ISSN 0033-8486

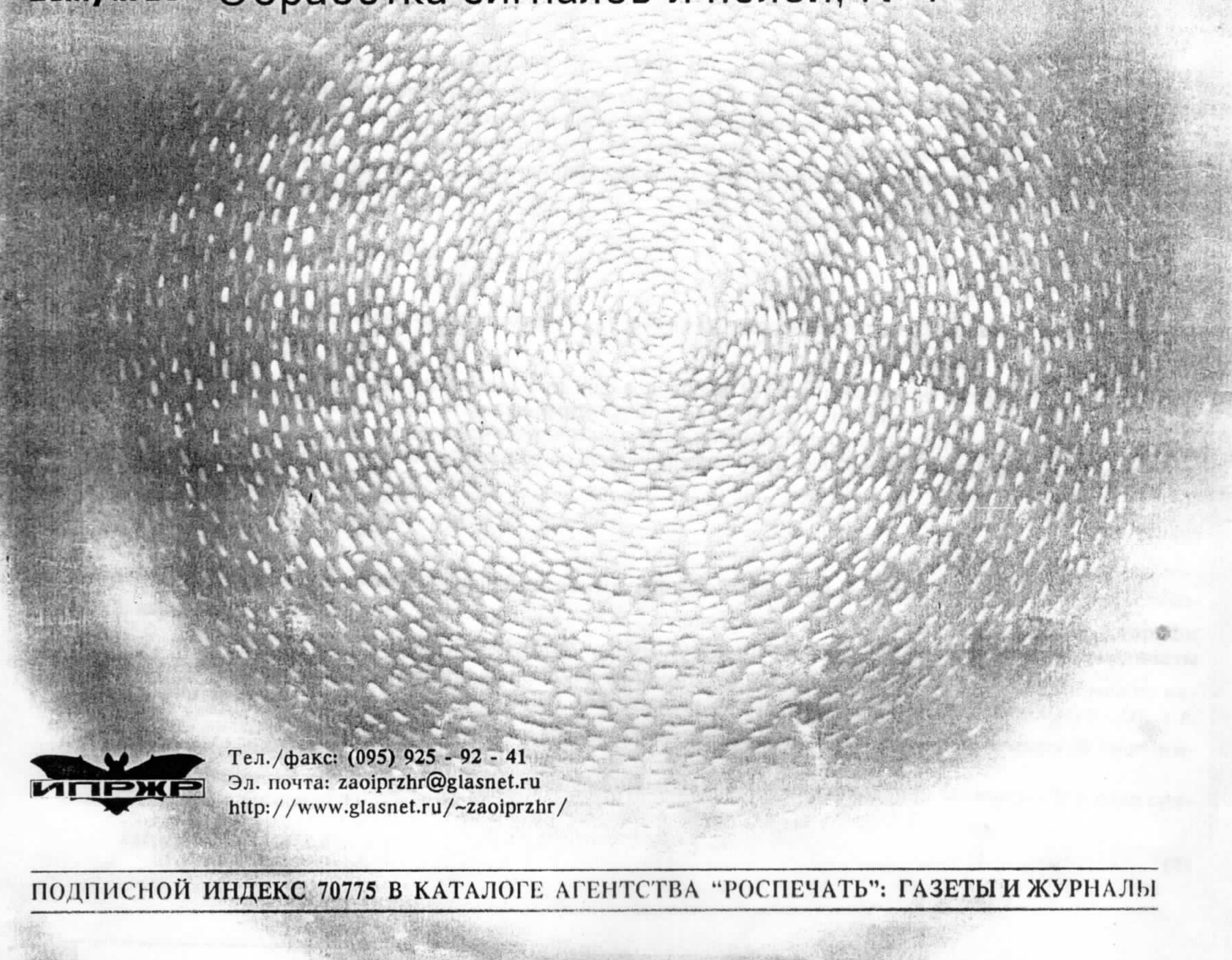
РАДИОТЕХНИКА

3 1998

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

РАДИОСИСТЕМЫ

Выпуск 28 Обработка сигналов и полей, № 1



ИПРЖР
Тел./факс: (095) 925 - 92 - 41
Эл. почта: zaoiprzhr@glasnet.ru
http://www.glasnet.ru/~zaoiprzhr/

ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС 70775 В КАТАЛОГЕ АГЕНТСТВА “РОСПЕЧАТЬ”: ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ

ISSN 0033-8486

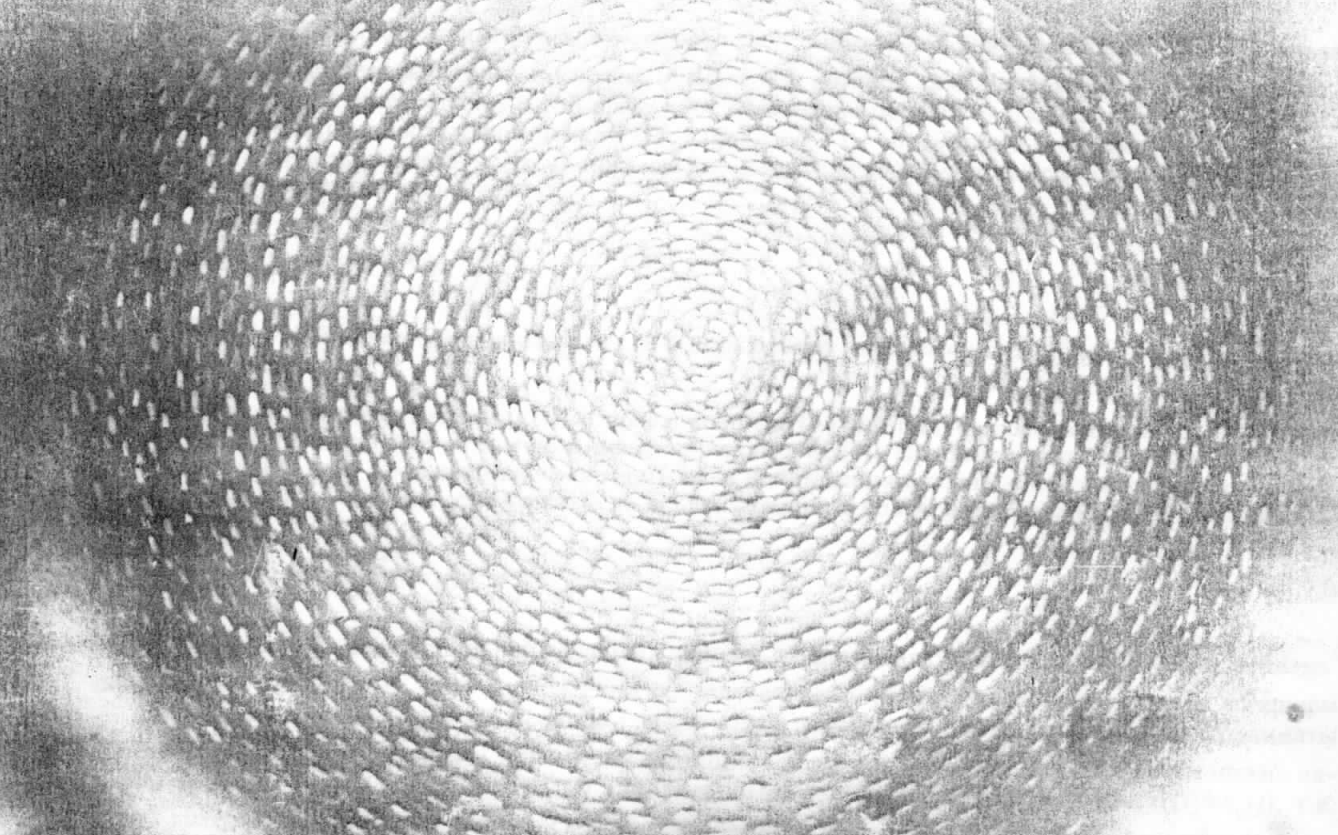
РАДИОТЕХНИКА

3 1998

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

РАДИОСИСТЕМЫ

Выпуск 28 Обработка сигналов и полей, № 1



Тел./факс: (095) 925 - 92 - 41
Эл. почта: zaoiprzhr@glasnet.ru
http://www.glasnet.ru/~zaoiprzhr/

ИПРЖР

ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС 70775 В КАТАЛОГЕ АГЕНТСТВА "РОСПЕЧАТЬ": ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ

УДК 621.391

Квазиправдоподобная оценка времени прихода и периода следования видеоимпульсов

А.П.Трифонов, М.Б.Беспалова

Найдены потери в точности оценок из-за различия в форме ожидаемых и принимаемых видеоимпульсов.

The losses of the accuracy of the estimation because of the differences between the expected and received forms of videopulses are founded

Во многих прикладных задачах статистической радиотехники необходимо оценивать основные временные параметры последовательности видеоимпульсов — время прихода и период следования. В [1—3 и др.] рассмотрены оценки максимального правдоподобия (ОМП) времени прихода и периода следования видеоимпульсов в предположении, что их форма априори точно известна. В действительности, форма видеоимпульса, которая используется при синтезе ОМП (ожидаемая или предполагаемая), может отличаться от реальной формы видеоимпульсов в принимаемой последовательности.

Цель работы — определение потерь в точности оценок времени прихода и периода следования из-за отличия в форме ожидаемых и принимаемых видеоимпульсов.

Положим, что на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 в течение интервала времени $[0,T]$ наблюдается последовательность из N видеоимпульсов

$$\tilde{s}_0(t,\lambda_0,\theta_0)=\sum_{k=0}^{N-1} s_0[t-(k-\mu)\theta_0-\lambda_0], \tag{1}$$

где функция $S_0(\cdot)$ — форма одного импульса; θ — период следования; λ — временное положение последовательности; параметр μ определяет точку последовательности, с которой связано ее временное положение λ. Так, при $\mu=0$ величина λ представляет собой временное положение первого импульса последовательности, при $\mu=(N-1)/2$ — середины последовательности (1), а при $\mu=N-1$ — последнего импульса.

Для синтеза алгоритма оценки времени прихода и периода следования по методу максимального правдоподобия возьмем последовательность

$$\tilde{s}_1(t,\lambda,\theta)=\sum_{k=0}^{N-1} s_1[t-(k-\mu)\theta-\lambda], \tag{2}$$

где функция $s_1(\cdot)$ — ожидаемая (предполагаемая) форма одного видеоимпульса, причем в общем случае $s_1(t)\neq s_0(t)$ в (1).

В соответствии с методом максимального правдоподобия [4] для получения оценок необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП). Положим, что отдельные импульсы последовательностей (1), (2) не перекрываются и интервал наблюдения больше длительности всей последовательности, так что $T>N\theta$. Тогда, с точностью до несущественного слагаемого, логарифм ФОП можно записать в виде [4]

$$L(\lambda,\theta)=\frac{2}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^T x(t)s_1[t-(k-\mu)\theta-\lambda]dt, \tag{3}$$

где $x(t)=\tilde{s}_0(t,\lambda_0,\theta_0)+n(t)$ — реализация наблюдаемых данных. Реализация содержит принимаемую последовательность видеоимпульсов (1), отличающуюся от последовательности (2), для которой записан логарифм ФОП (3). Поэтому оценки $\hat{\lambda}$ и $\hat{\theta}$ времени прихода λ_0 и периода следования θ_0, определяемые как координаты положения абсолютного (наибольшего) максимума функции (3), не являются ОМП. Эти оценки можно назвать квазиправдоподобными оценками (КПО) [5], поскольку они совпадают с ОМП при $s_1(t)\equiv s_0(t)$, т.е. когда форма видеоимпульсов ожидаемой последовательности (2) полностью совпадает с формой видеоимпульсов принимаемой последовательности (1).

Для определения характеристик КПО времени прихода и периода следования запишем (3) в виде суммы сигнальной и шумовой функций [4]

$$L(\lambda,\theta)=S(\lambda,\theta)+N(\lambda,\theta), \tag{4}$$

$$S(\lambda,\theta)=\frac{2}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty} s_0[t-(k-\mu)\theta_0-\lambda_0]s_1[t-(k-\mu)\theta-\lambda]dt,\ N(\lambda,\theta)=\frac{2}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty} n(t)s_1[t-(k-\mu)\theta-\lambda]dt. \quad (5),\ (6)$$

Шумовая функция (6) является реализацией гауссовского случайного поля, причем его первые два момента равны

$$\langle N(\lambda,\theta)\rangle=0,\ \ B(\lambda_1,\lambda_2,\theta_1,\theta_2)=\langle N(\lambda_1,\theta)N(\lambda_2,\theta_2)\rangle=\frac{2}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty} s_1[t-(k-\mu)\theta_1-\lambda_1]s_1[t-(k-\mu)\theta_2-\lambda_2]dt. \quad (7)$$

При выводе сигнальной функции (5) и корреляционной функции (7) шумовой функции (6) предполагалось, что их аргументы удовлетворяют условию $\max(|\lambda-\lambda_0+(\theta-\theta_0)(k-\mu)|,$ $|\lambda_1-\lambda_2+(\theta_1-\theta_2)(k-\mu)|)<\min(\theta,\theta_0,\theta_1,\theta_2)$ для всех $k=\overline{0,N-1}$. Поэтому (5), (7) описывают центральные пики соответствующих функций [4]. Так как по определению КПО функция $L(\lambda,\theta)$ (4) при $\lambda=\widehat{\lambda}$ и $\theta=\widehat{\theta}$ обращается в абсолютный максимум, КПО $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\theta}$ являются решениями системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[S(\lambda,\theta)+N(\lambda,\theta)]_{\widehat{\lambda},\widehat{\theta}}=0,\ \ \frac{\partial}{\partial\theta}[S(\lambda,\theta)+N(\lambda,\theta)]_{\widehat{\lambda},\widehat{\theta}}=0. \quad (8)$$

При этом, если шумовая функция в (4) отсутствует, т.е. $N(\lambda,\theta)\equiv 0$, то функция (5) достигает максимума в некоторой точке $(\widetilde{\lambda},\widetilde{\theta})$, причем в общем случае $\widetilde{\lambda}\neq\lambda_0$, $\widetilde{\theta}\neq\theta_0$. Систему уравнений для определения $\widetilde{\lambda}$ и $\widetilde{\theta}$ можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial S(\lambda,\theta)}{\partial\lambda}\right]_{\widetilde{\lambda},\widetilde{\theta}}=-\frac{2}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1(t)}{dt}s_0(t+\Delta_k)dt=0,\ \ \left[\frac{\partial S(\lambda,\theta)}{\partial\theta}\right]_{\widetilde{\lambda},\widetilde{\theta}}=-\frac{2}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}(k-\mu)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1(t)}{dt}s_0(t+\Delta_k)dt=0, \quad (9)$$

$$\Delta_k=\lambda_0-\widetilde{\lambda}+(k-\mu)(\theta_0-\widetilde{\theta}).$$

Поскольку $\max S(\lambda,\theta)=S(\widetilde{\lambda},\widetilde{\theta})$, то отношение сигнал-шум [4]

$$z^2=S^2(\widetilde{\lambda},\widetilde{\theta})/B(\widetilde{\lambda},\widetilde{\lambda},\widetilde{\theta},\widetilde{\theta})=2\left[\sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}s_1(t)s_0(t+\Delta_k)dt\right]^2\left[NN_0\int_{-\infty}^{\infty}s_1^2(t)dt\right]^{-1}. \quad (10)$$

Положим отношение сигнал-шум (10) достаточно большим, так что КПО времени прихода и периода следования обладают высокой апостериорной точностью. Тогда решение системы уравнений (8) можно найти методом малого параметра [4], в качестве которого используем величину $1/z$. Ограничиваясь рассмотрением первого приближения, получаем смещение (систематическую ошибку) КПО времени прихода и периода следования

$$b_q(\lambda)=\langle\widehat{\lambda}-\lambda_0\rangle=\widetilde{\lambda}-\lambda_0,\ \ b_q(\theta)=\langle\widehat{\theta}-\theta_0\rangle=\widetilde{\theta}-\theta_0, \quad (11)$$

а так же дисперсии и коэффициент корреляции КПО

$$D_q(\lambda)=\langle(\widehat{\lambda}-\widetilde{\lambda})^2\rangle=(S_{\lambda\theta}^2B_\theta-2S_{\lambda\theta}S_\theta B_{\lambda\theta}+S_\theta^2B_\lambda)(S_\lambda S_\theta-S_{\lambda\theta}^2)^{-2}, \quad (12)$$

$$D_q(\theta)=\langle(\widehat{\theta}-\widetilde{\theta})^2\rangle=(S_\lambda^2B_\theta-2S_\lambda S_{\lambda\theta}B_{\lambda\theta}+S_{\lambda\theta}^2B_\lambda)(S_\lambda S_\theta-S_{\lambda\theta}^2)^{-2},$$

$$\rho_q=\langle(\widehat{\lambda}-\widetilde{\lambda})(\widehat{\theta}-\widetilde{\theta})\rangle[D_q(\lambda)D_q(\theta)]^{-1/2}=(S_\lambda S_\theta B_{\lambda\theta}-S_{\lambda\theta}S_\lambda B_\theta-$$

$$-S_{\lambda\theta}S_\theta B_\lambda+S_{\lambda\theta}^2B_{\lambda\theta})(S_\lambda S_\theta-S_{\lambda\theta}^2)^{-2}[D_q(\lambda)D_q(\theta)]^{-1/2},$$

где

$$S_\lambda=\left[\frac{\partial^2 S(\lambda,\theta)}{\partial\lambda^2}\right]_{\widetilde{\lambda},\widetilde{\theta}}=\frac{2}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}A_k,\ \ S_{\lambda\theta}=\left[\frac{\partial^2 S(\lambda,\theta)}{\partial\lambda\partial\theta}\right]_{\widetilde{\lambda},\widetilde{\theta}}=\frac{2}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}(k-\mu)A_k,\ S_\theta=\left[\frac{\partial^2 S(\lambda,\theta)}{\partial\theta^2}\right]_{\widetilde{\lambda},\widetilde{\theta}}=\frac{2}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}(k-\mu)^2A_k,$$

$$B_\lambda=\left[\frac{\partial^2 B(\lambda_1,\lambda_2,\theta_1,\theta_2)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\right]_{\widetilde{\lambda},\widetilde{\theta}}=\frac{2N}{N_0}B_1,\ \ B_{\lambda\theta}=\left[\frac{\partial^2 B(\lambda_1,\lambda_2,\theta_1,\theta_2)}{\partial\lambda_1\partial\theta_2}\right]_{\widetilde{\lambda},\widetilde{\theta}}=\frac{2B_1}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}(k-\mu), \quad (13)$$

$$B_\theta=\left[\frac{\partial^2 B(\lambda_1,\lambda_2,\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right]_{\tilde{\lambda},\tilde{\theta}}=\frac{2B_1}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}(k-\mu)^2,\ A_k=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2 s_1(t)}{dt^2}s_0(t+\Delta_k)dt,\ \ B_1=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{ds_1(t)}{dt}\right]^2 dt.$$

Согласно (11) КПО времени прихода и периода следования в общем случае смещенная. Однако, если формы видеоимпульсов принимаемой (1) и ожидаемой (2) последовательностей описываются четными функциями, т.е.

$$s_i(t)=s_i(-t),\ \ i=0,1. \tag{14}$$

то решения системы уравнений (9) совпадают с истинными значениями времени прихода и периода следования. Следовательно, при выполнении (14) КПО времени прихода и периода следования будут несмещенными.

Выражения для дисперсий и коэффициента корреляции КПО (12) существенно упрощаются, когда выполняется (14) и КПО несмещенные. Действительно, полагая в (13) $\Delta_k=0$ и подставляя результат в (12), находим

$$D_q(\lambda)=\frac{N_0B_1}{2F_1^2}\,\frac{N^2-1+12[(N-1)/2-\mu]^2}{N(N^2-1)},\ D_q(\theta)=6N_0B_1/[F_1^2N(N^2-1)], \tag{15}$$

$$\rho_q=\frac{(N-1)/2-\mu}{\{(N^2-1)/12+[(N-1)/2-\mu]^2\}^{1/2}}.$$

Для сравнения приведем характеристики ОМП времени прихода и периода следования. Полагая в (15) $s_1(t)\equiv s_0(t)$, для дисперсий ОМП времени прихода и периода следования можем записать выражения [2]

$$\sigma_\lambda^2=\frac{N_0}{2F_0}\,\frac{N^2-1+12[(N-1)/2-\mu]^2}{N(N^2-1)},\ \ \sigma_\theta^2=6N_0/[F_0N(N^2-1)], \tag{16}$$

где $F_0=\int_{-\infty}^{\infty}[ds_0(t)/dt]^2dt.$

При этом коэффициент корреляции ОМП времени прихода и периода следования совпадает с коэффициентом корреляции КПО (15).

Сравнение (12), (15) и (16) позволяет определить степень ухудшения качества оценок времени прихода и периода следования из-за отличия формы видеоимпульсов последовательности (2), использованной при синтезе алгоритма оценки, от формы видеоимпульсов принимаемой последовательности (1). В частности, если выполняется (14), то сопоставляя (15) и (16), можем охарактеризовать проигрыш в точности КПО по сравнению с ОМП отношением

$$\chi=\frac{D_q(\lambda)}{\sigma_\lambda^2}=\frac{D_q(\theta)}{\sigma_\theta^2}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}[s'_1(t)]^2dt\int_{-\infty}^{\infty}[s'_0(t)]^2dt}{\left[\int_{-\infty}^{\infty}s'_0(t)s'_1(t)dt\right]^2}=\rho_s^{-2}, \tag{17}$$

где $\rho_s=\int_{-\infty}^{\infty}s'_0(t)s'_1(t)dt\left[\int_{-\infty}^{\infty}[s'_0(t)]^2dt\int_{-\infty}^{\infty}[s'_1(t)]^2dt\right]^{-1/2}$ — коэффициент взаимной корреляции производных ожидаемого и принимаемого видеоимпульсов. Используя неравенство Буняковского—Шварца, нетрудно показать, что $|\rho_s|\le 1$ и в (17) всегда $\chi\ge 1$.

● Установлено, что потери в точности квазиправдоподобных оценок определяются коэффициентом взаимной корреляции первых производных ожидаемого и принимаемого видеоимпульсов.

Литература

1. *Трифонов А.П., Беспалова М.Б.* — Радиотехника, 1991, №5.
2. *Трифонов А.П., Беспалова М.Б.* — Радиотехника и электроника, 1992, т.37, №6.
3. *Трифонов А.П.,Беспалова М.Б.* — Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника, 1993, т.36, №3.
4. *Куликов Е.И.,Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов.радио, 1978.
5. *Мудров В.И., Кушко В.Л.* Методы обработки измерений. — М.: Радио и связь, 1983.

Поступила 13 января 1998 г.