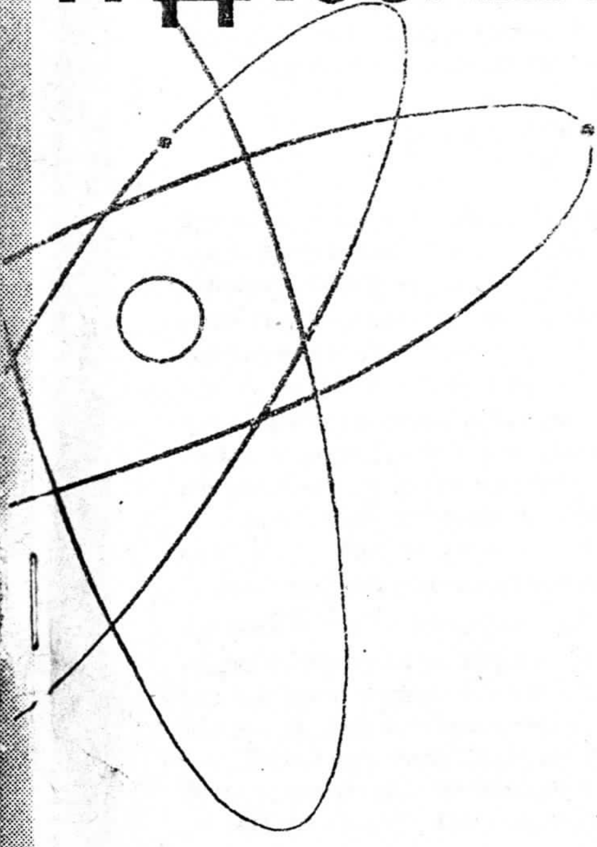
ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

НТУУ "КПІ"
100
1898·1998

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА



ТОМ 40
9-10

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

1997

УДК 621.391

ТРИФОНОВ А. П., БЕСПАЛОВА М. Б.

ОЦЕНКА ПЕРИОДА СЛЕДОВАНИЯ СЛАБЫХ СЛУЧАЙНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Выполнен синтез и анализ алгоритма оценки максимального правдоподобия периода следования. Найдены потери в точности оценки вследствие наличия неинформативных параметров.

Случайные импульсы и их последовательности часто используются в качестве математических моделей реальных сигналов. Такими моделями могут быть описаны отраженные сигналы в локации (особенно в гидролокации) и в системах, использующих сверхширокополосные сигналы, сигналы в спектроскопии и радиоастрономии [1], сигналы, искаженные модулирующей помехой [2]. Кроме того, последовательности случайных сигналов могут быть использованы в качестве переносчика информации (несущей), особенно в оптических линиях связи [3] и в гидроакустике [4].

Представим последовательность случайных импульсов в виде

$$s(t, \theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t - k\theta, \mathbf{l})\, \zeta(t - k\theta). \tag{1}$$

Здесь θ — период следования случайных импульсов, $f(t, \mathbf{l})$ — модулирующая детерминированная функция, которая в общем случае содержит p неизвестных параметров $\mathbf{l} = \| l_1 \dots l_p \|$, $\zeta(t)$ — стационарный гауссовский центрированный случайный процесс, известная корреляционная функция которого $K(\Delta, \boldsymbol{\lambda}) = \langle \zeta(t)\, \zeta(t + \Delta) \rangle$ может содержать m неизвестных параметров $\boldsymbol{\lambda} = \| \lambda_1 \dots \lambda_m \|$. Полагаем далее, что отдельные импульсы не перекрываются и модулирующая функция в (1) нормирована так, что $\max f(t, \mathbf{l}) = 1$. Пусть последовательность случайных импульсов принимается на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Тогда реализация наблюдаемых на интервале $[0, T]$ данных запишется как $x(t) = s(t, \theta_0, \mathbf{l}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) + n(t)$, где θ_0, $\mathbf{l}_0$, $\boldsymbol{\lambda}_0$ — истинные значения неизвестных периода и параметров модулирующей функции и спектра мощности $G(\omega, \boldsymbol{\lambda}_0)$ процесса $\zeta(t)$ соответственно. Рассмотрим оценку периода следования θ импульсов (1), полагая, что в оценке параметров $\mathbf{l}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ нет необходимости, т. е. они являются неинформативными (несущественными) [5].

Для оценки периода следования случайных импульсов (1) воспользуемся методом максимального правдоподобия [1, 5]. Согласно алгоритму максимального правдоподобия для получения оценки необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП). В соответствии с [1] логарифм ФОП имеет вид

$$L(\theta, 1, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T x(t_1)\, x(t_2)\, Q(t_1, t_2, \theta, 1, \boldsymbol{\lambda})\, d t_1, d t_2 -$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 d\chi \int_o^T \widetilde{Q}(t, t, \theta, 1, \boldsymbol{\lambda}, \chi)\, d t. \qquad (2)$$

Здесь

$$Q(t_1, t_2, \theta, 1, \boldsymbol{\lambda}) = \widetilde{Q}(t_1, t_2, \theta, 1, \boldsymbol{\lambda}, \chi = 1),$$

а функция $\widetilde{Q}(t_1, t_2, \theta, 1, \boldsymbol{\lambda}, \chi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{N_0}{2} \widetilde{Q}(t_1, t_2, \theta, 1, \boldsymbol{\lambda}, \chi) + \chi \int_0^T \widetilde{Q}(t_1, t, \theta, 1, \boldsymbol{\lambda}, \chi) \times$$

$$\times K_s(t, t_2, \theta, 1, \boldsymbol{\lambda})\, d t = K_s(t_1, t_2, \theta, 1, \boldsymbol{\lambda}), \qquad (3)$$

где

$$K_s(t_1, t_2, \theta, 1, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_1 - k\theta, 1) \times$$

$$\times f(t_2 - n\theta, 1)\, K\, [t_2 - t_1 + (k - n)\theta, 1\,]$$

— корреляционная функция последовательности случайных импульсов (1).

Часто реальные условия наблюдения таковы, что каждый импульс последовательности (1) является слабым и выполняется условие [1]

$$q = 2 \sup_{\omega} G(\omega, \boldsymbol{\lambda}_0) / N_0 << 1. \qquad (4)$$

Кроме того, время корреляции случайного процесса $\zeta(t)$ обычно существенно меньше периода следования импульсов, так что

$$\Omega_0 \theta_0 / 2\pi >> 1, \qquad (5)$$

где $\Omega_0 = \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega, \boldsymbol{\lambda}_0)\, d\omega \left[\sup_{\omega} G(\omega, \boldsymbol{\lambda}_0)\right]^{-2}$ — эквивалентная полоса частот процесса $\zeta(t)$. При выполнении (5) отдельные импульсы последовательности (1) некоррелированы и корреляционная функция всей последовательности перепишется как

$$K_s(t_1, t_2, \theta, 1, \boldsymbol{\lambda}) = K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda}) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{N-1} f(t_1 - k\theta, \mathbf{l}) f(t_2 - k\theta, \mathbf{l}). \tag{6}$$

Условие (4) позволяет найти приближенное решение интегрального уравнения (3) методом итераций [1]. При учете первых двух итераций логарифм ФОП (2), следуя [1] и учитывая (6), получаем в виде

$$L(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{2}{N_0^2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \int_0^T x(t_1)\, x(t_2) f(t_1 - k\theta, \mathbf{l}) f(t_2 - k\theta, \mathbf{l}) \times$$

$$\times K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda})\, d t_1\, d t_2 - \frac{N}{N_0} [K(0, \boldsymbol{\lambda}) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t, \mathbf{l})\, d t + \frac{1}{N_0} \int\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t_1, \mathbf{l}) f^2(t_2, \mathbf{l}) \times$$

$$\times K^2(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda})\, d t_1\, d t_2\,]. \tag{7}$$

Согласно [5] оценка максимального правдоподобия (ОМП) периода следования импульсов (1) определяется выражением

$$\widehat{\theta} = \arg\sup L(\theta), \tag{8}$$

где $L(\theta) = \sup\limits_{\mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}} L(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda})$. Как показано в [5], ОМП (8) в условиях высокой апостериорной точности можно найти из решения системы $p + m + 1$ уравнения правдоподобия

$$\left[\frac{\partial L(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \theta}\right]_{\widehat{\theta}, \widehat{\mathbf{l}}, \widehat{\boldsymbol{\lambda}}} = 0, \quad \left[\frac{\partial L(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial l_i}\right]_{\widehat{\theta}, \widehat{\mathbf{l}}, \widehat{\boldsymbol{\lambda}}} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial L(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_\nu}\right]_{\widehat{\theta}, \widehat{\mathbf{l}}, \widehat{\boldsymbol{\lambda}}} = 0, \tag{9}$$

где $i = \overline{1, p}, \nu = \overline{1, m}$. Здесь $(\widehat{\theta}, \widehat{\mathbf{l}}, \widehat{\boldsymbol{\lambda}}) = \arg\sup L(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda})$ — совместные ОМП всех неизвестных параметров последовательности (1).

Для решения системы уравнений правдоподобия (9) представим логарифм ФОП (7) в виде суммы сигнальной и шумовой функций [5]

$$L(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}) = S(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}) + N(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Здесь $S(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}) = \langle L(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}) \rangle$, $N(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}) = L(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}) - \langle L(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}) \rangle$, а усреднение выполняется по реализациям белого шума $n(t)$ и процесса $\zeta(t)$ при фиксированных истинных значениях неизвестных параметров θ_0, $\mathbf{l}_0$ и $\boldsymbol{\lambda}_0$.

Учитывая условия (4) и (5), получаем выражения для сигнальной функции и корреляционной функции шумовой функции

$$S(\theta, \mathbf{l}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{2}{N_0^2} \sum_{k=0}^{N-1} \int\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1 - k\theta, \mathbf{l}) f(t_1 - k\theta_0, \mathbf{l}_0) \times$$
$$\times f(t_2 - k\theta, \mathbf{l}) f(t_2 - k\theta_0, \mathbf{l}_0) K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda}) \times$$
$$\times K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda}_0)\, d t_1\, d t_2 - \frac{N}{N_0^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t_1, \mathbf{l}) \times$$
$$\times f^2(t_2, \mathbf{l}) K^2(t_2 - t_1, \mathbf{l})\, d t_1\, d t_2, \qquad (10)$$

$$B(\theta_1, \theta_2, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) = \langle N(\theta_1, \mathbf{l}_1, \boldsymbol{\lambda}_1) N(\theta_2, \mathbf{l}_2, \boldsymbol{\lambda}_2) \rangle =$$
$$= \frac{2}{N_0^2} \sum_{k=0}^{N-1} \int\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1 - k\theta_1, \mathbf{l}_1) f(t_2 - k\theta_1, \mathbf{l}_1) f(t_1 - k\theta_2, \mathbf{l}_2) \times$$
$$\times f(t_2 - k\theta_2, \mathbf{l}_2) K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda}_1) K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda}_2)\, d t_1\, d t_2. \qquad (11)$$

При выводе этих формул предполагалось, что $|\theta - \theta_0| < \min(\theta, \theta_0) / N$ и $|\theta_1 - \theta_2| < \min(\theta_1, \theta_2) / N$, так что формулы (10), (11) описывают главные максимумы соответствующих функций [5].

Определим выходное отношение сигнал—шум [5] как

$$z^2 = S^2(\theta_0, \mathbf{l}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) / B(\theta_0, \theta_0, \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_0, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) =$$
$$= N \int\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t_1, \mathbf{l}_0) f^2(t_2, \mathbf{l}_0) K^2(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda}_0)\, d t_1\, d t_2 / 4 N_0^2. \qquad (12)$$

В дальнейшем будем полагать, что выходное отношение сигнал—шум велико, т. е. $z \gg 1$ и совместные ОМП всех неизвестных параметров последовательности (1) обладают высокой апостериорной точностью. Решение системы уравнений правдоподобия (9) будем искать методом малого параметра [5], в качестве которого используем величину $\varepsilon = 1 / z \ll 1$. Ограничиваясь первым приближением, получаем, что совместные ОМП несмещенные и асимптотически совместно-эффективные (при $q \to 0$ и $z \to \infty$). Следовательно, корреляционную матрицу **K** совместных ОМП всех неизвестных параметров последовательности (1) можно представить в виде

$$\mathbf{K} = \left\| \begin{matrix} N_2\, A & N_1\, \mathbf{B} \\ N_1\, \mathbf{B}^+ & N\, \mathbf{D} \end{matrix} \right\|^{-1}. \qquad (13)$$

Здесь (+) — оператор транспонирования,

$$N_2 = \sum_{k=0}^{N-1} k^2 = N(N-1)(2N-1)/6,$$

$$N_1 = \sum_{k=0}^{N-1} k = N(N-1)/2,$$

$$A = \frac{1}{N_2}\left[\frac{\partial^2 B(\theta_1, \theta_2, \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_0, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right]_{\theta_0} =$$

$$= \frac{4}{N_0^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f^2(t_1, \mathbf{l}_0)\left[\frac{\partial f(t_2, \mathbf{l}_0)}{\partial t_2}\right]^2 + f(t_1, \mathbf{l}_0) f(t_2, \mathbf{l}_0) \times\right.$$

$$\left.\times \frac{\partial f(t_1, \mathbf{l}_0)}{\partial t_1}\frac{\partial f(t_2, \mathbf{l}_0)}{\partial t_2}\right\} K^2(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda}_0)\, d t_1\, d t_2, \tag{14}$$

$$\mathbf{B} = ||\, \mathbf{B}_l \mathbf{B}_\lambda \,||,$$

$$\mathbf{B}_l = -\,||\, B_{li} \,||,\ i = \overline{1, p},\ \mathbf{B}_\lambda = -\,||\, B_{\lambda\nu} \,||\, \nu = \overline{1, m}$$

— векторы-строки с элементами

$$B_{li} = -\frac{1}{N_1}\left[\frac{\partial^2 B(\theta_1, \theta_2, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial \theta_1 \partial l_{2i}}\right]_{\theta_0, \mathbf{l}_0} =$$

$$= \frac{4}{N_0^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\left[f^2(t_1, \mathbf{l})\frac{\partial f(t_2, \mathbf{l})}{\partial t_2}\frac{\partial f(t_2, \mathbf{l})}{\partial l_i} + f(t_1, \mathbf{l}) \times\right.$$

$$\left.\times f(t_2, \mathbf{l})\frac{\partial f(t_1, \mathbf{l})}{\partial t_1}\frac{\partial f(t_2, \mathbf{l})}{\partial l_i}\right]_{l_0} K^2(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda}_0)\, d t_1\, d t_2, \tag{15}$$

$$B_{\lambda\nu} = -\frac{1}{N_1}\left[\frac{\partial^2 B(\theta_1, \theta_2, \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2)}{\partial \theta_1 \partial \lambda_{2\nu}}\right]_{\theta_0, \boldsymbol{\lambda}_0} =$$

$$= \frac{4}{N_0^2}\int\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t_1, \mathbf{l}_0) f(t_2, \mathbf{l}_0)\frac{\partial f(t_2, \mathbf{l}_0)}{\partial t_2} K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda}_0) \times$$

$$\left[\times \frac{\partial K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_\nu}\right]_{\boldsymbol{\lambda}_0} d t_1\, d t_2,, \tag{16}$$

$$\mathbf{D} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{D}_l & \mathbf{D}_0 \\ \mathbf{D}_0^+ & \mathbf{D}_\lambda \end{matrix} \right\|$$

— блочная матрица, элементы которой определяются выражениями

$$\mathbf{D}_l = \| D_{lij} \|, \ i, j = \overline{1, p}, \tag{17}$$

$$D_{lij} = \frac{1}{N} \left[\frac{\partial^2 B(\theta_0, \theta_0, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} \right]_{\mathbf{l}_0} =$$

$$= \frac{4}{N_0^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \left[f^2(t_1, \mathbf{l}) \frac{\partial f(t_2, \mathbf{l})}{\partial l_i} \frac{\partial f(t_2, \mathbf{l})}{\partial l_j} + \right.$$

$$\left. + f(t_1, \mathbf{l}) f(t_2, \mathbf{l}) \frac{\partial f(t_1, \mathbf{l})}{\partial l_i} \frac{\partial f(t_2, \mathbf{l})}{\partial l_j} \right]_{\mathbf{l}_0} \times$$

$$\times K^2(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda}_0) \, d t_1 \, d t_2, \tag{18}$$

$$\mathbf{D}_0 = \| D_{0i\nu} \|, \ \nu = \overline{1, m},$$

$$D_{0i\nu} = \frac{1}{N} \left[\frac{\partial^2 B(\theta_0, \theta_0, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2)}{\partial l_{1i} \partial \lambda_{2\nu}} \right]_{\mathbf{l}_0, \boldsymbol{\lambda}_0} =$$

$$= \frac{4}{N_0^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f^2(t_1, \mathbf{l}_0) f(t_2, \mathbf{l}_0) K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda}_0) \left[\frac{\partial f(t_2, \mathbf{l})}{\partial l_i} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_\nu} \right]_{\mathbf{l}_0, \boldsymbol{\lambda}_0} d t_1 \, d t_2,$$

$$\mathbf{D}_\lambda = \| D_{\lambda \nu \alpha} \|, \ \alpha = \overline{1, m}, \tag{19}$$

$$D_{\lambda \nu \alpha} = \frac{1}{N} \left[\frac{\partial^2 B(\theta_0, \theta_0, \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2)}{\partial \lambda_{1\nu} \partial \lambda_{2\alpha}} \right]_{\boldsymbol{\lambda}_0} =$$

$$= \frac{2}{N_0^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f^2(t_1, \mathbf{l}_0) f^2(t_2, \mathbf{l}_0) \left[\frac{\partial K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_\nu} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial K(t_2 - t_1, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_\alpha} \right]_{\boldsymbol{\lambda}_0} d t_1 \, d t_2.$$

Параметры $\mathbf{l}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ последовательности (1) являются неинформативными, поэтому нет необходимости определять все элементы корреляционной матрицы (13). Достаточно найти элемент, расположенный на пересечении первой строки и первого столбца этой матрицы, равный дисперсии σ^2 ОМП (8) периода следования. Используя формулу Фробениуса [6], для дисперсии ОМП (8) периода следования импульсов (1) получаем

$$\sigma^2 = (N_2 A - N_1^2 \mathrm{B} \mathrm{D}^{-1} \mathrm{B}^+ / N)^{-1}. \tag{20}$$

Рассмотрим влияние наличия неинформативных параметров на точность оценки периода следования случайных импульсов. С этой целью найдем дисперсию ОМП периода следования при отсутствии неинформативных параметров

$$\sigma_0^2 = 1 / N_2 A = 6 / A N (N-1)(2N-1). \tag{21}$$

Учитывая (21), перепишем (20) в виде

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 / [1 - 3(N-1)\rho / 2(2N-1)], \tag{22}$$

где

$$\rho = \mathrm{B} \mathrm{D}^{-1} \mathrm{B}^+ / A. \tag{23}$$

Согласно (22) проигрыш в точности оценки периода следования случайных импульсов из-за наличия неинформативных параметров можно охарактеризовать отношением

$$\chi = \sigma^2 / \sigma_0^2 = [1 - 3(N-1)\rho / 2(2N-1)]^{-1} \geq 1. \tag{24}$$

Таким образом, наличие у последовательности случайных сигналов (1) неинформативных параметров приводит в общем случае к снижению точности оценки периода следования.

В качестве простого примера рассмотрим случай, когда корреляционная функция процесса $\zeta(t)$ в (1) не содержит неизвестных параметров, а модулирующая функция содержит один неизвестный параметр. Положим, что неизвестно время прихода последовательности (1), так что

$$f(t, \mathrm{l}) = f(t - l). \tag{25}$$

Тогда, как следует из (14)...(17), $B_{l_1} = A$, $D_{l_{11}} = A$ и $\rho = 1$, а выражение для проигрыша в точности оценки (24) перепишется как

$$\chi = 2(2N-1)/(N+1). \tag{26}$$

Последняя формула показывает, что проигрыш в точности оценки периода следования случайных импульсов из-за незнания времени прихода последовательности возрастает с увеличением числа импульсов в последовательности от минимального значения $\chi = 2$ при $N = 2$ до максимального $\chi = 4$ при $N \to \infty$.

Полученное выражение (20) для дисперсии ОМП (8) периода следования существенно упрощается, если время корреляции процесса $\zeta(t)$ много меньше длительности модулирующей функции $f(t, \mathbf{l})$, так что

$$\Omega_0 \tau_0 / 2\pi \gg 1, \tag{27}$$

где $\tau_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(t, \mathbf{l}_0)\, d\,t$ — эквивалентная длительность модулирующей функции. При выполнении (27), выражение для отношения сигнал—шум (14) принимает вид $z^2 = N\,\Omega_0\, q^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^4(t, \mathbf{l}_0)\, d\,t / 16\pi$. Соответственно выражения для матричных элементов (16)...(21) перепишутся как

$$A = \frac{2\,\Omega_0\, q^2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(t, \mathbf{l}_0) \left[\frac{\partial f(t, \mathbf{l}_0)}{\partial\, t}\right]^2 d\,t, \tag{28}$$

$$B_{li} = \frac{2\,\Omega_0\, q^2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(t, \mathbf{l}_0) \left[\frac{\partial f(t, \mathbf{l})}{\partial\, t} \frac{\partial f(t, \mathbf{l})}{\partial\, l_i}\right]_{\mathbf{l}_0} d\,t, \quad i = \overline{1, p}, \tag{29}$$

$$B_{\lambda\nu} = 0, \;\; \nu = \overline{1, m}. \tag{30}$$

$$D_{lij} = \frac{2\,\Omega_0\, q^2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(t, \mathbf{l}_0) \left[\frac{\partial f(t, \mathbf{l})}{\partial\, l_i} \frac{\partial f(t, \mathbf{l})}{\partial\, l_j}\right]_{\mathbf{l}_0} d\,t, \quad j = \overline{1, p}, \tag{31}$$

$$D_{0i\nu} = \frac{2}{\pi N_0^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega, \boldsymbol{\lambda}_0) \left[\frac{\partial G(\omega, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_\nu}\right]_{\boldsymbol{\lambda}_0} d\,\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^3(t, \mathbf{l}_0) \left[\frac{\partial f(t, \mathbf{l})}{\partial\, l_i}\right]_{\mathbf{l}_0} d\,t, \tag{32}$$

$$D_{\lambda\nu\alpha} = \frac{1}{\pi N_0^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial G(\omega, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_\nu} \frac{\partial G(\omega, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_\alpha}\right]_{\boldsymbol{\lambda}_0} d\,\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^4(t, \mathbf{l}_0)\, d\,t, \;\; \alpha = \overline{1, m},. \tag{33}$$

Сопоставление (14)...(19) и (28)...(33) показывает, что выполнение условия (27) позволяет избежать вычисления двойных интегралов при расчете дисперсии ОМП (20). Кроме того, согласно (30), все компоненты вектора-строки B_λ (15) равны нулю. Это позволяет несколько упростить выражение (23). Действительно, опять используя формулу Фробениуса [6], получаем

$$\rho = \mathbf{B}_l \, [\mathbf{D}_l - \mathbf{D}_0 \, \mathbf{D}_\lambda^{-1} \, \mathbf{D}_0^+ \,]^{-1} \, \mathbf{B}_l^+ \, / \, A. \tag{34}$$

Расчеты по этой формуле можно выполнить гораздо проще, чем по общей формуле (23). Действительно, расчет по (23) требует обращение матрицы $\mathbf{D}$ размером $(m + p) \times (m + p)$. Если же выполняется условие (27), то при расчете по формуле (34) необходимо последовательно обращать матрицу $\mathbf{D}_\lambda$ размером $m \times m$ и матрицу $[\mathbf{D}_l - \mathbf{D}_0 \, \mathbf{D}_\lambda^{-1} \, \mathbf{D}_0^+ \,]$ размером $p \times p$, что существенно облегчает вычисления.

Положим далее, что модулирующая функция в (1) содержит один неизвестный параметр ($p = 1$), а корреляционная функция процесса $\zeta\,(t)$ содержит m произвольных неизвестных параметров. Пусть неизвестным параметром модулирующей функции является время прихода (25). Тогда, как следует из (28), (29), (31) $B_{l1} = D_{l11} = A$. Кроме того, согласно (32) $D_{01\nu} = 0$ для всех $\nu = \overline{1, m}$. В результате из (34) получаем, что $\rho = 1$. Следовательно, проигрыш в точности оценки периода следования из-за незнания времени прихода последовательности и m параметров $\boldsymbol{\lambda}$ корреляционной функции процесса $\zeta\,(t)$ описывается выражением (26). Поэтому, если выполняется (27) и неизвестно время прихода последовательности (1), то ОМП периода следования инвариантна к наличию неинформативных параметров корреляционной функции процесса $\zeta\,(t)$ в (1).

Приведенные результаты получены при выполнении гранта по фундаментальным исследованиям в области автоматики, информатики и связи.

28

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения оценок и модуляции. Т. 3 / Пер. с англ. Под ред. проф. В. Т. Горяинова.— М. : Сов. радио, 1977.— 664 с.
2. *Кремер И. Я., Владимиров В. И., Карпухин В. И.* Модулирующие помехи и прием радиосигналов / Под. ред. И. Я. Кремера.— М. : Сов. радио, 1972.— 480 с.
3. *Зюко А. Г., Коробов Ю. Ф.* Теория передачи сигналов.— М. : Связь, 1972.— 282 с.
4. *Евтютов А. И., Митько В. Б.* Инженерные расчеты в гидроакустике.— Л. : Судостроение, 1988.— 288 с.
5. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М. : Сов. радио, 1978.— 296 с.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1968.— 576 с.

Воронежский государственный университет. Поступила в редакцию 01.08.96.