Том 43, Номер 8 Август 1998
ISSN 0033-8494

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

РАДИОТЕХНИКА и ЭЛЕКТРОНИКА

Главный редактор
Ю.В. Гуляев

МАИК "НАУКА" "НАУКА"

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 1998, том 43, № 8, с. 959–965

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

УДК 621.391

ПРИЕМ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНЫМИ ВРЕМЕНЕМ ПРИХОДА И ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТОЙ СПЕКТРА МОЩНОСТИ

© 1998 г. А. П. Трифонов, В. И. Парфенов

Поступила в редакцию 28.10.96 г.

Выполнен синтез приемника максимального правдоподобия и получены асимптотически точные выражения для характеристик обнаружения и оценки неизвестных времени прихода и центральной частоты спектра мощности случайного импульса.

ВВЕДЕНИЕ

Случайные импульсы часто используются в качестве математических моделей реальных сигналов. Такими моделями могут быть описаны отраженные сигналы в локации (особенно в гидролокации и в системах, использующих сверхширокополосные сигналы), сигналы в спектроскопии и радиоастрономии [1], сигналы, искаженные модулирующей помехой [2]. Кроме того, случайные сигналы могут быть использованы в качестве переносчика информации (несущей), особенно в оптических линиях связи [3] и в гидролокации [4]. При этом не известны часто время прихода и центральная частота спектра мощности принимаемого случайного сигнала.

Представим аналогично [1, 5] случайный импульс в виде

$$s(t, \lambda_0, \nu_0) = f[(t-\lambda_0)/\tau]\xi(t). \qquad (1)$$

Здесь $f(x)$ – модулирующая детерминированная функция, нормированная так, что

$$\max f(x) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = 1, \qquad (2)$$

λ_0 и ν_0 – истинные значения времени прихода и центральной частоты спектра мощности, τ – эквивалентная длительность случайного импульса, $\xi(t)$ – реализация стационарного центрированного гауссовского случайного процесса, спектр мощности которого известен с точностью до параметра ν:

$$G(\omega, \nu) = \frac{\gamma}{2}\left[g\left(\frac{\nu-\omega}{\Omega}\right) + g\left(\frac{\nu+\omega}{\Omega}\right)\right],$$

где $\Omega = \int_0^{\infty} G^2(\omega, \nu)d\omega[\max\limits_{\omega} G(\omega, \nu)]^{-2}$ – эквивалентная полоса частот процесса $\xi(t)$, $\gamma = 2\max\limits_{\omega} G(\omega, \nu)$, четная функция $g(\cdot)$ описывает форму спектра мощности и удовлетворяет условиям нормировки вида (2).

Время прихода λ и центральную частоту спектра мощности сигнала ν полагаем априори не известными, причем неизвестное время прихода λ принимает значения из априорного интервала $[\lambda_{мин}; \lambda_{макс}]$, а неизвестная центральная частота ν принимает значения из априорного интервала $[\nu_{мин}; \nu_{макс}]$. Считаем, что импульс (1) наблюдается на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Требуется обнаружить сигнал (1) и оценить его неизвестные параметры λ и ν. Для решения задач обнаружения сигнала (1) и оценки его параметров используем метод максимального правдоподобия. Устройство, реализующее этот метод, будем называть приемником максимального правдоподобия (ПМП) [6, 7]. Ниже выполнен синтез такого приемника, найдены асимптотические выражения для характеристик обнаружения случайного импульса и оценки максимального правдоподобия (ОМП) неизвестных параметров λ и ν, определены потери в точности обнаружения и оценки вследствие незнания параметров сигнала.

1. ЛОГАРИФМ ФУНКЦИОНАЛА ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть на вход ПМП в течение интервала времени $[0; T]$ поступает реализация $x(t) = s(t, \lambda_0, \nu_0) + n(t)$ или $x(t) = n(t)$, причем $s(t, \lambda_0, \nu_0)$ и $n(t)$ статистически не зависимы. По определению ПМП формирует логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) для всех $\lambda \in [\lambda_{мин}; \lambda_{макс}]$, $\nu \in [\nu_{мин}; \nu_{макс}]$. В общем случае структура ПМП [1, 8] для случайного сигнала (1) довольно сложна с точки зрения технической реализации. В работах [9, 10] приведены упрощенные варианты структуры приемника, однако они достаточно сложны, так как требуют использования фильтров с переменными параметрами. Рассмотрим возможность упрощения выражения для логарифма ФОП при условии, что длительность импульса τ значительно превыша-

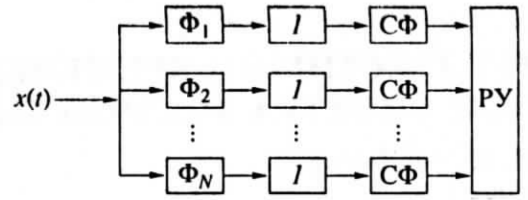

Рис. 1.

ет время корреляции процесса $\xi(t)$, т.е. когда выполняется условие

$$\mu = \tau\Omega/2\pi \gg 1. \qquad (3)$$

Тогда в соответствии с [8] логарифм ФОП с точностью до несущественного постоянного слагаемого $-\mu\int_{-\infty}^{\infty}\ln[1+qg(x)]dx$, $q=\gamma/N_0$, принимает вид

$$M(\lambda, \nu) = \frac{1}{N_0}\int_0^T \tilde{y}^2(t, \lambda, \nu)dt, \qquad (4)$$

где

$$\tilde{y}(t, \lambda, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)h(t-t_1, \nu)f[(t_1-\lambda)/\tau]dt_1,$$
$$h(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega, \nu)\exp(j\omega t)d\omega/2\pi, \qquad (5)$$

функция $H(\omega, \nu)$ определяется из соотношения

$$|H(\omega, \nu)|^2 = \frac{qg[(\omega-\nu)/\Omega]}{1+qg[(\omega-\nu)/\Omega]} + \frac{qg[(\omega+\nu)/\Omega]}{1+qg[(\omega+\nu)/\Omega]}.$$

Практическая реализация приемника случайного импульса (1) на основе (4) также достаточно сложна, так как такой приемник должен быть многоканальным и по λ, и по ν. Однако в соответствии с (3) длительность импульса τ значительно превышает время корреляции случайного процесса $\xi(t)$, а следовательно, и длительность переходных процессов в фильтре с импульсной характеристикой $h(t, \nu)$. Поэтому выражение (5) можно переписать в виде $\tilde{y}(t, \lambda, \nu) \simeq f[(t-\lambda)/\tau]y(t, \nu)$, где $y(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)h(t-t_1, \nu)dt_1$ – отклик фильтра с импульсной характеристикой $h(t, \nu)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t)$. Окончательно выражение для логарифма ФОП принимает вид

$$M(\lambda, \nu) = \frac{1}{N_0}\int_0^T f^2[(t-\lambda)/\tau]y^2(t, \nu)dt. \qquad (6)$$

Структурная схема устройства, реализующего алгоритм обнаружения или оценки неизвестных параметров импульса (1) на основе (6), приведена на рис. 1, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ – линейные фильтры с импульсными характеристиками $h(t, \nu_1), \ldots, h(t, \nu_N)$, различающимися лишь центральными частотами полос пропускания ν_i, $i = \overline{1, N}$, $\nu_1 = \nu_{мин}$, $\nu_N = \nu_{макс}$; I – квадратор; СФ – фильтр, согласованный с сигналом $f^2(t/\tau)/N_0$; РУ – решающее устройство. На вход РУ подается N сигналов с выходов СФ. При этом РУ определяет величину, положение абсолютного максимума по λ и номер канала, в котором сигнал принимает максимальное значение. При решении задачи обнаружения на основе сравнения полученного абсолютного максимума с порогом c выносится решение о наличии или отсутствии сигнала. При решении задачи оценки параметров λ и ν РУ определяет оценки этих параметров по положению абсолютного максимума сигналов на выходах СФ и по номеру канала, в котором достигается этот максимум.

Таким образом, практическая реализация ПМП на основе (6) значительно проще, чем на основе (4), так как в первом случае приемник является многоканальным лишь по одному параметру ν, а во-втором – сразу по двум параметрам: λ и ν.

Аналогично [8] можно показать, что логарифм ФОП (6), когда $\mu \longrightarrow \infty$, является асимптотически гауссовским случайным полем. Следовательно, тогда он полностью характеризуется своим средним значением и корреляционной функцией. Для расчета этих моментов при наличии полезного сигнала (1) представим функционал (6) в виде суммы сигнальной и шумовой составляющих [5–7]. Предварительно введем в рассмотрение $\vec{\vartheta} = \|\eta, \kappa\|$ – вектор неизвестных нормированных параметров $\eta = \lambda/\tau$ и $\kappa = \nu/\Omega$ ($\vec{\vartheta}_0 = \|\eta_0, \kappa_0\|$, $\eta_0 = \lambda_0/\tau$, $\kappa_0 = \nu_0/\Omega$). Параметры η и κ принимают значения из интервалов $[\eta_{мин}; \eta_{макс}]$ и $[\kappa_{мин}; \kappa_{макс}]$ соответственно, где $\eta_{мин} = \lambda_{мин}/\tau$, $\eta_{макс} = \lambda_{макс}/\tau$, $\kappa_{мин} = \nu_{мин}/\Omega$, $\kappa_{макс} = \nu_{макс}/\Omega$. Тогда $M(\vec{\vartheta}) = S_1(\vec{\vartheta}) + N_1(\vec{\vartheta})$, где $S_1(\vec{\vartheta}) = \langle M(\vec{\vartheta})\rangle$ – сигнальная, $N_1(\vec{\vartheta}) = M(\vec{\vartheta}) - \langle M(\vec{\vartheta})\rangle$ – шумовая составляющие, а усреднение выполняется при фиксированном $\vec{\vartheta}_0$. Учитывая (3), получим

$$S_1(\vec{\vartheta}) = S_0 + \mu q^2 G_{011}(0, \kappa, \kappa_0)F_{022}(0, \eta, \eta_0),$$

$$K_{N1}(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2) = $$
$$= \langle [M(\vec{\vartheta}_1) - \langle M(\vec{\vartheta}_1)\rangle][M(\vec{\vartheta}_2) - \langle M(\vec{\vartheta}_2)\rangle]\rangle =$$
$$= \mu q^2 G_{110}(\kappa_1, \kappa_2, 0)F_{220}(\eta_1, \eta_2, 0) +$$
$$+ 2\mu q^3 G_{111}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_0)F_{222}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) +$$
$$+ \mu q^4 G_{112}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_0)F_{224}(\eta_1, \eta_2, \eta_0).$$

Здесь

$$S_0 = \mu q G_{010}(0, 0, 0),$$

$$F_{nmk}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^n(x-\eta_1) f^m(x-\eta_2) f^k(x-\eta_0) dx,$$

$$G_{nmk}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_0) = $$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^n(x-\kappa_1) g^m(x-\kappa_2) g^k(x-\kappa_0)}{[1+qg(x-\kappa_1)]^n [1+qg(x-\kappa_2)]^m} dx.$$

Когда полезный сигнал отсутствует в реализации наблюдаемых данных, для (6) выполняются соотношения

$$\langle M(\vec{\vartheta})\rangle = S_0,$$

$$\langle [M(\vec{\vartheta}_1) - \langle M(\vec{\vartheta}_1)\rangle][M(\vec{\vartheta}_2) - \langle M(\vec{\vartheta}_2)\rangle]\rangle = \quad (7)$$

$$= K_{N0}(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2) = \mu q^2 G_{110}(\kappa_1, \kappa_2, 0) F_{220}(\eta_1, \eta_2, 0).$$

2. ОБНАРУЖЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА

Определим вероятности ошибок 1-го рода α (ложной тревоги) и 2-го рода β (пропуска сигнала) [6]. Полагаем вначале, что полезный сигнал отсутствует. Согласно (3) и (7), логарифм ФОП является реализацией однородного асимптотически гауссовского случайного поля с математическим ожиданием S_0 и коэффициентом корреляции

$$R_{N0}(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2) = K_{N0}(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2)/\sigma_0^2 = \frac{G_{110}(\kappa_1, \kappa_2, 0) F_{220}(\eta_1, \eta_2, 0)}{G_{020}(0,0,0) F_{004}(0,0,0)}, \quad (8)$$

где $\sigma_0^2 = \mu q^2 G_{020}(0, 0, 0) F_{004}(0, 0, 0)$ – дисперсия логарифма ФОП (6). Из формулы (8) и свойств функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ (2) следует, что $R_{N0}(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2) = R_{N0}(\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2) \longrightarrow 0$ при $|\vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}_2| \longrightarrow \infty$. Следовательно, в соответствии с [6] асимптотически точное выражение для вероятности ложной тревоги можно записать в виде

$$\alpha = P\{\max M(\vec{\vartheta}) > c, \quad \vec{\vartheta} \in \Theta\} = 1 - I(u-1)\exp[-\xi u \exp(-u^2/2)/(2\pi)^{3/2}], \quad (9)$$

где $I(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $I(x) = 0$ при $x < 0$; $u = (c - S_0)/\sigma_0$, $\Theta = ([\eta_{\text{мин}}; \eta_{\text{макс}}] \times [\kappa_{\text{мин}}; \kappa_{\text{макс}}])$ – область возможных значений нормированных неизвестных параметров $\vec{\vartheta} = \|\eta, \kappa\|$,

$$\xi = m_\eta m_\kappa \Big\{ \partial^2 R_{N0}(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2)/\partial\eta_1\partial\eta_2 \times \times \partial^2 R_{N0}(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2)/\partial\kappa_1\partial\kappa_2\Big|_{\vec{\vartheta}_0} \Big\}^{1/2} = \quad (10)$$

$$= 2m_\eta m_\kappa \{\varphi_{11}\Psi_{012}/F_{004}(0,0,0) G_{020}(0,0,0)\}^{1/2},$$

$$m_\eta = (\lambda_{\text{макс}} - \lambda_{\text{мин}})/\tau, \quad m_\kappa = (\nu_{\text{макс}} - \nu_{\text{мин}})/\Omega,$$

$$\varphi_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^{2k} f^{2n}(x) dx,$$

$$\Psi_{mkn} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^m(x)(dg(x)/dx)^{2k}}{[1+qg(x)]^{2n}} dx.$$

Параметр ξ (10) характеризует число различимых значений неизвестных параметров в области Θ, который аналогично [6] будем называть приведенным объемом априорной области Θ. Параметры m_η и m_κ определяют число сигналов, которые могут быть размещены в интервале времени $[\lambda_{\text{мин}}; \lambda_{\text{макс}}]$ и в полосе частот $[\nu_{\text{мин}}; \nu_{\text{макс}}]$ соответственно. Отметим, что точность приближенной формулы (9) возрастает с увеличением u, ξ и μ. При этом чем меньшие значения принимает вероятность ложной тревоги (9), тем больше должен быть параметр μ (3). Последнее необходимо для обеспечения достаточной точности гауссовской аппроксимации распределения логарифма ФОП (6).

Полагаем теперь, что полезный сигнал (1) присутствует на входе ПМП. Тогда вероятность пропуска

$$\beta = P\{\max_{\vec{\vartheta} \in \Theta} M(\vec{\vartheta}) < c\} = P\{M_{\vec{\vartheta} \in \Theta}(\vec{\vartheta}) < c\}. \quad (11)$$

Полагая, что выходное отношение сигнал/шум

$$z^2 = [S_1(\vec{\vartheta}_0) - S_0]^2/\sigma_1^2(\vec{\vartheta}_0) = \mu q^2 [G_{011}(0,0,0) F_{004}(0,0,0)]^2 \times \times \{G_{020}(0,0,0) F_{004}(0,0,0) + 2qG_{021}(0,0,0) F_{006}(0,0,0) + q^2 G_{022}(0,0,0) F_{008}(0,0,0)\}^{-1}$$

достаточно велико, можно получить аналогично [6] приближенное выражение для (11):

$$\beta = I(u-1)\exp[-\xi u\exp(-u^2/2)/(2\pi)^{3/2}]\sigma_1(\vec{\vartheta}_0)\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{fu-z}\exp[-\sigma_1^2(\vec{\vartheta}_0)/2 - x\sigma_1(\vec{\vartheta}_0)]\Phi[x-\sigma_1(\vec{\vartheta}_0)]dx. \tag{12}$$

Здесь

$$\sigma_1^2(\vec{\vartheta}_0) = K_{N1}(\vec{\vartheta}_0, \vec{\vartheta}_0) =$$
$$= \mu q^2 G_{020}(0,0,0)F_{004}(0,0,0) +$$
$$+ 2\mu q^3 G_{021}(0,0,0)F_{006}(0,0,0) +$$
$$+ \mu q^4 G_{022}(0,0,0)F_{008}(0,0,0),$$

$$f^2 = \sigma_0^2/\sigma_1^2(\vec{\vartheta}_0) = G_{020}(0,0,0)F_{004}(0,0,0)\times$$
$$\times\{G_{020}(0,0,0)F_{004}(0,0,0) +$$
$$+ 2qG_{021}(0,0,0)F_{006}(0,0,0) +$$
$$+ q^2 G_{022}(0,0,0)F_{008}(0,0,0)\}^{-1},$$

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\exp(-t^2/2)dt/\sqrt{2\pi}.$$

Точность формулы (12) возрастает с увеличением μ, u, ξ и z. При этом чем меньшие значения принимает вероятность пропуска сигнала β (12), тем больше должен быть параметр μ. Отметим также, что в рассматриваемом приближении вероятность пропуска случайного импульса не зависит от истинного значения неизвестного векторного параметра $\vec{\vartheta}_0$.

Рассмотрим, как влияет факт незнания параметров η и κ импульса (1) на эффективность его обнаружения. Для этого сравним полученные характеристики (9), (12) с соответствующими характеристиками обнаружения сигнала с априори известными параметрами [8]:

$$\alpha_0 = 1-\Phi(u),\quad \beta_0 = \Phi(fu-z). \tag{13}$$

Аналитическое сравнение характеристик (9), (12) и (13) удается осуществить лишь в случае, когда вероятность ложной тревоги мала ($\alpha \le 0.1$), а отношение сигнал/шум z достаточно велико. Полагая в (9), (12) и (13) $u \gg 1$ и $z \gg 1$, получаем $\beta \approx \beta_0$, $\alpha/\alpha_0 \approx \xi u^2/2\pi$. Следовательно, относительные потери в эффективности обнаружения импульса (1) с неизвестными временем прихода и центральной частотой спектра мощности возрастают с увеличением приведенного объема ξ (10) и с уменьшением требуемого уровня вероятности ложной тревоги, так как $\alpha \longrightarrow 0$ при $u \longrightarrow \infty$.

3. ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ПРИХОДА И ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ СПЕКТРА МОЩНОСТИ ИМПУЛЬСА

В соответствии с определением [7] оценка максимального правдоподобия $\vec{\vartheta}_m$ неизвестных параметров импульса определяется как положение абсолютного максимума логарифма ФОП (6), т.е. $\vec{\vartheta}_m = \operatorname{argsup} M(\vec{\vartheta})$, $\vec{\vartheta} \in \Theta$. Точность оценки $\vec{\vartheta}_m$ будем характеризовать вектором условных смещений $\vec{d}(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) = \langle\vec{\vartheta}_m - \vec{\vartheta}_0|\vec{\vartheta}_0\rangle$ и матрицей условных рассеяний ОМП (вторых начальных моментов ошибок оценок) $\mathbf{V}(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) = \langle(\vec{\vartheta}_m - \vec{\vartheta}_0)^T(\vec{\vartheta}_m - \vec{\vartheta}_0)|\vec{\vartheta}_0\rangle$, где T – операция транспонирования. Эти характеристики с учетом аномальных ошибок можно записать в виде

$$\begin{aligned}\vec{d}(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) &= P_0\vec{d}_0(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) + (1-P_0)\vec{d}_{\text{а}}(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0),\\ \mathbf{V}(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) &= P_0\mathbf{V}_0(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) + (1-P_0)\mathbf{V}_{\text{а}}(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0),\end{aligned} \tag{14}$$

где P_0 – вероятность надежной оценки; $\vec{d}_0$, $\mathbf{V}_0$ и $\vec{d}_{\text{а}}$, $\mathbf{V}_{\text{а}}$ – векторы смещений и матрицы рассеяний ОМП соответственно для нормальных и аномальных ошибок [7]. Согласно [7] получаем

$$\vec{d}_0(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) = 0,\quad \vec{d}_{\text{а}}(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) = \|d_{\text{а}i}\|,\quad i = 1, 2,$$
$$d_{\text{а}1} = -\eta_0 + (\eta_{\text{мин}} + \eta_{\text{макс}})/2,$$
$$d_{\text{а}2} = -\kappa_0 + (\kappa_{\text{мин}} + \kappa_{\text{макс}})/2,$$
$$\mathbf{V}_0(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) = \mathbf{V}_0 = \begin{Vmatrix} D_\eta & 0\\ 0 & D_\kappa\end{Vmatrix},$$

$$D_\eta = \left.\frac{\partial^2 K_{N1}(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2)/\partial\eta_1\partial\eta_2}{[d^2S_1(\vec{\vartheta})/d\eta^2]^2}\right|_{\vec{\vartheta}_0} = \{G_{020}(0,0,0)\varphi_{11} +$$
$$+ 2qG_{021}(0,0,0)\varphi_{12} + q^2G_{022}(0,0,0)\varphi_{13}\}\times \tag{15}$$
$$\times\{4\mu q^2[G_{011}(0,0,0)\varphi_{11}]^2\}^{-1},$$

$$D_\kappa = \left.\frac{\partial^2 K_{N1}(\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2)/\partial\kappa_1\partial\kappa_2}{[d^2S_1(\vec{\vartheta})/d\kappa^2]^2}\right|_{\vec{\vartheta}_0} = \{F_{004}(0,0,0)\Psi_{012} +$$
$$+ 2qF_{006}(0,0,0)\Psi_{112} + q^2F_{008}(0,0,0)\Psi_{212}\}\times \tag{16}$$
$$\times\{\mu q^2[F_{004}(0,0,0)\Psi_{011}]^2\}^{-1},$$

$$\mathbf{V}_{\text{а}}(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) = \left\| \begin{matrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{matrix} \right\|,$$

$$V_{11} = (\eta_{\text{мин}}^2 + \eta_{\text{мин}}\eta_{\text{макс}} + \eta_{\text{макс}}^2)/3 + \\ + \eta_0^2 - \eta_0(\eta_{\text{мин}} + \eta_{\text{макс}}),$$

$$V_{22} = (\kappa_{\text{мин}}^2 + \kappa_{\text{мин}}\kappa_{\text{макс}} + \kappa_{\text{макс}}^2)/3 + \\ + \kappa_0^2 - \kappa_0(\kappa_{\text{мин}} + \kappa_{\text{макс}}),$$

$$V_{12} = \eta_0\kappa_0 - \eta_0(\kappa_{\text{мин}} + \kappa_{\text{макс}})/2 - \\ - \kappa_0(\eta_{\text{мин}} + \eta_{\text{макс}})/2 + (\eta_{\text{мин}} + \eta_{\text{макс}})(\kappa_{\text{мин}} + \kappa_{\text{макс}})/4.$$

Вероятность надежной оценки P_0 при $\xi \gg 1$ можно записать согласно [7] в виде

$$P_0 \simeq \frac{f}{\sqrt{2\pi}} \times \\ \times \int_1^\infty \exp\left\{-\frac{\xi}{(2\pi)^{3/2}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}(fx - z)^2\right\} dx. \quad (17)$$

Из формулы (17) следует, что в рассматриваемом случае вероятность надежной оценки P_0 не зависит от истинного значения параметров $\vec{\vartheta}_0$. Это позволяет достаточно легко найти безусловные характеристики ОМП, если считать, что параметры η и κ априори статистически не зависимы и распределены равномерно на априорных интервалах $[\eta_{\text{мин}}; \eta_{\text{макс}}]$ и $[\kappa_{\text{мин}}; \kappa_{\text{макс}}]$ соответственно. В таком случае, усредняя (14) по параметрам $\vec{\vartheta}_0$, получаем вектор безусловных смещений и матрицу безусловных рассеяний $\vec{d}(\vec{\vartheta}_m) = 0$, $\mathbf{V}(\vec{\vartheta}_m) = P_0\mathbf{V}_0 + (1 - P_0)\mathbf{V}_{\text{а}}(\vec{\vartheta}_m)$, где $\mathbf{V}_{\text{а}}(\vec{\vartheta}_m)$ – диагональная матрица (2×2) с элементами $m_\eta^2/6$ и $m_\kappa^2/6$. Таким образом, ОМП параметров η и κ безусловно несмещенные и некоррелированные, а безусловные рассеяния совместных оценок параметров η и κ имеют вид

$$V_\eta = P_0 D_\eta + (1 - P_0)m_\eta^2/6, \\ V_\kappa = P_0 D_\kappa + (1 - P_0)m_\kappa^2/6, \quad (18)$$

где D_η и D_κ могут быть рассчитаны по формулам (15), (16).

Определим проигрыш в точности оценки нормированного времени прихода η вследствие незнания центральной частоты спектра мощности ν. С этой целью сравним рассеяние оценки времени прихода V_η (18) с рассеянием $\tilde{V}_\eta$ оценки времени прихода $\hat{\eta}$, рассчитанным при условии, что параметр κ априори известен. Рассеяние оценки $\hat{\eta}$ в соответствии с [7] имеет вид $\tilde{V}_\eta = \tilde{P}_0 D_\eta + (1 - \tilde{P}_0)m_\eta^2/6$, где $\tilde{P}_0 \simeq f\int_0^\infty \exp\{-(fx - z)^2/2 - \tilde{\xi}\exp(-x^2/2)/2\pi\}dx/\sqrt{2\pi}$, $\tilde{\xi} = 2m_\eta\sqrt{\varphi_{11}/F_{004}(0,0,0)}$, а значение D_η определено в (15). Проигрыш в точности оценки будем описывать зависимостью отношения $\chi = V_\eta/\tilde{V}_\eta$ от q.

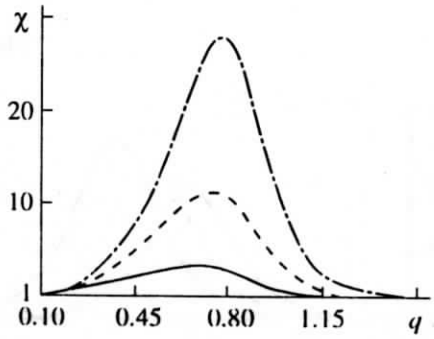

Рис. 2.

На рис. 2 приведена зависимость $\chi(q)$ для следующих условий: модулирующая функция имеет колоколообразную форму: $f(x) = \exp(-\pi x^2/2)$, спектр мощности описывается лоренцовской кривой: $g(x) = [1 + (\pi x/2)^2]^{-1}$, $\mu = 100$, $m_\eta = 10$. Сплошная линия соответствует $m_\kappa = 10$, штриховая – $m_\kappa = 100$, штрихпунктирная – $m_\kappa = 1000$. Анализ рис. 2 свидетельствует о том, что проигрыш в точности оценки η вследствие незнания κ может быть весьма большим в наиболее существенной с практической точки зрения области $0.5 < q < 1$. Причем этот проигрыш возрастает с увеличением параметра m_κ (10), определяющего число сигналов, которое может быть размещено в диапазоне частот $[\nu_{\text{мин}}; \nu_{\text{макс}}]$. При очень малых и очень больших значениях q проигрыша нет, так как при этом вероятность аномальных ошибок $P_{\text{а}} = 1 - P_0$ либо близка к единице, либо практически равна нулю. Нетрудно показать, что проигрыш в точности оценки нормированной центральной частоты κ вследствие незнания времени прихода принимает такие же значения. Этот проигрыш увеличивается с ростом параметра m_η, определяющего число сигналов, которые можно разместить в интервале времени $[\lambda_{\text{мин}}; \lambda_{\text{макс}}]$.

Как показано выше, оценки η_m и κ_m не коррелированы даже с учетом аномальных ошибок. Однако из рис. 2 следует, что имеет место проигрыш в точности оценки η при неизвестном κ по сравнению со случаем априори известного κ. Следовательно, существует некоторая статистическая нелинейная зависимость между этими оценками. Для того чтобы охарактеризовать эту зависимость, рассмотрим более подробно свойства

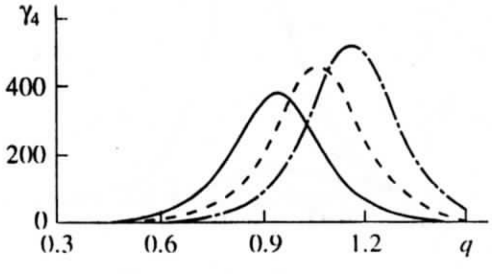

Рис. 3.

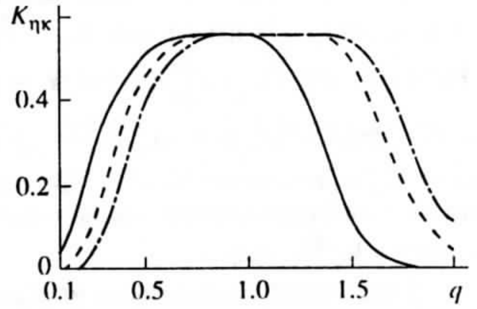

Рис. 4.

совместной плотности вероятности оценок η_m и κ_m: $W(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) = P_0W_0(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0) + P_aW_a(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0)$, где $W_0(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0)$ – плотность вероятности надежной оценки $\vec{\vartheta}_m$, которая в силу некоррелированности оценок η_m и κ_m распадается на произведение одномерных гауссовских плотностей вероятностей со средними значениями η_0 и κ_0 и дисперсиями D_η и D_κ соответственно; $W_a(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0)$ – плотность вероятности оценки $\vec{\vartheta}_m$ при наличии только аномальных ошибок, которая является равномерной в априорной области Θ.

Маргинальная плотность вероятности $W(\eta_m|\eta_0)$ параметра η определяется посредством интегрирования по κ двухмерной плотности вероятности $W(\vec{\vartheta}_m|\vec{\vartheta}_0)$. Вычислим наиболее часто используемые кумулянтные коэффициенты распределения $W(\eta_m|\eta_0)$: коэффициент асимметрии $\gamma_3 = \mu_3/\sigma^3$ и коэффициент эксцесса $\gamma_4 = \mu_4/\sigma^4 - 3$. Здесь μ_k (k = 3, 4) – центральный момент k-го порядка, σ^2 – дисперсия распределения $W(\eta_m|\eta_0)$. Если $\eta_0 = (\eta_{мин} + \eta_{макс})/2$, то коэффициент асимметрии $\gamma_3 = 0$, а коэффициент эксцесса $\gamma_4 = [3P_0D_\eta^2 + (1 - P_0)m_\eta^4/80] \times [P_0D_\eta + (1 - P_0)m_\eta^2/12]^{-2} - 3$.

На рис. 3 приведена зависимость $\gamma_4(q)$ при тех же условиях и параметрах, что и на рис. 2. Видим, что коэффициент эксцесса может принимать очень большие значения при умеренных значениях q. При малых q, когда $P_0 \simeq 0$, коэффициент эксцесса $\gamma_4 \simeq -6/5$ (плотность вероятности практически равномерна), а при больших q ($P_0 \simeq 1$) величина $\gamma_4 \simeq 0$ (плотность вероятности практически совпадает с гауссовской).

В качестве меры нелинейной статистической зависимости между оценками будем использовать коэффициент квадратичной корреляции $K_{\eta\kappa}$, так как коэффициент линейной корреляции равен нулю. Определим коэффициент квадратичной корреляции как:

$$K_{\eta\kappa} = \{\langle[(\eta_m - \eta_0)^2 - \langle(\eta_m - \eta_0)^2\rangle] \times$$
$$\times [(\kappa_m - \kappa_0)^2 - \langle(\kappa_m - \kappa_0)^2\rangle]\rangle\}/\{\langle[(\eta_m - \eta_0)^2 -$$
$$- \langle(\eta_m - \eta_0)^2\rangle]^2\rangle\langle[(\kappa_m - \kappa_0)^2 - \langle(\kappa_m - \kappa_0)^2\rangle]^2\rangle\}^{1/2}.$$

Выполнив необходимое усреднение, получим

$$K_{\eta\kappa} = \{P_0D_\eta D_\kappa + (1 - P_0)m_\eta^2 m_\kappa^2/144 -$$
$$-[P_0D_\eta + (1 - P_0)m_\eta^2/12][P_0D_\kappa + (1 - P_0)m_\kappa^2/12]\} \times$$
$$\times \{[3P_0D_\eta^2 + (1 - P_0)m_\eta^4/80 -$$
$$-[P_0D_\eta + (1 - P_0)m_\eta^2/12]^2][3P_0D_\kappa^2 +$$
$$+(1 - P_0)m_\kappa^4/80 - [P_0D_\kappa + (1 - P_0)m_\kappa^2/12]^2\}^{-1/2}.$$

На рис. 4 приведена зависимость коэффициента квадратичной корреляции $K_{\eta\kappa}$ от q при тех же условиях и параметрах, при которых построены кривые на рис. 2, 3. Видно, что при малых или больших значениях q, т.е. когда вероятность надежной оценки P_0 мала или наоборот близка к единице, коэффициент квадратичной корреляции стремится к нулю. При умеренных значениях q этот коэффициент может достигать значений, близких к единице.

Таким образом, несмотря на некоррелированность оценок η_m и κ_m эти оценки имеют существенную нелинейную статистическую зависимость, вследствие которой появляется проигрыш в точности оценки времени прихода за счет незнания центральной частоты (и наоборот).

Результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ван-Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 3. М.: Сов. радио, 1977.

2. *Кремер И.Я., Владимиров В.И., Карпухин В.И.* Модулирующие помехи и прием радиосигналов / Под ред. Кремера И.Я. М.: Сов. радио, 1972.
3. *Зюко А.Г., Коробов Ю.Ф.* Теория передачи сигналов. М.: Связь, 1972.
4. *Евтютов А.И., Митько В.Б.* Инженерные расчеты в гидроакустике. Л.: Судостроение, 1988.
5. *Трифонов А.П., Парфенов В.И.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1995. Т. 38. № 7. С. 3.
6. *Трифонов А.П.* // Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1986. С. 12–89.
7. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1988.
8. *Бакут П.А., Большаков И.А., Герасимов Б.М. и др.* // Вопросы статистической теории радиолокации. Т. 1 / Под ред. Тартаковского Г.П. М.: Сов. радио, 1963.
9. *Тартаковский Г.П.* // Пробл. передачи информ. 1965. Т. 1. № 36. С. 56.
10. *Курикша А.А.* Квантовая оптика и оптическая локация. М.: Сов. радио, 1973.