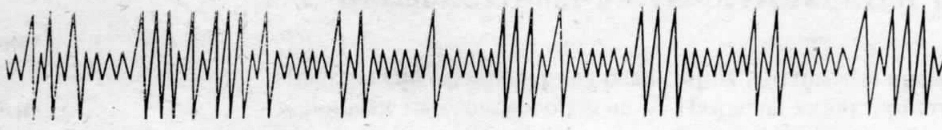
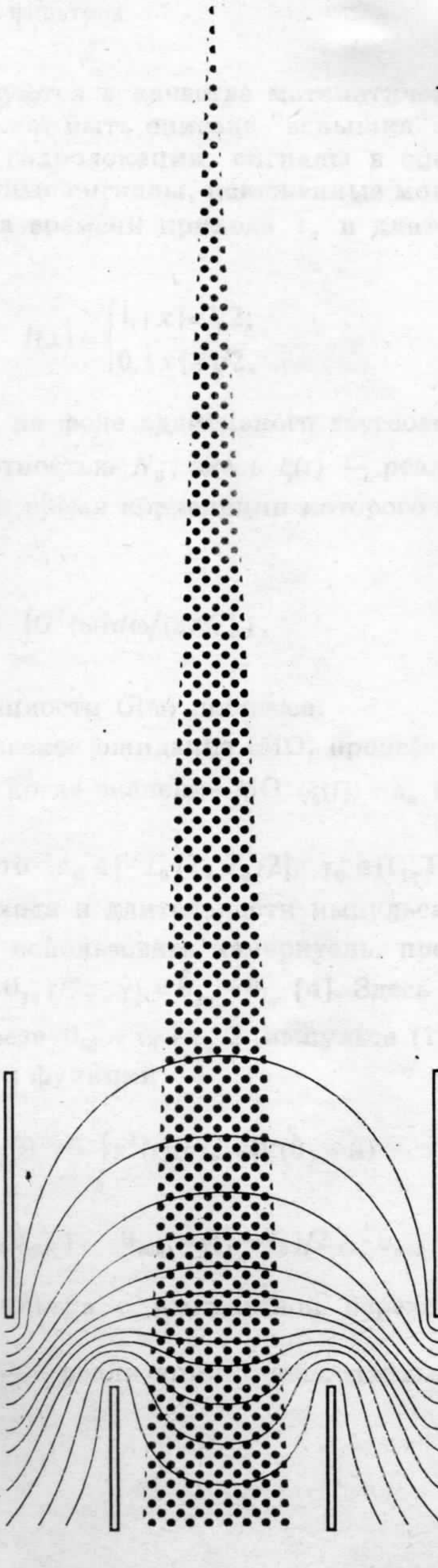
ISSN 0021-3454

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ



4

1997



УДК 621. 391

А. П. ТРИФОНОВ, А. В. ЗАХАРОВ

Воронежский государственный университет

ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ПРИХОДА И ДЛИТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЖИДАНИЕМ

Предложена аппаратурная реализация измерителя времени прихода и длительности гауссовского сигнала. Найдены характеристики оценок при использовании в измерителе стандартных фильтров.

Случайные импульсы широко используются в качестве математической модели реальных сигналов [1—3]. Такой моделью может быть описана "вспышка" оптического шума [1], отраженные сигналы в радио- и гидролокации, сигналы в спектроскопии и радиоастрономии [2], а также информационные сигналы, искаженные модулирующей помехой [3]. В работе [4] рассмотрена оценка времени прихода τ_0 и длительности γ_0 случайного импульса

$$s(t, \tau_0, \gamma_0) = I\left(\frac{t-\tau_0}{\gamma_0}\right)\xi(t), \quad I(x) = \begin{cases} 1, |x| < 1/2; \\ 0, |x| \ge 1/2, \end{cases} \tag{1}$$

наблюдаемого в течение времени $[-T/2, T/2]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0; здесь $\xi(t)$ — реализация стационарного гауссовского случайного процесса, время корреляции которого значительно меньше длительности γ_0, т. е.

$$\mu = \gamma_0 \Delta f_E / 2 >> 1, \quad \Delta f_E = \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega) d\omega / (2\pi G_m^2), \tag{2}$$

где G_m — максимальное значение спектра мощности $G(\omega)$ процесса.

В работе [4] полагается, что математическое ожидание (МО) процесса $\xi(t)$ равно нулю. Здесь рассмотрен более общий случай, когда значение МО $\langle\xi(t)\rangle = a_0$ произвольно и априори неизвестно.

Положим, аналогично работе [4], что $\tau_0 \in [-T_0/2, T_0/2]$, $\gamma_0 \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$, причем $T_0 + \Gamma_2 < T$, $T_0 < \Gamma_1$. Для оценки времени прихода и длительности импульса (1) с неизвестным математическим ожиданием можно использовать измеритель, предложенный в работе [4]. Оценки запишутся как $\hat{\tau}_q = (\hat{\theta}_{1q} + \hat{\theta}_{2q})/2$, $\hat{\gamma}_q = \hat{\theta}_{2q} - \hat{\theta}_{1q}$ [4]. Здесь $\hat{\theta}_{1q}$ и $\hat{\theta}_{2q}$ — оценки положения фронта $\theta_{01} = \tau_0 - \gamma_0/2$ и среза $\theta_{02} = \tau_0 + \gamma_0/2$ импульса (1), определяемые как координаты абсолютных максимумов функций

$$L_1(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\vartheta} y^2(t) dt/2 + W(\vartheta - \theta_1), \quad L_2(\theta_2) = \int_{\vartheta}^{\theta_2} y^2(t) dt/2 + W(\theta_2 - \vartheta) \tag{3}$$

на интервалах $\theta_1 \in [-\theta_{\max}, -\theta_{\min}]$, $\theta_2 \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, $\theta_{\min} = (\Gamma_1 - T_0)/2$, $\theta_{\max} = (\Gamma_2 + T_0)/2$; $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t-t') dt'$ — выходной сигнал фильтра с импульсной переходной функцией (ИПФ) $h(t)$; $x(t) = s(t, \tau_0, \gamma_0) + n(t)$ — реализация наблюдаемых данных;

$W = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - N_0 |H(\omega)|^2/2)\, d\omega/(4\pi)$, $H(\omega)$ — передаточная функция (ПФ), соответствующая ИПФ $h(t)$.

Согласно работе [4] оптимальной является ПФ, удовлетворяющая условию $|H(\omega)|^2 = \theta_0(\omega) = 4G(\omega)/\{N_0[N_0 + 2G(\omega)]\}$. Величина ϑ выбирается из интервала $[-\theta_{min}, \theta_{min}]$, например $\vartheta = 0$, чтобы выполнялись условия, аналогичные (2):

$$\mu_i = |\theta_i - \vartheta|\, \Delta f_E >> 1, \quad i = 1, 2 \tag{4}$$

Один из вариантов аппаратурной реализации оценок рассмотрен в работе [4].

Найдем характеристики оценок при приеме случайного импульса с произвольным МО. Так же, как в работе [5], при выполнении условий (2), (4) аппроксимируем приращение функционалов (3) реализациями марковских процессов диффузионного типа [6]. Тогда, решая соответствующие уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова [5, 6], находим смещение $b_1(\hat{\tau}_q)$, $b_2(\hat{\gamma}_q)$ (систематические ошибки) и рассеяния $V_1(\hat{\tau}_q)$, $V_2(\hat{\gamma}_q)$ (средние квадраты ошибок) оценок:

$$b_1(\hat{\tau}_q) = \langle \hat{\tau}_q - \tau_0 \rangle \approx 0; \quad b_2(\hat{\gamma}_q) = \langle \hat{\gamma}_q - \gamma_0 \rangle = -2\gamma_0 B_0,$$

$$B_0 \approx \frac{z_1^2 R(2-R) + z_2^2(1-2R)}{2z_1^2 z_2^2 (1-R)^2}, \quad z_i^2 = \frac{c_i^2}{d_i}, \ i = 1, 2. \quad R = \frac{c_1 d_2}{c_2 d_1};$$

$$V_1(\hat{\tau}_q) = \langle (\hat{\tau}_q - \tau_0)^2 \rangle = \gamma_0^2 (V_0 - B_0^2)/2; \quad V_2(\hat{\gamma}_q) = \langle (\hat{\gamma}_q - \gamma_0)^2 \rangle = +2\gamma_0^2 (V_0 + B_0^2), \tag{5}$$

$$V_0 \approx \frac{z_2^4(2 - 6R + 5R^2) - z_1^4 R(5 - 6R + 2R^2)}{2z_1^4 z_2^4 (1-R)^3},$$

где

$$c_1 = \gamma_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 G(\omega)\, d\omega/(4\pi) + z_0^2 |H(0)|^2 N_0/4 + c_2 = f_{1c}(\gamma_0, a_0);$$

$$c_2 = \gamma_0 \left[N_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega/(8\pi) + W \right] = f_{2c}(\gamma_0, a_0);$$

$$d_1 = \gamma_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^4 G(\omega)[N_0 + G(\omega)]\, d\omega/(4\pi) + z_0^2 g |H(0)|^4 N_0^2/4 + d_2 = f_{1d}(\gamma_0, a_0), \tag{6}$$

$$d_2 = \gamma_0 N_0^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^4 d\omega/(16\pi) = f_{2d}(\gamma_0, a_0),$$

$$g = 1 + 2G(0)/N_0, \quad z_0^2 = 2a_0^2 \gamma_0/N_0, \quad G(0) = G(\omega)|_{\omega=0}, \quad H(0) = H(\omega)|_{\omega=0}.$$

Полагая $a_0 = 0$, получаем как частный случай характеристики оценок при приеме импульса с нулевым МО; погрешность формул убывает с ростом апостериорной точности оценок [4]. Предполагается, что ошибки оценивания существенно превосходят время корреляции $1/\Delta f_E$ процесса $\xi(t)$.

Формулы (5), (6) позволяют определить потери в точности из-за неизвестного МО импульса (1), которые можно охарактеризовать отношениями $\chi_\tau = V_1(\hat{\tau}_q)/V_\tau$, $\chi_\gamma = V_2(\hat{\gamma}_q)/V_\gamma$, где V_τ, V_γ — рассеяние оценки максимального правдоподобия (МП) времени прихода и длительности импульса (1) при произвольном, но априори известном значении МО [7]. Положим $|H(\omega)|^2 = \theta_0(\omega)$, что соответствует оптимальному выбору

ИПФ $h(t)$ [4]. Обозначим $\varepsilon = a_0^2 D^{-1}$, где D — дисперсия случайного процесса $\xi(t)$. На рис. 1 сплошными линиями нанесены зависимости $\chi_\tau(\varepsilon)$ при $G(\omega) = G_m I(\omega/\Omega)$, $\Omega = 2\pi\Delta f_E$, и разных значениях параметра $q = 2G_m/N_0$: кривые *1* — $q = 0{,}05$; *2* — $q = 0{,}1$; *3* — $q = 0{,}2$. С этими кривыми практически совпадают соответствующие зависимости $\chi_\gamma(\varepsilon)$. Из рисунка видно, что потери возрастают с увеличением ε и уменьшением q и могут быть значительными.

Для увеличения точности оценок воспользуемся методом МП [5]. Запишем логарифм функционала отношения правдоподобия импульса (1) как функцию текущих значений времени прихода τ, длительности γ и МО a:

$$M(\tau, \gamma, a) = L(\theta_1, \vartheta, a) + L(\vartheta, \theta_2, a),$$

$$L(t_1, t_2, a) = \int_{t_1}^{t_2} [y_0^2(t) + 4ax(t)/(N_0 g)]dt/2 - [a^2/(N_0 g) - W](t_2 - t_1), \quad \theta_1 = \tau - \gamma/2, \quad \theta_2 = \tau + \gamma/2, \tag{7}$$

где величина ϑ выбирается, как и в выражениях (3), а $y_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h_0(t - t')dt'$ — выходной сигнал фильтра с ИПФ $h_0(t)$, причем соответствующая ПФ удовлетворяет условию $|H_0(\omega)|^2 = \theta_0(\omega)$.

Оценки МП определяются как координаты наибольшего максимума функции $M_a(\tau, \gamma) = \max_a M(\tau, \gamma, a)$ в области $\tau \in [-T_0/2, T_0/2]$, $\gamma \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$.

Аппаратурная реализация оценок $\hat{\tau}$ и $\hat{\gamma}$ приводит к достаточно сложной структуре измерителя. Это обусловлено как трудностями реализации фильтра с ИПФ $h_0(t)$, так и необходимостью формирования функционала $M_a(\tau, \gamma)$ для всех возможных значений двух переменных. Поэтому, аналогично работе [4], не ограничиваясь условием $|H_0(\omega)|^2 = \theta_0(\omega)$, будем рассматривать оценки при произвольной ИПФ фильтра, которую в отличие от $h_0(t)$ будем обозначать $h(t)$, как в формулах (3). Соответствующую ПФ обозначим $H(\omega)$. При этом в общем случае $h(t) \neq h_0(t)$. Структура измерителя также существенно упрощается, если перейти от оценок $\hat{\tau}$ и $\hat{\gamma}$ к оценкам $\hat{\tau}_a = (\hat{\theta}_{1a} + \hat{\theta}_{2a})/2$, $\hat{\gamma}_a = \hat{\theta}_{2a} - \hat{\theta}_{1a}$. Здесь $\hat{\theta}_{1a}$ и $\hat{\theta}_{2a}$ — оценки положения фронта и среза импульса (1), определяемые как координаты наибольших максимумов функций

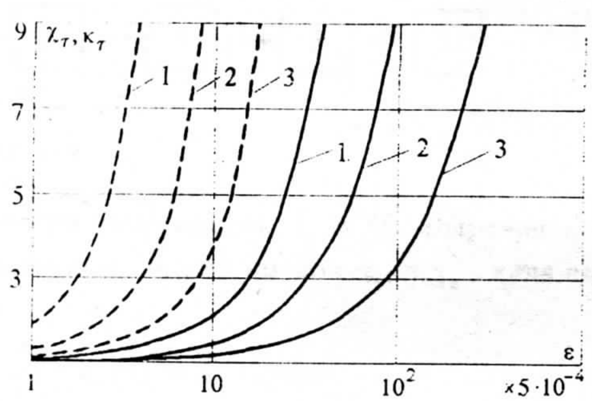


Рис. 1

$$L_{1a}(\theta_1) = \max_a L(\theta_1, \vartheta, a) = L_a(\theta_1, \vartheta); \quad L_{2a}(\theta_2) = \max_a L(\vartheta, \theta_2, a) = L_a(\vartheta, \theta_2) \tag{8}$$

на интервалах $\theta_1 \in [-\theta_{max}, -\theta_{min}]$, $\theta_2 \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$;

$$L_a(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt + \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt\right]^2}{N_0 g(t_2 - t_1)} + W(t_2 - t_1). \tag{9}$$

В отличие от оценок $\hat\tau$ и $\hat\gamma$ оценки $\hat\tau_a$ и $\hat\gamma_a$ не будут оптимальными по критерию МП при $h(t) = h_0(t)$, однако можно показать, что они будут сходиться к оценкам $\hat\tau$ и $\hat\gamma$ с увеличением апостериорной точности.

Измеритель на основе (8), (9) может быть реализован, как показано на рис. 2, где *1* — фильтр с ИПФ $h(t)$; *2* и *8* — ключи, открывающиеся на время $[\vartheta, \theta_{\max}]$ и $[-\theta_{\max}, \vartheta]$; *3* — квадратор; *4* — блок отношений, осуществляющий операцию деления; *5* и *11* — генераторы, формирующие сигналы $\varphi(t) = u(t-\vartheta)$ и $\psi(t) = u(2\vartheta + \theta_{\max} - t)$ на интервалах $[\vartheta, \theta_{\max}]$ и $[\vartheta, 2\vartheta + \theta_{\max}]$, $u = gN_0/2$; *6* — аттенюатор с коэффициентом передачи 0,5; *7* и *10* — указатели экстремума, формирующие оценки $\hat\theta_{2a}$ и $\hat\theta_{1a}$ по положению наибольших максимумов входных сигналов; *9* — линия задержки на время $\theta_{\max} + \vartheta$.

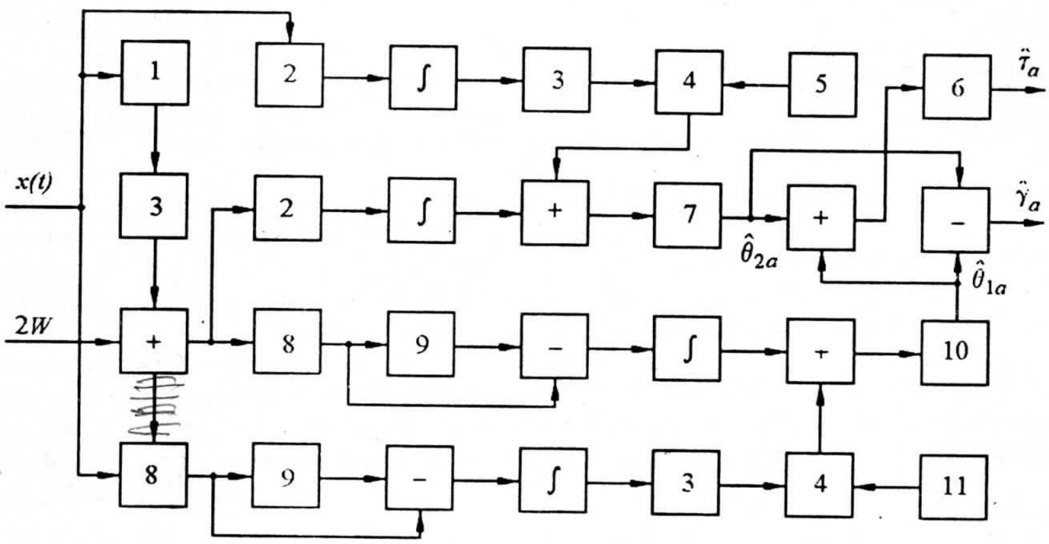


Рис. 2

Согласно формулам (5) найдем характеристики оценок $\hat\tau_a$ и $\hat\gamma_a$. Выражения для смещений и рассеяний совпадают с соответствующими для оценок $\hat\tau_q$ и $\hat\gamma_q$, куда следует подставить

$$c_1 = f_{1c}(\gamma_0, a_0) + z_0^2/(2g); \quad c_2 = f_{2c}(\gamma_0, a_0) - z_0^2/(2g);$$
$$d_1 = f_{1d}(\gamma_0, a_0) + z_0^2[1/g + N_0|H(0)|^2]; \quad d_2 = f_{2d}(\gamma_0, a_0) + z_0^2/g^2. \tag{10}$$

Выигрыш в точности по сравнению с измерителем, описанным в работе [4], можно охарактеризовать отношениями $\kappa_\tau = V_1(\hat\tau_q)/V_1(\hat\tau_a)$ и $\kappa_\gamma = V_2(\hat\gamma_q)/V_2(\hat\gamma_a)$. Положим, что принимается импульс с полосовым спектром мощности $G(\omega) = G_m I(\omega/\Omega)$. Согласно формулам (5), (6), (10) и работе [7] при оптимальном выборе ПФ, когда $|H(\omega)|^2 = \theta_0(\omega) = 4G_m I(\omega/\Omega)/[N_0(N_0 + 2G_m)]$, выигрыши κ_τ и κ_γ совпадают с рассмотренными выше $\chi_\tau(\varepsilon)$ и $\chi_\gamma(\varepsilon)$. Следовательно, сплошные линии на рис. 1 показывают выигрыш κ_τ при $G(\omega) = G_m I(\omega/\Omega)$ и оптимальном выборе ИПФ $h(t)$. Штриховые линии на рис. 1 показывают зависимости $\kappa_\tau(\varepsilon)$, когда в измерителе (см. рис. 2) используется простейший фильтр в виде интегрирующей *RC*-цепочки с ПФ, удовлетворяющей условию $|H(\omega)|^2 = 4G_m\alpha^2/[N_0(N_0 + 2G_m)(\alpha^2 + \omega^2)]$, где $\alpha = 1/(RC)$. При этом отношение эквивалентных полос частот сигнала (1) $\Delta f_E = \Omega/(2\pi)$ и фильтра $\Delta f_H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \Big/ [2\pi \max |H(\omega)|^2] = \alpha/2$ составляет $\Delta f_E / \Delta f_H = 0{,}7$. Зависимости $\kappa_\gamma(\varepsilon)$ практически совпадают с соответствующими зависимостями $\kappa_\tau(\varepsilon)$. Из рис. 1 следует, что выигрыш в точности оценок при использовании данного измерителя растет с увеличением ε и уменьшением q и может быть значительным.

Таким образом, выполнен синтез и анализ измерителя времени прихода и длительности случайного импульса с неизвестным математическим ожиданием. Показано, что синтезированное устройство позволяет повысить точность оценок по сравнению с устройством, предложенным в работе [4].

Приведенные результаты получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахманов С. Я., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.
2. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1977. Т. 3. 664 с.
3. *Кремер И. Я., Владимиров В. И., Карпухин В. И.* Модулирующие помехи и прием радиосигналов. М.: Сов. радио, 1972. 480 с.
4. *Трифонов А. П., Захаров А. В.* Совместная оценка времени прихода и длительности случайного импульса // Изв. вузов. Приборостроение. 1991. Т. 34, № 12. С. 3—9.
5. *Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
6. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 432 с.
7. *Трифонов А. П., Бутейко В. К., Захаров А. В.* Совместная оценка задержки и длительности сигнала при наличии модулирующей помехи // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1990. Т. 33, № 4. С. 89—91.

Рекомендована кафедрой радиофизики

Поступила в редакцию 18. 04. 96 г.