Том 43, Номер 7 Июль 1998

ISSN 0033-8494

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

РАДИОТЕХНИКА и ЭЛЕКТРОНИКА

Главный редактор
Ю.В. Гуляев

МАИК "НАУКА" "НАУКА"

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 1998, том 43, № 7, с. 828–834

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

УДК 621.391

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИЕМНИКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРИХОДА

© 1998 г. А. П. Трифонов, В. И. Парфенов

Поступила в редакцию 23.05.96 г.

Выполнен синтез приемника максимального правдоподобия и получены асимптотически точные выражения для характеристик обнаружения и оценки неизвестного времени прихода случайного импульса. Работоспособность синтезированного приемника и границы применимости найденных выражений установлены при помощи статистического моделирования на ЭВМ.

ВВЕДЕНИЕ

Задача приема случайных импульсов с неизвестным временем прихода встречается в связи, локации, при измерении координат, в системах синхронизации. Примерами таких сигналов могут быть импульс со случайной субструктурой, описывающий "вспышку" оптического шума [1], отраженный радиолокационный сигнал [2], сигнал с времяимпульсной модуляцией, искаженный модулирующей помехой [3]. Причем как в радио [4], так и в оптической локации [5], а также в пассивной локации источников естественного и близких к ним излучений [6] значительный интерес представляют так называемые быстрые флуктуации сигнала. При быстрых флуктуациях длительность импульса существенно превышает время корреляции его случайной субструктуры [4, 5].

Согласно [2, 6], случайный импульс может быть представлен в виде

$$s(t, \lambda_0) = f[(t-\lambda_0)/\tau]\xi(t), \qquad (1)$$

где $\xi(t)$ – реализация стационарного гауссовского случайного процесса с математическим ожиданием a и корреляционной функцией $K_\xi(t_1 - t_2)$; $f(x)$ – модулирующая детерминированная функция, нормированная так, что

$$\max f(x) = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = 1, \qquad (2)$$

λ_0 и τ – истинное значение времени прихода и длительность случайного импульса соответственно.

Полагаем, что сигнал (1) наблюдается на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. В работах [7, 8] исследована эффективность приема сигнала (1) с неизвестным временем прихода в предположении, что модулирующая функция имеет прямоугольную форму: $f(x) = I(x)$, где $I(x) = 1$ при $|x| < 1/2$ и $I(x) = 0$ при $|x| > 1/2$. Однако такая разрывная функция не всегда адекватно описывает реальные модулирующие функции, которые достаточно часто являются непрерывными и дифференцируемыми [2, 6]. В связи с этим рассмотрим задачу приема сигнала (1) с непрерывной модулирующей функцией $f(x)$. При этом предполагаем, что неизвестное время прихода λ принимает значения из априорного интервала $[\Lambda_1; \Lambda_2]$. Для обнаружения сигнала (1) и оценки его времени прихода используем метод максимального правдоподобия. Устройство, реализующее этот метод, будем называть приемником максимального правдоподобия (ПМП) [7–9]. Ниже выполнен синтез такого приемника, найдены асимптотические выражения для характеристик обнаружения случайного сигнала и оценки максимального правдоподобия (ОМП) его времени прихода. Приведены также результаты статистического моделирования ПМП на ЭВМ.

1. ВЫХОДНОЙ СИГНАЛ ПРИЕМНИКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Пусть на вход ПМП в течение интервала времени $[0; T]$ поступает реализация $x(t) = s(t, \lambda_0) + n(t)$ или $x(t) = n(t)$, причем $s(t, \lambda_0)$ и $n(t)$ статистически не зависимы. По определению ПМП формирует логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) для всех $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ [2, 6]:

$$M(\lambda) = \frac{1}{N_0}\int\limits_0^T\int\limits_0^T x(t_1)x(t_2)Q(t_1, t_2, \lambda)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 + \int\limits_0^T [x(t) - a_s(t, \lambda)/2]v(t, \lambda)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\chi\int\limits_0^T \tilde{Q}(t, t, \lambda, \chi)\mathrm{d}t, \qquad (3)$$

где $\tilde{Q}(t_1, t_2, \lambda, \chi)$ – решение интегрального уравнения

$$\frac{N_0}{2}\tilde{Q}(t_1, t_2, \lambda, \chi) + \chi\int_0^T \tilde{Q}(t_1, t, \lambda, \chi)K_s(t, t_2, \lambda)\mathrm{d}t = K_s(t_1, t_2, \lambda); \tag{4}$$

$$K_s(t_1, t_2, \lambda) = f[(t_1-\lambda)/\tau]f[(t_2-\lambda)/\tau]K_\xi(t_1-t_2),$$

$$Q(t_1, t_2, \lambda) = \tilde{Q}(t_1, t_2, \lambda, \chi = 1),$$
$$a_s(t, \lambda) = af[(t-\lambda)/\tau],$$

$$v(t, \lambda) = 2\left\{a_s(t, \lambda) - \int_0^T a_s(t_1, \lambda)Q(t, t_1, \lambda)\mathrm{d}t_1\right\}/N_0.$$

Структура ПМП, формирующего логарифм ФОП согласно (3), достаточно сложна с точки зрения технической реализации. Упрощение структуры ПМП возможно при условии, что длительность сигнала τ значительно превышает время корреляции процесса $\xi(t)$, когда

$$\mu = \tau\Omega/4\pi \gg 1, \tag{5}$$

где $\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega)\mathrm{d}\omega\,[\sup G(\omega)]^{-2}$ – эквивалентная полоса частот процесса $\xi(t)$ со спектром мощности $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\Delta)\exp(-j\omega\Delta)\mathrm{d}\Delta = \gamma g(\omega/\Omega)$. Функция $g(x) = g(-x) \ge 0$ описывает форму спектра мощности и нормирована аналогично $f(\cdot)$ в (2), а γ определяет величину спектра мощности. Следуя [2, 6], решение интегрального уравнения (4) будем искать в форме, структурно подобной $K_s(t_1, t_2, \lambda)$, т.е. полагаем $\tilde{Q}(t_1, t_2, \lambda, \chi) = f[(t_1-\lambda)/\tau]f[(t_2-\lambda)/\tau]\tilde{Q}_0(t_1-t_2, \chi)$. Тогда интегральное уравнение (4) примет вид

$$\frac{N_0}{2}\tilde{Q}_0(t_1-t_2, \chi) + \chi\int_0^T \tilde{Q}_0(t_1-t, \chi)K_\xi(t-t_2) \times f^2[(t-\lambda)/\tau]\mathrm{d}t = K_\xi(t_1-t_2). \tag{6}$$

С учетом (2), (5) аналогично [2] можно считать $f^2[(t-\lambda)/\tau] \simeq 1$ на интервале порядка времени корреляции процесса $\xi(t)$. При этом пределы интегрирования в (6) можно заменить на бесконечные, так что уравнение (6) перепишем в виде

$$\frac{N_0}{2}\tilde{Q}_0(t_1-t_2, \chi) + \chi\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}_0(t_1-t, \chi)K_\xi(t-t_2)\mathrm{d}t = K_\xi(t_1-t_2).$$

Решая это уравнение при помощи преобразования Фурье и подставляя полученное решение в (3), аналогично [2] имеем

$$M(\lambda) = \frac{1}{N_0}\int_0^T \tilde{y}^2(t, \lambda)\mathrm{d}t + \frac{2a}{N_0(1+q)}\int_0^T x(t)f[(t-\lambda)/\tau]\mathrm{d}t + C_0, \tag{7}$$

где

$$C_0 = -\frac{a^2\tau}{N_0(1+q)} - \frac{\tau}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln[1 + 2G(\omega)/N_0]\mathrm{d}\omega,$$
$$q = 2\gamma/N_0,$$

$$\tilde{y}(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu)f[(\nu-\lambda)/\tau]h(t-\nu)\mathrm{d}\nu, \tag{8}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\exp(j\omega t)\mathrm{d}\omega/2\pi,$$
$$|H(\omega)|^2 = 2G(\omega)/\{N_0[1 + 2G(\omega)/N_0]\}. \tag{9}$$

Способ технической реализации ПМП на основе (7) при известном λ рассмотрен в [2]. Однако если время прихода λ априори не известно, то для реализации приемника необходимо использовать многоканальную схему [2, 6, 9, 10]. В этом случае приемник содержит параллельные каналы, каждый из которых вырабатывает логарифм ФОП $M(\lambda_i)$ в N точках априорного интервала $\lambda_i \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$, $i \in [1; N]$.

Согласно (5), длительность сигнала τ значительно превышает время корреляции случайного процесса $\xi(t)$, а следовательно, и длительность переходных процессов в фильтре с импульсной характеристикой $h(t)$ (9). Следовательно, выражение (8) можно приближенно переписать как

$$\tilde{y}(t, \lambda) \simeq f[(t-\lambda)/\tau]\int_{-\infty}^{\infty} x(\nu)h(t-\nu)\mathrm{d}\nu = f[(t-\lambda)/\tau]y(t), \tag{10}$$

где $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu)\,h(t-\nu)\mathrm{d}\nu$ – отклик фильтра с импульсной характеристикой $h(t)$ на реализацию наблюдаемых данных. Таким образом, с учетом (9),

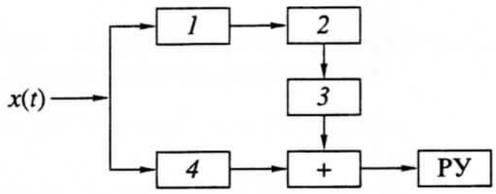

Рис. 1. Приемник максимального правдоподобия.

(10) логарифм ФОП (7) с точностью до несущественного слагаемого C_0 может быть записан в виде

$$M(\lambda) = \frac{1}{N_0}\int_0^T\left\{f^2\left[\frac{t-\lambda}{\tau}\right]y^2(t) + \right. \tag{11}$$

$$\left. + \frac{2a}{1+q}f\left[\frac{t-\lambda}{\tau}\right]x(t)\right\}\mathrm{d}t.$$

На рис. 1 приведена блок-схема устройства, реализующего ПМП согласно (11), здесь *1* – фильтр с импульсной характеристикой $h(t)$, удовлетворяющей условию (9); *2* – квадратор; *3* – фильтр, согласованный с сигналом $f^2(t/\tau)/N_0$; *4* – фильтр, согласованный с сигналом $2af(t/\tau)/N_0(1 + q)$; РУ – решающее устройство. В отличие от многоканального устройства [2], реализующего ПМП на основе (7), ПМП, представленный на рис. 1, позволяет получить логарифм ФОП как непрерывную функцию λ.

Аналогично [2] можно показать, что логарифм ФОП (11), когда $\mu \longrightarrow \infty$, является асимптотически гауссовским случайным процессом. Следовательно, тогда случайная функция (11) полностью характеризуется своим средним значением и корреляционной функцией. Для расчета этих моментов при наличии полезного сигнала (1) представим функционал (11) в виде суммы регулярной и шумовой составляющих [9]. Вводя безразмерный параметр $\eta = \lambda/\tau$, $\eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]$, $\tilde{\Lambda}_i = \Lambda_i/\tau$, $i = 1, 2$, получаем $M(\eta) = S_1(\eta) + N_1(\eta)$, где $S_1(\eta) = \langle M(\eta)\rangle$ – регулярная составляющая, $N_1(\eta) = M(\eta) - \langle M(\eta)\rangle$ – шумовая, а усреднение выполняется при фиксированном $\eta_0 = \lambda_0/\tau$. Учитывая (5), получаем

$$S_1(\eta) = S_0 + z_0^2F_{011}(0, \eta, \eta_0)/(1+q) + \tag{12}$$
$$+ [z_0^2q/2(1+q) + \mu g_{11}]F_{022}(0, \eta, \eta_0),$$

$$K_{N1}(\eta_1, \eta_2) = \langle N_1(\eta_1)N_1(\eta_2)\rangle =$$
$$= \mu\{g_{02}F_{220}(\eta_1, \eta_2, 0) + 2g_{12}F_{222}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) +$$
$$+ g_{22}F_{224}(\eta_1, \eta_2, \eta_0)\} + z_0^2\{F_{110}(\eta_1, \eta_2, 0) +$$
$$+ qF_{112}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) + q^2F_{222}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) +$$
$$+ q^3F_{224}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) + qF_{211}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) +$$
$$+ q^2F_{213}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) + qF_{121}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) +$$
$$+ q^2F_{123}(\eta_1, \eta_2, \eta_0)\}/(1+q)^2.$$

Здесь

$$z_0^2 = 2a^2\tau/N_0, \quad S_0 = \mu g_{01},$$

$$F_{nmk}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^n(x-\eta_1)f^m(x-\eta_2)f^k(x-\eta_0)\mathrm{d}x,$$

$$g_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty}[qg(x)]^{k+n}[1+qg(x)]^{-n}\mathrm{d}x.$$

Когда полезный сигнал отсутствует в реализации наблюдаемых данных, для (11) выполняются соотношения

$$\langle M(\eta)\rangle = S_0,$$
$$\langle[M(\eta_1) - \langle M(\eta_1)\rangle][M(\eta_2) - \langle M(\eta_2)\rangle]\rangle =$$
$$= K_{N0}(\eta_1, \eta_2) = \mu g_{02}F_{220}(\eta_1, \eta_2, 0) + \tag{13}$$
$$+ z_0^2F_{110}(\eta_1, \eta_2, 0)/(1+q)^2.$$

2. ОБНАРУЖЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА

При обнаружении случайного импульса решающее устройство (РУ) ПМП (рис. 1) принимает решение о наличии или отсутствии импульса, сравнивая величину абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП (11) при $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ с порогом c. Определим вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги) α и 2-го рода (пропуска сигнала) β [7, 10]. Полагаем вначале, что в наблюдаемой реализации нет полезного сигнала.

Согласно (5), (13), логарифм ФОП представляет собой асимптотически гауссовский стационарный случайный процесс с математическим ожиданием (13) и коэффициентом корреляции

$$R_{N0}(\eta_1, \eta_2) = K_{N0}(\eta_1, \eta_2)/\sigma_0^2 =$$
$$= \{\mu g_{02}F_{220}(\eta_1, \eta_2, 0) + z_0^2F_{110}(\eta_1, \eta_2, 0)/(1+q)^2\} \times \tag{14}$$
$$\times \{\mu g_{02}F_{004}(0, 0, 0) + z_0^2/(1+q)^2\}^{-1},$$

где $\sigma_0^2 = \mu g_{02}F_{004}(0, 0, 0) + z_0^2/(1 + q)^2$ – дисперсия логарифма ФОП (11).

Из выражения (14) и свойств функции $f(\cdot)$ в (2) следует, что $R_{N0}(\eta_1, \eta_2) \longrightarrow 0$ при $|\eta_1 - \eta_2| \longrightarrow \infty$. Поэтому можно считать аналогично [10], что с увеличением порога c распределение числа выбросов за уровень c реализаций логарифма ФОП (11) в интервале $[\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]$ сходится к закону Пуассона. Это позволяет при использовании результатов [10] записать асимптотически точное выражение для вероятности ложной тревоги

$$\alpha = P\{\sup M(\eta) > c, \quad \eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]\} \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} 1 - \exp[-\xi \exp(-u^2/2)/2\pi], & u > 0, \\ 1, & u < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь

$$u = (c - S_0)/\sigma_0,$$

$$\xi = \frac{m}{\sigma_0}\{\partial^2 K_{N0}(\eta_1, \eta_2)/\partial\eta_1\partial\eta_2\}_{\eta_0}^{1/2} =$$

$$= m\{[4\mu g_{02}\varphi_{11} + z_0^2\varphi_{10}/(1+q)]/[z_0^2/(1+q)^2 + \quad (16)$$

$$+ \mu g_{02} F_{004}(0, 0, 0)]\}^{1/2},$$

$$m = (\Lambda_2 - \Lambda_1)/\tau, \quad \varphi_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} [df(x)/dx]^{2k} f^{2n}(x) dx.$$

Точность формулы (15) возрастает с увеличением μ, u и ξ. При этом, чем меньшие значения принимает вероятность ложной тревоги (15), тем больше должен быть параметр μ (5). Последнее условие необходимо для обеспечения достаточной точности гауссовской аппроксимации логарифма ФОП (11).

Полагаем теперь, что полезный сигнал (1) присутствует на входе ПМП. Тогда вероятность пропуска сигнала

$$\beta = P\{\sup_{\eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]} M(\eta) < c\} = P\{\underset{\eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]}{M(\eta)} < c\}. \quad (17)$$

Разобьем весь интервал возможных значений η на две подобласти:

$$\theta_s = (\max[\tilde{\Lambda}_1; \eta_0 - r]; \min[\eta_0 + r; \tilde{\Lambda}_2]),$$

$$\theta_N = ([\tilde{\Lambda}_1; \max[\tilde{\Lambda}_1; \eta_0 - r]]; [\min[\eta_0 + r; \tilde{\Lambda}_2]; \tilde{\Lambda}_2]),$$

где r выбираем из условия $f(\pm r/2) \simeq 0$. Если $\eta_1, \eta_2, \eta_0 \in \theta_N$, то

$$S_1(\eta) \simeq S_0, \quad K_{N1}(\eta_1, \eta_2) \simeq K_{N0}(\eta_1, \eta_2). \quad (18)$$

Следовательно, в подобласти θ_N статистические характеристики логарифма ФОП при наличии и отсутствии сигнала одинаковы (13). Кроме того, согласно (12), (13), когда $|\eta_1 - \eta_2| > r$, корреляционные функции $K_{N0}(\eta_1, \eta_2) = K_{N1}(\eta_1, \eta_2) = 0$. Обозначим $H_N = \sup_{\eta \in \theta_N} M(\eta)$, $H_s = \sup_{\eta \in \theta_s} M(\eta)$. Пусть интервал возможных значений неизвестного параметра η велик по сравнению с подобластью θ_s, т.е. $m \gg r$ или, что то же самое

$$\xi \gg 1. \quad (19)$$

Тогда случайные величины H_N и H_s, как это показано в [10], можно считать приближенно статистически не зависимыми. При этом вероятность пропуска сигнала (17)

$$\beta \simeq P[H_N < c]P[H_s < c] = P_N(c)P_s(c). \quad (20)$$

Согласно (18), (19) и [10], приближенное значение вероятности $P_N(c)$ можно получить из (15):

$$P_N(c) \simeq 1 - \alpha. \quad (21)$$

Когда $\eta \in \theta_s$, из (12) получаем, что функция $S_1(\eta) \neq S_0$ и достигает максимума при $\eta = \eta_0$. Обозначим $\eta_m = \arg\sup M(\eta)$, $\eta \in \theta_s$, надежную ОМП параметра η [9]. Тогда $H_s = M(\eta_m)$ и в (20) $P_s(c) = P[M(\eta_m) < c]$. Как показано в [6], $\eta_m \longrightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом, когда $\mu \longrightarrow \infty$. Значит, при достаточно больших μ (5) можно приближенно записать $P_s(c) \simeq P[M(\eta_0) < c]$, причем $M(\eta_0)$ при выполнении (5) является приближенно гауссовской случайной величиной [2] с математическим ожиданием $S_1(\eta_0)$ и дисперсией $\sigma_1^2(\eta_0) = K_{N1}(\eta_0, \eta_0)$. В результате имеем

$$P_s(c) \simeq \Phi[(c - S_1(\eta_0))/\sigma_1(\eta_0)], \quad (22)$$

где $\Phi(x) \simeq \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt/\sqrt{2\pi}$ – интеграл вероятности [10].

Подставляя (21), (22) в (20), получаем приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала:

$$\beta \simeq \begin{cases} \exp[-\xi \exp(-u^2/2)/2\pi]\Phi(fu - z), & u > 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь

$$f^2 = \sigma_0^2/\sigma_1^2(\eta_0) = \{\mu g_{02} F_{004}(0, 0, 0) + z_0^2/(1+q)^2\} \times$$
$$\times \{\mu[g_{02} F_{004}(0, 0, 0) + 2g_{12} F_{006}(0, 0, 0) +$$
$$+ g_{22} F_{008}(0, 0, 0)] + z_0^2[1 + 3qF_{004}(0, 0, 0) +$$
$$+ 3q^2 F_{006}(0, 0, 0) + q^3 F_{008}(0, 0, 0)]/(1+q)^2\}^{-1},$$
$$z^2 = [S_1(\eta_0) - S_0]^2/\sigma_1^2(\eta_0) = \{z_0^2/(1+q) + \quad (24)$$
$$+ [z_0^2 q/2(1+q) + \mu g_{11}]F_{004}(0, 0, 0)\}^2 \times$$
$$\times \{\mu[g_{02} F_{004}(0, 0, 0) + 2g_{12} F_{006}(0, 0, 0) +$$
$$+ g_{22} F_{008}(0, 0, 0)] + z_0^2[1 + 3qF_{004}(0, 0, 0) +$$
$$+ 3q^2 F_{006}(0, 0, 0) + q^3 F_{008}(0, 0, 0)]/(1+q)^2\}^{-1}$$

– отношение сигнал/шум на выходе ПМП. Точность формулы (23) возрастает с увеличением μ, u, ξ и z. При этом, чем меньшие значения принимает вероятность пропуска сигнала β (23), тем больше должен быть параметр μ (5).

Рассмотрим, как влияет факт незнания времени прихода импульса (1) на эффективность его обнаружения. Для этого, полагая, что выполняет-

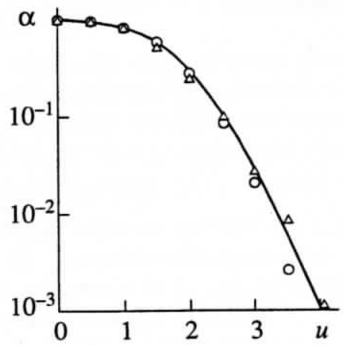

Рис. 2. Вероятность ложной тревоги.

ся (5), приведем характеристики обнаружения сигнала, время прихода которого априори известно [2]:

$$\alpha_0 = 1-\Phi(u), \quad \beta_0 = \Phi(fu-z). \tag{25}$$

Сопоставляя (15), (23) и (25), можно оценить проигрыш в эффективности обнаружения сигнала вследствие незнания его времени прихода. Однако сделать это при произвольных u и z удается только численными методами. Поэтому ограничимся практически интересным случаем, когда вероятность ложной тревоги мала ($\alpha < 0.1$), а отношение сигнал/шум (24) достаточно велико. Полагая в (15) и (23) $u \gg 1$ и $z \gg 1$, получаем упрощенные выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала с неизвестным временем прихода:

$$\alpha \simeq \xi\exp(-u^2/2)/2\pi, \quad \beta \simeq \beta_0. \tag{26}$$

Отсюда следует, что вероятность пропуска сигнала асимптотически инвариантна факту незнания его времени прихода. Учитывая, что выражения (26) справедливы при больших u, и используя асимптотическое разложение для $\Phi(x)$ при $x \gg 1$, перепишем вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала с априори известным временем прихода (25) в виде

$$\alpha_0 \simeq \exp(-u^2/2)/u\sqrt{2\pi}. \tag{27}$$

Сопоставляя (26) и (27), имеем, что $\alpha/\alpha_0 = \xi u/\sqrt{2\pi} = \xi\sqrt{\ln(\xi/2\pi\alpha)/\pi}$ при $\beta = \beta_0$ и $\alpha \longrightarrow 0$. Следовательно, относительные потери в эффективности обнаружения импульса (1) с неизвестным временем прихода возрастают с увеличением ξ (16) и с уменьшением требуемого уровня вероятности ложной тревоги α.

3. ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ПРИХОДА СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА

Когда импульс (1) присутствует в реализации наблюдаемых данных, ОМП $\hat\lambda$ его неизвестного времени прихода λ_0 определяется решающим устройством ПМП (рис. 1) как положение абсолютного максимума логарифма ФОП (11) при $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ [9]. Следовательно, для ОМП $\hat\eta = \hat\lambda/\tau$ безразмерного параметра η_0 можем записать выражение $\hat\eta = \arg\sup M(\eta)$, $\eta \in [\tilde\Lambda_1;\ \tilde\Lambda_2]$. Согласно [9], при $m \gg 1$ условные смещение (систематическая ошибка) d_η и рассеяние (средний квадрат ошибки) V_η оценки $\hat\eta$ имеют соответственно вид

$$\begin{gathered} d_\eta = \langle \hat\eta - \eta_0 | \eta_0 \rangle = \\ = P_0 d_0 + (1-P_0)[(\tilde\Lambda_1 + \tilde\Lambda_2)/2 - \eta_0], \\ V_\eta = \langle (\hat\eta - \eta_0)^2 | \eta_0 \rangle = P_0 V_0 + \end{gathered} \tag{28}$$

$$+ (1-P_0)[(\tilde\Lambda_1^2 + \tilde\Lambda_2^2 + \tilde\Lambda_1\tilde\Lambda_2)/3 - \eta_0(\tilde\Lambda_1 + \tilde\Lambda_2) + \eta_0^2].$$

Здесь $d_0 = \langle \eta_m - \eta_0 | \eta_0 \rangle$ – условное смещение, $V_0 = \langle (\eta_m - \eta_0)^2 | \eta_0 \rangle$ – условное рассеяние надежной оценки $\eta_m \in \theta_s$, а P_0 – вероятность надежной оценки [9]. Полагаем, что выполняется условие (5) и $z \gg 1$. Тогда аналогично [9] получаем

$$d_0 \simeq 0, \quad V_0 \simeq \left\{ \frac{\partial^2 K_{N1}(\eta_1, \eta_2)}{\partial\eta_1 \partial\eta_2} \left[\frac{\mathrm{d}^2 S_1(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2} \right]^{-2} \right\}_{\eta_0} =$$

$$\begin{gathered} = \{4\mu[g_{02}\varphi_{11} + 2g_{12}\varphi_{12} + g_{22}\varphi_{13}] + z_0^2[\varphi_{10} + 5q\varphi_{11} + \\ + 8q^2\varphi_{12} + 4q^3\varphi_{13}]/(1+q)^2\}\{4\mu g_{11}\varphi_{11} + \\ + z_0^2(\varphi_{10} + 2q\varphi_{11})/(1+q)^2\}^{-2}. \end{gathered} \tag{29}$$

Аналогично [7, 9] при $m \gg 1$ можем записать $P_0 \simeq \int_{-\infty}^{\infty} P_N(x)\mathrm{d}P_s(x)$. Воспользовавшись аппроксимациями (21) и (22) функций $P_N(x)$ и $P_s(x)$, имеем

$$P_0 \simeq \frac{f}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp[-\xi\exp(-x^2/2)/2\pi - (fx-z)^2/2]\mathrm{d}x. \tag{30}$$

Точность этой формулы возрастает с ростом ξ (16), μ (5) и z (24).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью установления границ применимости найденных асимптотически точных формул для характеристик обнаружения и оценки выполнено статистическое моделирование ПМП на ЭВМ. Моделировали алгоритмы обнаружения и оценки времени прихода случайного импульса (1), где $\xi(t)$ – стационарный гауссовский случайный процесс с прямоугольной спектральной плотностью $\gamma I(\omega/\Omega)$, а модулирующая функция имела колокольную форму: $f(x) = \exp(-\pi x^2/2)$. В процессе моделирования на интервале $[\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]$ с шагом $\Delta\eta = 0.1$ формировались отсчеты реализаций случайного процесса (11) как при наличии, так и при отсутствии сигнала (1). Для каждой реализации $x(t)$ сравнивали величину наибольшего отсчета (11) с порогом c и находили вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала. Кроме того, при наличии сигнала, по положению наибольшего отсчета (11) определяли оценку $\hat{\eta}$ и находили рассеяние оценки и вероятность аномальных ошибок $P_a = P[\hat{\eta} \in \theta_N] = 1 - P_0$.

Некоторые результаты статистического моделирования представлены на рис. 2–5, где показаны также соответствующие теоретические зависимости. Каждое экспериментальное значение получено в результате обработки не менее 5×10^3 реализаций $x(t)$ при $m = 10$; $\tilde{\Lambda}_1 = 0$, $\tilde{\Lambda}_2 = m$; $\eta_0 = (\tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2)/2$.

На рис. 2 показана теоретическая зависимость вероятности ложной тревоги $\alpha(u)$ (15), а на рис. 3 – теоретическая зависимость вероятности пропуска сигнала $\beta(q)$ (23). Кривые рис. 2 и 3 рассчитаны при $z_0 = 0$. Экспериментальные значения характеристик обнаружения на рис. 2, 3а обозначены кружочками и треугольниками соответственно для $\mu = 50$ и 100. Теоретическая зависимость на рис. 3а показана штриховой и сплошной кривыми соответственно для $\mu = 50$ и 100 при величине порога c, которую выбирали в соответствии с заданным уровнем вероятности ложной тревоги $\alpha = 10^{-2}$ по формуле (15). На рис. 3б при $\mu = 100$ представлены теоретические и экспериментальные значения вероятности пропуска для заданного уровня вероятности ложной тревоги $\alpha = 10^{-1}$ (штрихпунктир и квадратики), $\alpha = 10^{-2}$ (штриховая кривая и кружочки), $\alpha = 10^{-3}$ (сплошная кривая и треугольники).

На рис. 4 приведены теоретические и экспериментальные зависимости рассеяния $V_\eta(q)$ (28). Обозначения на рис. 4а соответствуют приведенным на рис. 3а. Кроме того, на рис. 4а штрихпунктирными кривыми показано рассеяние надежной оценки $V_0(q)$ (29), полученное в пренебрежении аномальными ошибками. Сопоставление штриховой и сплошной кривых с соответствующими штрихпунктирными на рис. 4а показывает, что при малых q аномальные ошибки существенно увеличивают рассеяние оценки. На рис. 4б при $\mu = 100$ показаны теоретические и экспериментальные зависимости рассеяния оценки $V_\eta(q)$ (28)

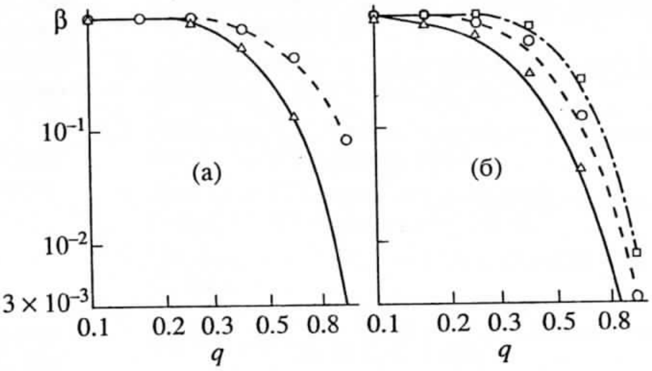

Рис. 3. Вероятность пропуска сигнала.

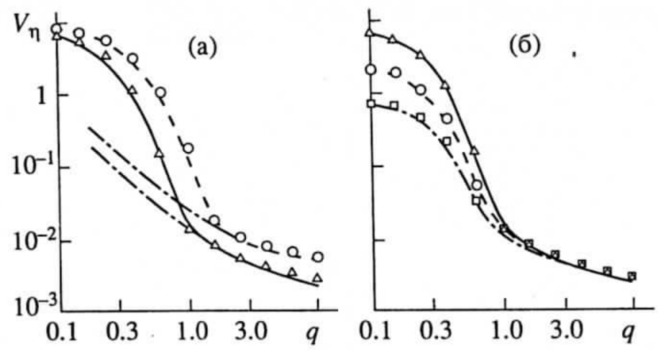

Рис. 4. Рассеяние оценки.

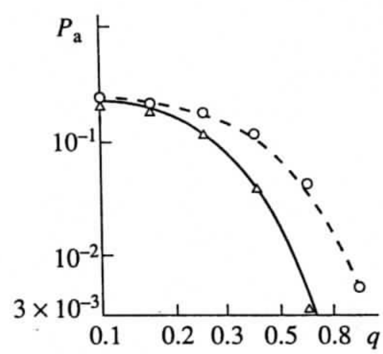

Рис. 5. Вероятность аномальных ошибок.

для $z_0^2 = 0$ (сплошная кривая и треугольники), $z_0^2 = 5$ (штриховая кривая и кружочки), $z_0^2 = 10$ (штрихпунктир и квадратики).

На рис. 5 при $z_0^2 = 5$ представлены теоретические и экспериментальные зависимости вероятности аномальных ошибок $P_a(q) = 1 - P_0$ (30) для $\mu = 50$ (штриховая кривая и кружочки), $\mu = 100$ (сплошная кривая и треугольники).

Как следует из рис. 2–5, теоретические зависимости для вероятностей (15) (23), (30) и рассеяния

(28) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные, что позволяет обоснованно использовать полученные теоретические формулы при анализе ПМП случайного сигнала с непрерывной модулирующей функцией и неизвестным временем прихода.

Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
2. *Бакут П.А., Большаков И.А., Герасимов Б.М. и др.* Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Тартаковского Г. П. М.: Сов. радио, 1963. Т. 1.
3. *Кремер И.Я., Владимиров В.И., Карпухин В.И.* Модулирующие помехи и прием радиосигналов. М.: Сов. радио, 1972.
4. Теоретические основы радиолокации / Под ред. Ширмана Я.Д. М.: Сов. радио, 1970.
5. *Курикша А.А.* Квантовая оптика и оптическая локация. М.: Сов. радио, 1973.
6. *Ван-Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1977. Т. 3.
7. *Трифонов А.П., Галун С.А.* // РЭ. 1981. Т. 26. № 8. С. 1622.
8. *Трифонов А.П., Захаров А.В., Парфенов В.И.* // РЭ. 1991. Т. 36. № 7. С. 1300.
9. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
10. *Трифонов А.П.* // Теория обнаружения сигналов / Под ред. Бакута П.А. М.: Радио и связь, 1984. С. 12–89.