Том 42, Номер 9 Сентябрь 1997
ISSN 0033-8494

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

РАДИОТЕХНИКА и ЭЛЕКТРОНИКА

Главный редактор
Ю.В. Гуляев

МАИК "НАУКА" "НАУКА"

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 1997, том 42, № 8, с. 1068–1074

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

УДК 621.391

ОЦЕНКА ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ РАЗРЫВНОГО СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

© 1997 г. А. П. Трифонов, А. В. Захаров, Е. В. Проняев

Поступила в редакцию 14.02.96 г.

Исследованы квазиправдоподобные и максимально правдоподобные совместные оценки временнóго положения, длительности, центральной частоты и ширины полосы частот, а также числа степеней свободы при наблюдении сигнала на фоне белого шума. Получены асимптотически точные выражения для характеристик оценок. Найден проигрыш в точности квазиправдоподобных оценок из-за незнания величины спектральной плотности сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

Под разрывным случайным импульсом будем понимать сигнал

$$s(t) = \xi(t) I[(t-\lambda_0)/\tau_0], \tag{1}$$

где $I(x)$ – индикатор единичной длительности: $I(x) = 1$ при $|x| < 1/2$; $I(x) = 0$ при $|x| \ge 1/2$; $\xi(t)$ – реализация стационарного центрированного гауссовского случайного процесса со спектральной плотностью

$$G(\omega, \nu_0, \Omega_0) = \frac{\gamma_0}{2}\left[I\left(\frac{\nu_0-\omega}{\Omega_0}\right) + I\left(\frac{\nu_0+\omega}{\Omega_0}\right)\right], \quad \nu_0 > \frac{\Omega_0}{2}. \tag{2}$$

Здесь γ_0 – величина спектральной плотности, параметры λ_0 и τ_0 описывают положение и протяженность импульса (1) во времени, а параметры ν_0 и Ω_0 – положение и протяженность спектральной плотности (2) на оси частот. Полагаем, что выполняется условие широкополосности:

$$\mu_0 = \tau_0\Omega_0/2\pi \gg 1, \tag{3}$$

т.е. время корреляции $\tau_\kappa = 2\pi/\Omega_0$ случайного процесса $\xi(t)$ значительно меньше длительности τ_0 импульса (1). В этом случае параметры λ_0 и ν_0 описывают положение, параметры τ_0 и Ω_0 – размеры области локализации импульса (1) на плоскости время–частота, а параметр μ_0 – число степеней свободы импульса (1), пропорциональное площади, занимаемой областью локализации. Модель (1), (2) разрывного случайного импульса широко используется в практических приложениях статистической радиофизики и радиотехники [1–3].

Пусть импульс (1) наблюдается в течение времени $[0; T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0, поэтому обработке доступна реализация

$$x(t) = s(t) + n(t), \tag{4}$$

причем сигнал $s(t)$ и шум $n(t)$ статистически не зависимы. Величина γ_0 спектральной плотности (2) априори не известна. Вектор частотно-временных параметров $\vec{l}_0 = \|\lambda_0, \tau_0, \nu_0, \Omega_0\|$ импульса (1) также не известен и принимает значения из априорной области L, границы которой определяются неравенствами $\Lambda_1 \le \lambda_0 \le \Lambda_2$, $T_1 \le \tau_0 \le T_2$, $U_1 \le \nu_0 \le U_2$, $\Gamma_1 \le \Omega_0 \le \Gamma_2$. Интервал наблюдения $[0; T]$ выбираем так, что $0 \le \Lambda_1 - T_2/2 < \Lambda_2 + T_2/2 \le T$, т.е. импульс (1) всегда находится внутри интервала наблюдения.

Раздельные оценки частотно-временных параметров при неизвестной величине спектральной плотности γ исследованы в [4–7]. Так, в [4] найдены характеристики оценки параметра λ, в [5] – τ, в [6] – ν и в [7] – Ω. Там же рассмотрены возможности однозначного определения раздельных оценок частотно-временных параметров.

Ниже исследованы алгоритмы совместных оценок частотно-временных параметров импульса (1) и получены асимптотические выражения для характеристик оценок.

1. КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЕ ОЦЕНКИ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ РАЗРЫВНОГО СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА

Для синтеза алгоритма оценок воспользуемся методом максимального правдоподобия [2, 8]. Согласно этому методу запишем логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) $M_0(\vec{l})$ наблюдаемой реализации (4) как функцию вектора $\vec{l} = \|\lambda, \tau, \nu, \Omega\|$ возможных значений частотно-временных параметров $\vec{l}_0 = \|\lambda_0, \tau_0, \nu_0, \Omega_0\|$ для всех $\vec{l} \in L$ [3, 9]:

$$M_0(\vec{l}) = M(\lambda, \tau, \nu, \Omega, q_0) = \\ = q_0 M_{\gamma 1}(\vec{l})/(1+q_0) - \mu \ln(1+q_0), \tag{5}$$

$$M_{\gamma 1}(\vec{l}) = \int\limits_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} y^2(t, \nu, \Omega)dt/N_0, \quad \mu = \tau\Omega/2\pi,$$

где $q_0 = \gamma_0/N_0$, $y(t, \gamma, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') H(t-t')dt'$ – отклик фильтра с импульсной переходной функцией $H(t)$ на реализацию $x(t)$ (4), причем передаточная функция $h(\omega)$ фильтра удовлетворяет условию $|h(\omega)|^2 = I[(\nu-\omega)/\Omega] + I[(\nu+\omega)/\Omega]$. Тогда при известной величине γ_0 оценку максимального правдоподобия (ОМП) $\vec{l}_{m0} = \|\lambda_{m0}, \tau_{m0}, \nu_{m0}, \Omega_{m0}\|$ вектора параметров $\vec{l}_0$ запишем как

$$\vec{l}_{m0} = \arg\sup M_0(\vec{l}), \quad \vec{l} \in L. \tag{6}$$

При неизвестной величине γ_0 будем использовать квазиправдоподобную оценку (КПО) $\vec{l}_q = \|\lambda_q, \tau_q, \nu_q, \Omega_q\|$ вектора параметров $\vec{l}_0$, которая в отличие от (6) определяется выражением

$$\vec{l}_q = \arg\sup M^*(\vec{l}), \quad \vec{l} \in L, \tag{7}$$

$$M^*(\vec{l}) = M(\lambda, \tau, \nu, \Omega, q^*), \quad q^* = \gamma^*/N_0, \tag{8}$$

где γ^* – ожидаемое (прогнозируемое) значение неизвестной величины γ_0 спектральной плотности (2), причем в общем случае $\gamma^* \neq \gamma_0$. На основе КПО $\vec{l}_q$ (7) вектора параметров $\vec{l}_0$ согласно (3) можно сформировать квазиправдоподобную оценку μ_q числа степеней свободы μ_0 импульса (1):

$$\mu_q = \tau_q\Omega_q/2\pi. \tag{9}$$

При $\gamma^* = \gamma_0$ КПО $\vec{l}_q$ (7) и μ_q (9) переходят в ОМП $\vec{l}_{m0}$ (6) и $\mu_{m0} = \tau_{m0}\Omega_{m0}/2\pi$ соответственно.

Для нахождения характеристик КПО (7), (9) исследуем поведение функционала $M^*(\vec{l})$ (8). Принимая во внимание асимптотически (при $\mu_0 \longrightarrow \infty$) гауссовский характер функционала $M^*(\vec{l})$ (8) [1, 3, 8], ограничимся рассмотрением первых двух его моментов. Для этого представим функционал (8) в виде суммы: $M^*(\vec{l}) = S^*(\vec{l}) + N^*(\vec{l})$, где $S^*(\vec{l}) = \langle M^*(\vec{l})\rangle$ – сигнальная, $N^*(\vec{l}) = M^*(\vec{l}) - \langle M^*(\vec{l})\rangle$ – шумовая функции, усреднение выполняется по реализациям процесса $x(t)$ при фиксированном $\vec{l}_0$. Аналогично [9] будем полагать, что ошибки оценивания временных параметров (λ_0, τ_0) существенно больше времени корреляции процесса $\xi(t)$, а ошибки оценивания частотных параметров (ν_0, Ω_0) существенно больше величины $2\pi/\tau_0$. Это имеет место, когда значение q_0 не слишком велико. Тогда при выполнении (3) для сигнальной функции получаем

$$S^*(\vec{l}) = S^*(\lambda, \tau, \nu, \Omega) = A_1 C(\lambda, \lambda, \lambda_0, \tau, \tau, \tau_0) \times \\ \times C(\nu, \nu, \nu_0, \Omega, \Omega, \Omega_0)/\tau_0\Omega_0 - A_2\tau\Omega/\tau_0\Omega_0, \tag{10}$$

$$A_1 = \mu_0 q_0 q^*/(1+q^*),$$

$$A_2 = \mu_0[\ln(1+q^*) - q^*/(1+q^*)],$$

$$C(t_1, t_2, t_0, u_1, u_2, u_0) = \\ = \max[0; \min(t_1 + u_1/2, t_2 + u_2/2, t_0 + u_0/2) - \\ - \max(t_1 - u_1/2, t_2 - u_2/2, t_0 - u_0/2)],$$

а первые два момента шумовой функции запишем в виде

$$\langle N^*(\vec{l})\rangle = 0,$$

$$B^*(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = B^*(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2, \nu_1, \nu_2, \Omega_1, \Omega_2) = \\ = \langle N^*(\vec{l}_1)N^*(\vec{l}_2)\rangle = D_1 C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, \tau_1, \tau_2, \tau_0) \times \\ \times C(\nu_1, \nu_2, \nu_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_0)/\tau_0\Omega_0 + \\ + D_2 C(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_1, \tau_2) \times \\ \times C(\nu_1, \nu_1, \nu_2, \Omega_1, \Omega_1, \Omega_2)/\tau_0\Omega_0, \tag{11}$$

$$D_1 = \mu_0 q^{*2} q_0(2+q_0)/(1+q^*)^2,$$

$$D_2 = \mu_0 q^{*2}/(1+q^*)^2,$$

где $\vec{l}_k = \|\lambda_k, \tau_k, \nu_k, \Omega_k\|$, $k = 1, 2$. Из (10) следует, что форма сигнальной функции зависит от соотношения между значениями γ^* и γ_0. Нетрудно убедиться, что сигнальная функция $S^*(\vec{l})$ (10) достигает наибольшего максимума при $\vec{l} = \vec{l}_0$, если

$$f(q^*, q_0) = q^*(1+q_0)/(1+q^*) - \ln(1+q^*) > 0. \tag{12}$$

Это неравенство налагает ограничения на область значений величины γ_0 спектральной плотности (2) принимаемого сигнала при фиксированном значении γ^* и может быть интерпретировано как условие работоспособности алгоритма КПО (7). Очевидно, что при $\gamma^* = \gamma_0$ условие (12) выполняется. Граница работоспособности алгоритма

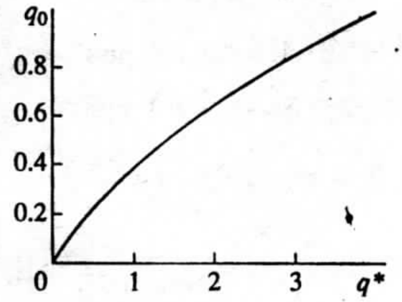

Рис. 1. Граница области работоспособности алгоритма КПО.

КПО (7), определяемая условием $f(q^*, q_0) = 0$, показана на рис. 1. Если величина q_0 такова, что при выбранном значении q^* точка с координатами (q^*, q_0) лежит на кривой $f(q^*, q_0) = 0$ или ниже, то алгоритм КПО (7) использовать нельзя.

Полагаем далее, что условие (12) выполняется. Перейдем от рассмотрения параметров λ_0, τ_0, ν_0, Ω_0, определяющих положение и размеры области локализации импульса (1) на плоскости время–частота, к параметрам

$$\theta_{01} = \lambda_0 - \tau_0/2, \quad \theta_{02} = \lambda_0 + \tau_0/2, \qquad \theta_{03} = \nu_0 - \Omega_0/2, \quad \theta_{04} = \nu_0 + \Omega_0/2, \tag{13}$$

определяющим границы области локализации. Обозначим $\theta_1 = \lambda - \tau/2$, $\theta_2 = \lambda + \tau/2$, $\theta_3 = \nu - \Omega/2$, $\theta_4 = \nu + \Omega/2$, $\theta_{i1} = \lambda_i - \tau_i/2$, $\theta_{i2} = \lambda_i + \tau_i/2$, $\theta_{i3} = \nu_i - \Omega_i/2$, $\theta_{i4} = \nu_i + \Omega_i/2$, $i = 1, 2$. Введем в рассмотрение нормированные границы $\vartheta_k = \theta_k/\tau_0$, $\vartheta_n = \theta_n/\Omega_0$, $\vartheta_{ik} = \theta_{ik}/\tau_0$, $\vartheta_{in} = \theta_{in}/\Omega_0$, $k = 1, 2$, $n = 3, 4$, $i = 0, 1, 2$. Тогда, согласно (10), (11), в малой окрестности точки $\vec{l}_0$, когда $\max(|\lambda - \lambda_0|/\tau_0, |\tau - \tau_0|/\tau_0, |\nu - \nu_0|/\Omega_0, |\Omega - \Omega_0|/\Omega_0, |\lambda_k - \lambda_0|/\tau_0, |\tau_k - \tau_0|/\tau_0, |\nu_k - \nu_0|/\Omega_0, |\Omega_k - \Omega_0|/\Omega_0) \le \delta$, $k = 1, 2$ и $\delta \longrightarrow 0$, получаем

$$S^*(\vec{l}) = \sum_{i=1}^{4} S_i(\vartheta_i) - 3S^*(\vec{l}_0) + o(\delta), \qquad B^*(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \sum_{i=1}^{4} B_i(\vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}) - 3B^*(\vec{l}_0, \vec{l}_0) + o(\delta), \tag{14}$$

где

$$S_i(\vartheta_i) = A_1 C_j(\vartheta_{0i}, \vartheta_i, \vartheta_i) - A_2 C_j(\vartheta_i, \vartheta_i, \vartheta_i), \quad i = \overline{1, 4}, \tag{15}$$

$$B_i(\vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}) = D_1 C_j(\vartheta_{0i}, \vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}) + D_2 C_j(\vartheta_{1i}, \vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}), \tag{16}$$

$$C_j(t_1, t_2, t_3) = \min(|\vartheta_{0j} - t_1|, |\vartheta_{0j} - t_2|, |\vartheta_{0j} - t_3|),$$

$j = J(i)$, где $J(i) = i + 1$ при $i = 1, 3$, и $J(i) = i - 1$ при $i = 2, 4$. Следовательно, при $\delta \longrightarrow 0$ и $\mu_0 \longrightarrow \infty$ функционал $M^*(\vec{l})$ (8) с учетом его асимптотически гауссовского характера можно представить в виде

$$M^*(\vec{l}) + m_0 \approx \sum_{i=1}^{4} M_i(\vartheta_i), \tag{17}$$

где m_0 – гауссовская случайная величина с математическим ожиданием $3S^*(\vec{l}_0)$ и дисперсией $3B^*(\vec{l}_0, \vec{l}_0)$, причем m_0 и $M^*(\vec{l})$ статистически не зависимы, а $M_i(\vartheta_i)$ – взаимно статистически не зависимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $S_i(\vartheta_i)$ (15) и корреляционными функциями $B_i(\vartheta_{1l}, \vartheta_{2l})$ (16). Таким образом, в малой окрестности точки $\vec{l}_0$ функционал (8) может быть представлен в виде (17), причем точность аппроксимации (17) возрастает с увеличением μ_0 (3) и с уменьшением δ.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫХ ОЦЕНОК ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА

Процедуру нахождения характеристик совместных КПО $\vec{l}_q$ (7) можно существенно упростить, если перейти к рассмотрению совместных КПО $\vec{\theta}_q = \|\theta_{1q}, \theta_{2q}, \theta_{3q}, \theta_{4q}\|$ вектора параметров $\vec{\theta}_0 = \|\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03}, \theta_{04}\|$, определяющих границы (13) области частотно-временной локализации импульса (1). Согласно (13), $\theta_{1q} = \lambda_q - \tau_q/2$, $\theta_{2q} = \lambda_q + \tau_q/2$, $\theta_{3q} = \nu_q - \Omega_q/2$, $\theta_{4q} = \nu_q + \Omega_q/2$. С учетом (7) КПО $\vec{\theta}_q$ запишем в виде

$$\vec{\theta}_q = \arg\sup_{\vec{\theta}} M^*(\vec{l}), \quad \vec{\theta} = \|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\|. \tag{18}$$

Определим характеристики КПО $\vec{\theta}_q$ (18). Учтем, что в соответствии с (10) при выполнении условия (12) сигнальная функция $S^*(\vec{l})$ достигает наибольшего максимума при $\vec{l} = \vec{l}_0$ ($\vec{\theta} = \vec{\theta}_0$), а реализации шумовой функции $N^*(\vec{l})$ непрерывны с вероятностью 1. Полагаем, что наряду с (3), (12) выполняется условие

$$z^2 = S^{*2}(\vec{l}_0)/\langle N^{*2}(\vec{l}_0)\rangle = \mu_0[q^* - (1 + q^*)\ln(1 + q^*)/(1 + q_0)]^2/q^{*2} \gg 1, \tag{19}$$

обеспечивающее совместно с (3), (12) высокую апостериорную точность оценок. Тогда КПО $\vec{\theta}_q$ (18) лежит в малой окрестности точки $\vec{\theta} = \vec{\theta}_0$, а при $z \longrightarrow \infty$ КПО $\vec{\theta}_q$ сходится к $\vec{\theta}_0$ в среднеквадратическом. Предположим, что величина z^2 (19) настолько велика, что для нахождения распределения КПО (18) достаточно ограничиться анализом функционала (8) на интервалах $\theta_i \in [\theta_{0i} - \zeta_i; \theta_{0i} + \zeta_i]$, где величины ζ_i настолько малы, что для функционала (8) справедливы аппроксимации (14), (17).

Рассмотрим нормированные оценки $\vartheta_{kq} = \theta_{kq}/\tau_0$, $\vartheta_{nq} = \theta_{nq}/\Omega_0$, $k = 1, 2$, $n = 3, 4$. Согласно (17), (18),

$$\vartheta_{iq} \approx \arg\sup M_i(\vartheta_i), \qquad \vartheta_i \in [\vartheta_{0i} - \varepsilon_i; \vartheta_{0i} + \varepsilon_i], \quad i = \overline{1,4}, \tag{20}$$

где $\varepsilon_k = \zeta_k/\tau_0$, $\varepsilon_n = \zeta_n/\Omega_0$, $k = 1, 2$, $n = 3, 4$, причем в силу взаимной статистической независимости случайных процессов $M_i(\vartheta_i)$ оценки (20) статистически не зависимы.

Найдем выражения для характеристик оценок ϑ_{iq} (20), $i = \overline{1,4}$. С этой целью введем в рассмотрение случайные процессы

$$\Delta_i(t) = M_i(t) - M_i(\kappa_i), \qquad \kappa_i, t \in [\vartheta_{0i} - \varepsilon_i; \vartheta_{0i} + \varepsilon_i], \quad i = \overline{1,4}, \tag{21}$$

где κ_i – фиксированная величина. Используя (15), (16) и теорему Дуба [10] в формулировке [11], можно показать, что случайные процессы $\Delta_i(t)$ (21) на интервалах $[\vartheta_{0i} - \varepsilon_i; \kappa_i]$ и $(\kappa_i; \vartheta_{0i} + \varepsilon_i]$ статистически не зависимы и являются гауссовскими марковскими процессами диффузионного типа [10]. Согласно [3], коэффициенты сноса K_{1i} и диффузии K_{2i} процессов $\Delta_i(t)$ при $t > \kappa_i$ имеют следующий вид:

$$K_{1i} = \begin{cases} -a_i & \text{при } t \ge \vartheta_{0i}, \\ a_j & \text{при } t < \vartheta_{0i}, \end{cases}$$
$$K_{2i} = \begin{cases} d_i & \text{при } t \ge \vartheta_{0i}, \\ d_j & \text{при } t < \vartheta_{0i}, \end{cases} \quad i = \overline{1,4}, \tag{22}$$

где $a_1 = a_3 = A_1 - A_2 = \mu_0[q^*(1 + q_0)/(1 + q^*) - \ln(1 + q^*)]$, $a_2 = a_4 = A_2$, $d_1 = d_3 = D_1 + D_2 = \mu_0 q^{*2}(1 + q_0)^2/(1 + q^*)^2$, $d_2 = d_4 = D_2$, $j = J(i)$. Тогда, применяя метод локально-марковской аппроксимации [12, 13], можно найти асимптотические аппроксимации для плотностей вероятности $W_i(\vartheta_i)$ оценок ϑ_{iq} (20). Решая уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [10] с коэффициентами (22) при соответствующих начальных и граничных условиях, получаем

$$W_i(\vartheta_i) = \begin{cases} 2z_j^2 W[2z_j^2(\vartheta_{0i} - \vartheta_i), R_i] & \text{при } -\infty < \vartheta_i < \vartheta_{0i}, \\ 2z_i^2 W[2z_i^2(\vartheta_i - \vartheta_{0i}), R_j] & \text{при } \vartheta_{0i} \le \vartheta_i < \infty, \end{cases} \tag{23}$$

$$W(x, u) = \Phi(\sqrt{|x|/2}) - 1 + \frac{2+u}{u}\exp\left(|x|\frac{1+u}{u^2}\right) \times \left[1 - \Phi\left(\sqrt{|x|/2}\left[\frac{2+u}{u}\right]\right)\right],$$

$$z_1^2 = z_3^2 = a_1^2/d_1 = \mu_0[q^* - (1 + q^*)\ln(1 + q^*)/(1 + q_0)]^2/q^{*2} = z^2,$$

$$z_2^2 = z_4^2 = a_2^2/d_2 = \mu_0[(1 + q^*)\ln(1 + q^*) - q^*]^2/q^{*2},$$

$$R_1 = R_3 = a_2 d_1/a_1 d_2 = [\ln(1 + q^*) - q^*/(1 + q^*)](1 + q_0)^2 \times [q^*(1 + q_0)/(1 + q^*) - \ln(1 + q^*)]^{-1} = R,$$

$$R_2 = R_4 = 1/R,$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt/\sqrt{2\pi}$ – интеграл вероятности [8], $j = J(i)$, $i = \overline{1,4}$. Из (23) следует существенно негауссовский характер распределений оценок (20) даже при больших отношениях сигнал/шум (19). Точность аппроксимации (23) возрастает с увеличением μ_0 и z^2.

Используя (23), находим выражения для смещений b_i и рассеяний V_i оценок ϑ_{iq}:

$$b_i = \langle \vartheta_{iq} - \vartheta_{0i} \rangle = (-1)^i \frac{z_1^2(2R+1) - z_2^2 R(R+2)}{2z_1^2 z_2^2 (R+1)^2}, \quad i = \overline{1,4}, \tag{24}$$

$$V_i = \langle (\vartheta_{iq} - \vartheta_{0i})^2 \rangle = \frac{z_1^4(5R^2 + 6R + 2) + z_2^4 R(2R^2 + 6R + 5)}{2z_1^4 z_2^4 (1+R)^3}.$$

Согласно (13), КПО $\vec{l}_q$ (7) и $\vec{\theta}_q$ (18) связаны линейными соотношениями $\lambda_q = (\theta_{1q} + \theta_{2q})/2$, $\tau_q = \theta_{2q} - \theta_{1q}$, $\nu_q = (\theta_{3q} + \theta_{4q})/2$, $\Omega_q = \theta_{4q} - \theta_{3q}$. Кроме того, при выполнении (3), (19) оценки θ_{iq} (18) приближенно статистически не зависимы. Поэтому, используя (24), нетрудно записать выражения для нормированных смещений и рассеяний КПО $\vec{l}_q$ (7):

$$b_p = \langle \lambda_q - \lambda_0 \rangle/\tau_0 = \langle \nu_q - \nu_0 \rangle/\Omega_0 = 0,$$

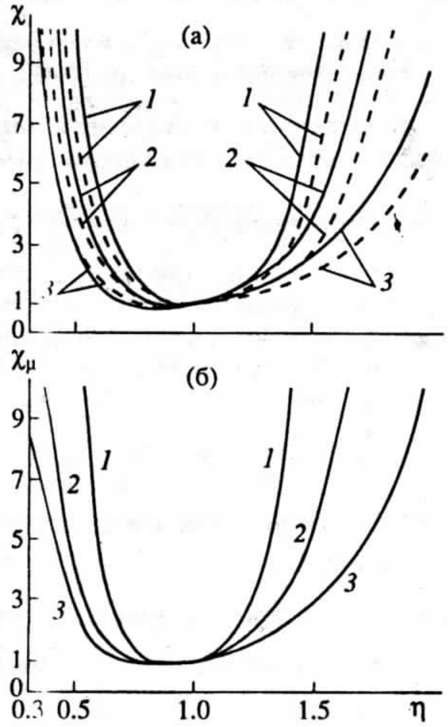

Рис. 2. Потери в точности КПО по сравнению с ОМП.

$$b_d = \langle \tau_q - \tau_0 \rangle/\tau_0 = \langle \Omega_q - \Omega_0 \rangle/\Omega_0 = -2b_1 = [z_1^2(2R+1) - z_2^2R(R+2)]/[z_1z_2(R+1)]^2,$$

$$V_p = \langle (\lambda_q - \lambda_0)^2 \rangle/\tau_0^2 = \langle (\nu_q - \nu_0)^2 \rangle/\Omega_0^2 = (V_1 + b_1^2)/2 = 2\{z_1^4[(1+2R)^3 + 2(1+R)^3] + z_2^4R[(2+R)^3 + 2(1+R)^3] + 2z_1^2z_2^2R(2+5R+2R^2)\}/[2z_1z_2(1+R)]^4, \tag{25}$$

$$V_d = \langle (\tau_q - \tau_0)^2 \rangle/\tau_0^2 = \langle (\Omega_q - \Omega_0)^2 \rangle/\Omega_0^2 = 2(V_1 - b_1^2) = 8\{z_1^4[(1+2R)^2(3+2R) + 2(1+R)^3] + z_2^4R[(2+R)^2(2+3R) + 2(1+R)^3] - 2z_1^2z_2^2R(2+5R+2R^2)\}/[2z_1z_2(1+R)]^4,$$

где z_1, z_2, R определяются из (23). При этом оценки λ_q и τ_q приближенно не зависят от оценок ν_q и Ω_q и наоборот. Используя приближенную статистическую независимость оценок τ_q и Ω_q, получаем выражения для нормированных смещений и рассеяний КПО μ_q (9):

$$b_\mu = \langle \mu_q - \mu_0 \rangle/\mu_0 = b_d^2 + 2b_d, \quad V_\mu = \langle (\mu_q - \mu_0)^2 \rangle/\mu_0^2 = V_d^2 + 2V_d + 4b_dV_d + 2b_d^2. \tag{26}$$

Полагая в (25), (26) $\gamma^* = \gamma_0$, получаем как частный случай нормированные смещения $b_{0d} = \langle \tau_{m0} - \tau_0 \rangle/\tau_0 = \langle \Omega_{m0} - \Omega_0 \rangle/\Omega_0$, $b_{0p} = \langle \lambda_{m0} - \lambda_0 \rangle/\tau_0 = \langle \nu_{m0} - \nu_0 \rangle/\Omega_0$, $b_{0\mu} = \langle \mu_{m0} - \mu_0 \rangle/\mu_0$ и рассеяния $V_{0d} = \langle (\tau_{m0} - \tau_0)^2 \rangle/\tau_0^2 = \langle (\Omega_{m0} - \Omega_0)^2 \rangle/\Omega_0^2$, $V_{0p} = \langle (\lambda_{m0} - \lambda_0)^2 \rangle/\tau_0^2 = \langle (\nu_{m0} - \nu_0)^2 \rangle/\Omega_0^2$, $V_{0\mu} = \langle (\mu_{m0} - \mu_0)^2 \rangle/\mu_0^2$ ОМП $\vec{l}_{m0}$ (6) и $\mu_{m0} = \tau_{m0}\Omega_{m0}/2\pi$ при априори известной величине γ_0 спектральной плотности (2).

Отметим, что формулы (24)–(26) получены при выполнении условий (3), (12), (19) и точность этих формул возрастает с увеличением μ_0 и z^2.

Выражения (25), (26) позволяют оценить влияние отклонений величины γ^* от γ_0 на точность КПО (7), (9). Введем в рассмотрение отношения $\chi_d = V_d/V_{0d}$, $\chi_p = V_p/V_{0p}$, $\chi_\mu = V_\mu/V_{0\mu}$ нормированных рассеяний КПО к соответствующим рассеяниям ОМП. На рис. 2а показаны зависимости отношений χ_d (сплошные кривые) и χ_p (штриховые кривые), а на рис. 2б – зависимость отношения χ_μ от величины $\eta = \gamma^*/\gamma_0$. На рис. 2а кривые *1–3* соответствуют $q_0 = 0.1; 0.5; 1$; на рис. 2б кривые *1–3* соответствуют $q_0 = 0.2; 0.5; 1$. Из рис. 2 следует, что при отклонении величины γ^* от γ_0 характеристики КПО (7), (9) могут существенно ухудшаться, причем с уменьшением q_0 КПО (7), (9) оказываются более критичными к выбору величины γ^*.

3. ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ РАЗРЫВНОГО СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА

Повысить точность оценок частотно-временных параметров случайного импульса (1) можно, если в (7), (8) заменить ожидаемое значение γ^* параметра γ_0 на его ОМП. В этом случае, согласно [2, 8, 13], совместные ОМП $\vec{l}_m = \|\lambda_m, \tau_m, \nu_m, \Omega_m\|$ вектора параметров $\vec{l}_0$ запишем как

$$\vec{l}_m = \arg\sup M_\gamma(\vec{l}), \quad \vec{l} \in L, \qquad M_\gamma(\vec{l}) = \sup_\gamma M(\lambda, \tau, \nu, \Omega, q), \quad q = \gamma/N_0. \tag{27}$$

Максимизируя функционал $M(\lambda, \tau, \nu, \Omega, q)$ (5) по γ, получаем

$$M_\gamma(\vec{l}) = M_{\gamma 1}(\vec{l}) - \mu\{1 + \ln[M_{\gamma 1}(\vec{l})/\mu]\}, \qquad \mu = \tau\Omega/2\pi, \tag{28}$$

где $M_{\gamma 1}(\vec{l})$ определяется из (5). Согласно (3), соответствующую ОМП μ_m параметра μ_0 запишем в виде

$$\mu_m = \tau_m\Omega_m/2\pi. \tag{29}$$

Для нахождения характеристик ОМП (27), (29) исследуем поведение функционала $M_\gamma(\vec{l})$ (28). Для этого введем нормированный функционал $M_{\gamma 2}(\vec{l}) = M_{\gamma 1}(\vec{l})/\mu$. Обозначим $S_{\gamma 2}(\vec{l}) = \langle M_{\gamma 2}(\vec{l})\rangle$ регулярную, $N_{\gamma 2}(\vec{l}) = M_{\gamma 2}(\vec{l}) - \langle M_{\gamma 2}(\vec{l})\rangle$ шумовую составляющие функционала $M_{\gamma 2}(\vec{l})$, а $N_{\gamma 3}(\vec{l}) = \mu_0^{1/2} N_{\gamma 2}(\vec{l})$, и перепишем функционал (28) в виде

$$M_\gamma(\vec{l}) = \mu\{S_{\gamma 2}(\vec{l}) - 1 + \varepsilon N_{\gamma 3}(\vec{l}) - \ln[S_{\gamma 2}(\vec{l}) + \varepsilon N_{\gamma 3}(\vec{l})]\}, \tag{30}$$

где $\varepsilon = 1/\sqrt{\mu_0}$. Аналогично (10), (11) при выполнении (3) получаем

$$S_{\gamma 2}(\vec{l}) = 1 + q_0 C(\lambda, \lambda, \lambda_0, \tau, \tau, \tau_0) \times C(\nu, \nu, \nu_0, \Omega, \Omega, \Omega_0)/\tau\Omega,$$

$$\langle N_{\gamma 3}(\vec{l}_1) N_{\gamma 3}(\vec{l}_2)\rangle = (\mu_0^2/\mu_1\mu_2)[q_0(2+q_0) \times C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, \tau_1, \tau_2, \tau_0) C(\nu_1, \nu_2, \nu_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_0) + C(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_1, \tau_2) \times C(\nu_1, \nu_1, \nu_2, \Omega_1, \Omega_1, \Omega_2)]/\tau_0\Omega_0, \tag{31}$$

где $\mu_i = \tau_i\Omega_i/2\pi$, $i = 1, 2$. Полагаем, что величина q_0 ограничена сверху, поэтому дисперсия нормированной шумовой составляющей $N_{\gamma 3}(\vec{l})$, согласно (31), ограничена при любых μ_0 (3). В силу (3)

$$\varepsilon = 1/\sqrt{\mu_0} \ll 1. \tag{32}$$

Кроме того, согласно (31), $S_{\gamma 2}(\vec{l}) \neq 0$. Разложим функционал (30) в ряд Маклорена по степеням ε и ограничимся членами, содержащими ε в степени, не выше первой. Тогда

$$M_\gamma(\vec{l}) \approx \mu\{S_{\gamma 2}(\vec{l}) - 1 - \ln[S_{\gamma 2}(\vec{l})] + \varepsilon N_{\gamma 3}(\vec{l})[S_{\gamma 2}(\vec{l}) - 1]/S_{\gamma 2}(\vec{l})\}. \tag{33}$$

Представим функционал $M_\gamma(\vec{l})$ (28) в виде суммы $M_\gamma(\vec{l}) = S_\gamma(\vec{l}) + N_\gamma(\vec{l})$ сигнальной $S_\gamma(\vec{l}) = \langle M_\gamma(\vec{l})\rangle$ и шумовой $N_\gamma(\vec{l}) = M_\gamma(\vec{l}) - \langle M_\gamma(\vec{l})\rangle$ функций. Согласно (33), при выполнении (3), (32)

$$S_\gamma(\vec{l}) \approx \mu\{S_{\gamma 2}(\vec{l}) - 1 - \ln[S_{\gamma 2}(\vec{l})]\},$$
$$N_\gamma(\vec{l}) \approx \mu N_{\gamma 2}(\vec{l})[S_{\gamma 2}(\vec{l}) - 1]/S_{\gamma 2}(\vec{l}). \tag{34}$$

Из (31), (34) следует, что сигнальная функция $S_\gamma(\vec{l})$ достигает наибольшего максимума при $\vec{l} = \vec{l}_0$. Кроме того, в силу асимптотически (при $\mu_0 \to \infty$) гауссовского характера функционала $M_{\gamma 1}(\vec{l})$ (5) шумовая функция $N_\gamma(\vec{l})$ является реализацией асимптотически гауссовского случайного поля.

Исследуем поведение функционала (28) в малой окрестности точки $\vec{l}_0$. Принимая во внимание асимптотически гауссовский характер функционала (28), ограничимся рассмотрением первых двух его моментов. Из (31), (34) получаем, что при $\delta \to 0$

$$S_\gamma(\vec{l}) = S_0(\vec{l}) + o(\delta^p), \quad p \geq 1, \tag{35}$$

где $S_0(\vec{l}) = \langle M_0(\vec{l})\rangle$ – сигнальная составляющая логарифма ФОП $M_0(\vec{l})$ (5).

Аналогично для корреляционной функции приращений шумовой функции $N_\gamma(\vec{l})$ (34) при $\delta \to 0$ получаем

$$\langle[N_\gamma(\vec{l}_1) - N_\gamma(\vec{l}^*)][N_\gamma(\vec{l}_2) - N_\gamma(\vec{l}^*)]\rangle = \langle[N_0(\vec{l}_1) - N_0(\vec{l}^*)][N_0(\vec{l}_2) - N_0(\vec{l}^*)]\rangle + o(\delta^p), \quad p \geq 1, \tag{36}$$

где $N_0(\vec{l}) = M_0(\vec{l}) - \langle M_0(\vec{l})\rangle$ – шумовая составляющая логарифма ФОП (5), $\vec{l}^*$ – фиксированное значение вектора оцениваемых параметров. Отметим, что моменты $S_0(\vec{l})$ и $\langle N_0(\vec{l}_1) N_0(\vec{l}_2)\rangle$ функционала $M_0(\vec{l})$ совпадают с моментами $S^*(\vec{l})$ (10) и $\langle N^*(\vec{l}_1) N^*(\vec{l}_2)\rangle$ (11) соответственно, если в (10), (11) полагать $\gamma^* = \gamma_0$.

Как следует из (34), сигнальная функция $S_\gamma(\vec{l})$ достигает наибольшего максимума при $\vec{l} = \vec{l}_0$, а реализации шумовой функции $N_\gamma(\vec{l})$ непрерывны с вероятностью 1. Предположим, что кроме (3) выполняется условие

$$z_\gamma^2 = S_\gamma^2(\vec{l}_0)/\langle N_\gamma^2(\vec{l}_0)\rangle = \mu_0[q_0 - \ln(1+q_0)]^2/q_0^2 \gg 1, \tag{37}$$

которое совпадает с условием (19) при $\gamma^* = \gamma_0$ и является условием высокой апостериорной точности ОМП $\vec{l}_m$ (27). Тогда ОМП $\vec{l}_m$ лежит в малой окрестности точки $\vec{l}_0$. Полагаем, что величина z_γ (37) настолько велика, что величина этой окрестности не превышает δ, так что согласно (35), (36) первые два момента приращений функционала $M_\gamma(\vec{l})$ приближенно совпадают с соответствующими моментами приращений функционала $M_0(\vec{l})$ (5). Тогда с учетом асимптотически гауссовского характера функционалов $M_\gamma(\vec{l})$ и $M_0(\vec{l})$ характеристики ОМП $\vec{l}_m$ (27) приближенно совпадают с характеристиками ОМП $\vec{l}_{m0}$ (6). В частности, нормированные смещения $b_{mp} = \langle \lambda_m - \lambda_0 \rangle / \tau_0 = \langle \nu_m - \nu_0 \rangle / \Omega_0$ и $b_{md} = \langle \tau_m - \tau_0 \rangle / \tau_0 = \langle \Omega_m - \Omega_0 \rangle / \Omega_0$, а также рассеяния $V_{mp} = \langle (\lambda_m - \lambda_0)^2 \rangle / \tau_0^2 = \langle (\nu_m - \nu_0)^2 \rangle / \Omega_0^2$ и $V_{md} = \langle (\tau_m - \tau_0)^2 \rangle / \tau_0^2 = \langle (\Omega_m - \Omega_0)^2 \rangle / \Omega_0^2$ ОМП $\vec{l}_m$ (27) можно получить из (25), где следует считать

$$\begin{gathered} z_1^2 = \mu_0[q_0 - \ln(1+q_0)]^2/q_0^2 = z_\gamma^2, \\ z_2^2 = \mu_0[(1+q_0)\ln(1+q_0) - q_0]^2/q_0^2, \\ R = [\ln(1+q_0) - q_0/(1+q_0)] \times \\ \times (1+q_0)^2[q_0 - \ln(1+q_0)]^{-1}. \end{gathered} \tag{38}$$

С учетом этих выражений нормированные смещение $b_{m\mu} = \langle \mu_m - \mu_0 \rangle / \mu_0$ и рассеяние $V_{m\mu} = \langle (\mu_m - \mu_0)^2 \rangle / \mu_0^2$ ОМП μ_m (29) можно определить из (26). Отсюда следует, что в условиях высокой апостериорной точности (37) характеристики совместных ОМП $\vec{l}_m$ (27) при неизвестной величине γ_0 совпадают с характеристиками ОМП $\vec{l}_{m0}$ (6) при известном γ_0, т.е. незнание величины γ_0 асимптотически не влияет на точность ОМП, но приводит к усложнению алгоритма оценки.

Отметим также, что отношения χ_d, χ_p и χ_μ, зависимости которых от величины $\eta = \gamma^*/\gamma_0$ показаны на рис. 2, являются также отношениями рассеяний КПО $\vec{l}_q$ (7), μ_q (9) к соответствующим рассеяниям ОМП $\vec{l}_m$ (27), μ_m (29) и характеризуют выигрыши в точности ОМП (27), (29) по сравнению с КПО (7), (9) при неизвестной величине γ_0 спектральной плотности (2).

Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ван-Трис, Гарри Л.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1977. Т. 3.
2. *Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н.* Статистическая теория измерительных радиосистем. М.: Радио и связь, 1981.
3. *Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И.* Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1991.
4. *Трифонов А.П., Захаров А.В.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1988. Т. 31. № 1. С. 24.
5. *Трифонов А.П., Парфенов В.И.* // Изв. вузов. Приборостроение. 1986. Т. 29. № 7. С. 7.
6. *Трифонов А.П., Нечаев Е.П.* // Изв. вузов. Приборостроение. 1988. Т. 31. № 12. С. 3.
7. *Трифонов А.П., Нечаев Е.П.* // Изв. вузов. Приборостроение. 1987. Т. 30. № 11. С. 7.
8. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
9. *Трифонов А.П., Захаров А.В.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1986. Т. 29. № 4. С. 36.
10. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
11. *Kailath T.* // IEEE Trans. 1966. V. IT-12. № 4. P. 442.
12. *Терентьев А.С.* // РЭ. 1968. Т. 13. № 4. С. 652.
13. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.