеет вид [13]

$$W_{0i}(x, \tau) = \exp\{-[x + iz^2(\tau)]/2\} \times I_0[iz(\tau)\sqrt{x}/2], \quad (16)$$

$x \geq 0$, где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента.

2. УСЛОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ

Найдем условные характеристики последовательного обнаружителя при фиксированном ОСШ $z_0^2 = z^2(\tau_0)$ (12). Когда нет ГИ (2), решающая статистика $u(\tau)$ (14) является реализацией квадрата рэлеевского марковского случайного процесса [11, 13] с коэффициентами сноса и диффузии: $M_0(u, \tau) = (1 - u)/\tau$, $K_0(u, \tau) = 2u/\tau$. Для расчета вероятности ошибки 1-го рода (ложной тревоги) и средней длительности наблюдения (СДН) при отсутствии ГИ введем процесс $\tilde{u}(v) = u(\tau(v))$ с новым временем $v = \ln(\tau/\tau_0)$. Процесс $\tilde{u}(v)$ также является марковским [13] и имеет коэффициенты сноса и диффузии: $\tilde{M}_0(\tilde{u}) = 1 - \tilde{u}$, $\tilde{K}_0(\tilde{u}) = 2\tilde{u}$.

Применяя к процессу $\tilde{u}(v)$ методику [4], найдем вероятность ложной тревоги $\alpha(a, b)$ и СДН $\tau_N(a, b)$ при отсутствии ГИ:

$$\alpha(a, b) = \ln(b/a)[Ei(b) - Ei(a)], \quad (17)$$

$$\tau_N(a, b) = \tau_0 \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(\tau) W(\tau, x_0) \times \right. \\ \left. \times W_{00}(x_0) d\tau dx_0 + 1 \right]. \quad (18)$$

Здесь $W(\tau, x_0)$ – условная плотность вероятности момента первого пересечения процессом $\tilde{u}(\tau)$ одного из порогов a или b , которая удовлетворяет уравнению Понтрягина [13]:

$$\frac{\partial W(\tau, x)}{\partial \tau} = \frac{\tilde{K}_0(x)}{2} \frac{\partial^2 W(\tau, x)}{\partial x^2} + \tilde{M}_0(x) \frac{\partial W(\tau, x)}{\partial x} \quad (19)$$

с начальными и граничными условиями $W(0, x) = 0$; $W(\tau, a) = W(\tau, b) = \delta(\tau)$; $W_{00}(x_0) = W_{00}(x_0, \tau_0)$ – плотность вероятности (16) при $\tau = \tau_0$ и $i = 0$. Решая уравнение (19) и подставляя его решение в (18), получаем СДН $\tau_N(a, b)$ при отсутствии ГИ:

$$\tau_N(a, b) \approx \tau_0 \{ C_1 [\exp(-a)(1 - Ei(a)) - \exp(-b)(1 - Ei(b))] + C_2 [\exp(-a)(a + 2) - \exp(-b)(b + 2)] \} + \tau_0, \quad (20)$$

где $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \exp(t) dt/t$ – интегральная показательная функция;

$$C_1 = (a - b)/q; \quad C_2 = [(1 - a)Ei(a) - (1 - b)Ei(b) + \exp(a) - \exp(b)]/q; \\ q = (1 - a)(1 - b)(Ei(a) - Ei(b)) + \exp(a)(1 - b) - \exp(b)(1 - a).$$

При наличии ГИ (1) затруднительно определить вероятность ошибки 2-го рода (пропуска сигнала) и СДН. Поэтому рассмотрим вначале случай не слишком малых ОСШ z_0^2 , полагая по-прежнему, что выполняется (4). Аналогично [11] представим решающую статистику (14) с учетом (15) как [7, 8]

$$u(\tau) \approx z^2(\tau)/2 + \sqrt{\tau_0/\tau} z(\tau) \{ w_1(\tau/\tau_0) \cos \psi_0 + w_2(\tau/\tau_0) \sin \psi_0 \}, \quad (21)$$

где опущены члены $O(1)$. При фиксированном значении ψ_0 функция (21) является реализацией гауссовского марковского случайного процесса с коэффициентами сноса и диффузии: $M_1 = z_0^2/2\tau_0$, $K_1 = z_0^2/\tau_0$ [11, 13]. Тогда, используя методику [3, 4],

для вероятности пропуска $\beta(a, b, z_0)$ и СДН $\tau_s(a, b, z_0)$ при наличии ГИ имеем [9]

$$\beta(a, b, z_0) = [\Phi(f + z_0/2) - \Phi(h + z_0/2) + \exp(-a)\Phi(h - z_0/2) - \exp(-b)\Phi(f - z_0/2)] [\exp(-a) - \exp(-b)]^{-1}, \quad (22)$$

$$\tau_s(a, b, z_0) = (2\tau_0/z_0) \{ (f - z_0/2)\Phi(f - z_0/2) - (h - z_0/2)\Phi(h - z_0/2) - \beta(a, b, z_0)(f - h) - (2\pi)^{-1/2} \{ \exp[-(h - z_0/2)^2] - \exp[-(f - z_0/2)^2/2] \} \} + \tau_0. \quad (23)$$

В выражениях (22) и (23) $f = b/z_0$, $h = a/z_0$ — нормированные пороги, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности.

Однако вследствие приближенного характера формулы (21) по мере уменьшения z_0^2 точность расчета вероятности пропуска (22) и СДН (23) уменьшается. Найдем приближенные выражения для вероятности пропуска $\tilde{\beta}(a, b)$ и СДН $\tilde{\tau}_s(a, b)$, справедливые при малых z_0 . Пренебрегая в (14) членами порядка малости z_0 и z_0^2 , следуя [4, 10], получим

$$\tilde{\beta}(a, b) = 1 - \alpha(a, b) + \exp(-a)Ei(a) - \exp(-b)Ei(b), \quad (24)$$

$$\tilde{\tau}_s(a, b) = \tau_N(a, b). \quad (25)$$

Тогда для последовательного алгоритма целесообразно выбирать пороги a и b следующим образом [10]:

$$a = \max(a_1, a_2(z_0)), \quad b = \min(b_1, b_2(z_0)). \quad (26)$$

Это позволит избежать чрезмерного увеличения СДН. В формулах (26) пороги a_1 , b_1 рассчитываются по формулам (17) и (24), а пороги $a_2(z_0)$, $b_2(z_0)$ — по формулам (17) и (22) в соответствии с заданными вероятностями ошибок обнаружения α_0 и β_0 .

Введем время наблюдения T , необходимое для обеспечения заданных значений α_0 и β_0 при использовании непоследовательного (однопорогового) алгоритма обнаружения. Тогда выигрыш в результате применения последовательного обнаружителя может быть охарактеризован величинами $\delta_s = T/\tau_s$ и $\delta_N = T/\tau_N$ соответственно при наличии и отсутствии ГИ. На рис. 1 представлены зависимости $\delta_s(z_0)$ (штриховая линия) и $\delta_N(z_0)$ (сплошная линия), рассчитанные по формулам (19), (23), (25) с учетом (26) при типичных для гравитационно-волнового эксперимента значениях $\alpha_0 = 0.05$, $\beta_0 = 0.3$ [2].

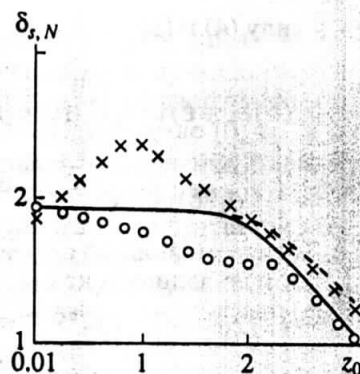


Рис. 1. Средний выигрыш в длительности наблюдения.

Анализ рис. 1 показывает, что применение последовательной процедуры обнаружения позволяет значительно сократить СДН. В частности, при малых ОСШ $z_0 \leq 0.01$, характерных для гравитационно-волнового эксперимента, время наблюдения при использовании последовательного алгоритма в среднем в 2 раза меньше, чем при использовании однопорогового алгоритма.

3. АДАПТИВНЫЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ ОБНАРУЖИТЕЛЬ

Согласно (26), пороги обнаружителя зависят от величины ОСШ z_0 , которая определяется априори неизвестным значением W_0 плотности потока мощности ГИ. Поэтому предлагаем использовать адаптивный вариант выбора порогов последовательного обнаружителя [11]. Адаптивный обнаружитель для каждого момента времени τ должен определять по решающей статистике $u(\tau)$ (6) оценку $\hat{z}_0^2(\tau)$ неизвестного ОСШ z_0^2 , а затем находить пороги a и b (26) в соответствии с заданными вероятностями α_0 и β_0 . Одним из возможных вариантов адаптации по неизвестному параметру W_0 является его оценивание по методу максимального правдоподобия [7, 8, 14].

В соответствии с определением ОМП [7, 8] для ОМП W_m плотности потока мощности ГИ можно записать

$$W_m(\tau) = \underset{W}{\operatorname{argsup}} L(\tau, W), \quad (27)$$

где

$$L(\tau, W) = \sup_{\psi} L(\tau, W, \psi).$$

Используя представление логарифма ФОП в виде (5), находим

$$W_m(\tau) = \frac{4(1 + \epsilon)^2 \omega_0}{BU(\theta_0, \phi_0) \rho_2(\delta)} u(\tau). \quad (28)$$

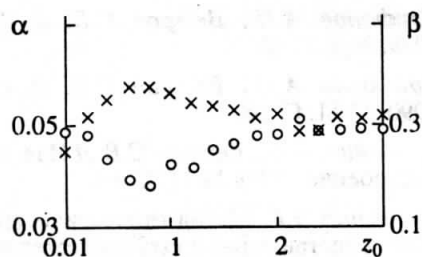


Рис. 2. Вероятности ошибок обнаружения.

Подставляя (28) в (12) и используя (13), получаем оценку ОСШ:

$$\hat{z}_0^2(\tau) \approx 2u(\tau)\tau_0/\tau. \quad (29)$$

Таким образом, адаптивный последовательный обнаружитель должен сравнивать решающую статистику $u(\tau)$ (6) с двумя случайными порогами, найденными по (26) для текущей оценки $\hat{z}_0^2(\tau)$ (29). При расчете вероятностей ошибок обнаружения и СДН возникают существенные математические трудности [14]. Однако из [7, 8] следует, что оценка $\hat{z}_0^2(\tau)$ (29) при увеличении времени наблюдения сходится в среднеквадратическом к истинному значению ОСШ z_0^2 . Поэтому можно ожидать, что характеристики адаптивного последовательного обнаружителя с увеличением СДН сходятся к условным характеристикам, полученным выше для фиксированных значений ОСШ z_0^2 [14]. Отметим, что для гравитационно-волнового эксперимента характерны значительные длительности наблюдения: $\sim 10^6$ с [2].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Полученные выше выражения для характеристик последовательного обнаружителя являются приближенными. С целью установления границ их применимости, а также проверки работоспособности и эффективности адаптивного последовательного обнаружителя выполнено его статистическое моделирование на ПЭВМ IBM.

Поскольку функция (14) аппроксимирует решающую статистику (6) с достаточной для большинства приложений точностью, в процессе моделирования формировались дискретные отсчеты ее квадратур (15). Шумовые составляющие [7, 8] квадратур (15) формировались из некоррелированной стационарной последовательности гауссовских случайных чисел с параметрами распределения (0, 1) методом взвешенного суммирования [15]. На основе сформированных дискретных последовательностей реализации решающей статистики (15) аппроксимировались

ступенчатыми функциями. Шаг дискретизации выбирали равным $0.01\tau_0$, так что относительная среднеквадратичная погрешность аппроксимации не превышала 10%. Процесс формирования дискретных отсчетов продолжался до достижения ими одного из порогов последовательного обнаружителя. После чего выносилось решение о наличии или отсутствии ГИ. Для ускорения процесса моделирования применен метод зависимых испытаний [16]. Число обрабатываемых реализаций выбирали так, чтобы с вероятностью 0.9 границы доверительного интервала отклонялись от экспериментальных значений не более чем на 10 ... 15%.

Для каждого дискретного отсчета решающей статистики (14) в соответствии с (29) определяли текущую оценку ОСШ. Затем на основе решения систем трансцендентных уравнений (17), (22) и (17), (24) для заданных значений $\alpha_0 = 0.05$ и $\beta_0 = 0.3$ вычисляли требуемые пороги a и b (26). Эти системы уравнений решали методом наискорейшего спуска [17]. При этом до начала процесса моделирования определяли пороги a, b для ряда фиксированных (узловых) значений ОСШ z_0^2 . В процессе моделирования для текущей оценки ОСШ (29) значения порогов a и b вычисляли методом линейной интерполяции.

На рис. 1 нанесены результаты статистического моделирования адаптивного последовательного обнаружителя: кружочки при отсутствии ГИ, крестики при его наличии. В процессе моделирования контролировали значения вероятностей ошибок обнаружения. Полученные в результате моделирования значения вероятностей ложной тревоги α и пропуска β представлены на рис. 2 в обозначениях рис. 1.

Сравнение результатов статистического моделирования и теоретических расчетов (рис. 1 и 2) показывает их удовлетворительное согласование при $z_0 > 2$ и $z_0 \leq 0.2$. Кроме того, результаты моделирования подтверждают целесообразность применения адаптивного последовательного обнаружителя для сокращения СДН в гравитационно-волновом эксперименте.

Приведем пример численной оценки СДН. Рассмотрим ЛИГА с параметрами [2] $p = 1$ Вт, $\eta = 1$, $\lambda_e = 5 \times 10^{-7}$ м, $l = 10$ м, $R = 0.9999$. В качестве гипотетического источника непрерывного ГИ выберем пульсар NP0532. Параметры его ГИ имеют прогнозируемые значения $\omega_0 = 400$ рад/с, $\tau^* = 10^{11}$ с, $W = 10^{-11}$ Дж/см² с [1, 2]. При $\alpha_0 = 0.05$, $\beta_0 = 0.3$ и $\tau_0 = 10^4$ с ($z_0 = 0.01$) требуемая СДН составляет приблизительно 5×10^5 с (около недели). Дальнейшее сокращение СДН возможно за счет увеличения мощности накачки и длины базы интерферометра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грищук Л.П. // Успехи физ. наук. 1989. Т. 61. № 2. С. 297.
2. Бичак И., Руденко В.Н. Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. М.: Изд-во МГУ, 1987.
3. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978.
4. Сосулин Ю.Г., Фишман М.М. Теория последовательных решений и ее применение. М.: Радио и связь, 1987.
5. Курикиша А.А. Квантовая оптика и оптическая локация. М.: Сов. радио, 1973.
6. Большаков И.А., Ракошиц В.С. Прикладная теория случайных потоков. М.: Сов. радио, 1978.
7. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
8. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение и оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
9. Трифонов А.П., Ветров С.В. // Радиотехника. 1989. № 2. С. 65.
10. Трифонов А.П., Ветров С.В. // Радиотехника. 1990. № 11. С. 26.
11. Трифонов А.П., Ветров С.В. // Изв. вузов. Приборостроение. 1990. № 11. С. 14.
12. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. Киев: Наук. думка, 1973.
13. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
14. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1978.
15. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971.
16. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М.: Сов. радио, 1971.
17. Хемминг Р.В. Численные методы. М.: Мир, 1972.