РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1999, N1

МОСКВА

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горцев А. М., Нежельская Л. А., Шевченко Т. И.* Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Изв. вузов. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
2. *Хазен Э. М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968.
3. *Горцев А. М., Нежельская Л. А.* Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Серия: Системы связи. 1989. Вып. 7. С. 46–54.
4. *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963.
5. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 03.06.97

УДК 519.262.4

Т. М. ОВЧИННИКОВА, канд. физ.-мат. наук,
А. П. ТРИФОНОВ, д-р техн. наук
(Воронежский государственный университет)

ОБНАРУЖЕНИЕ И ОЦЕНКА МОМЕНТА ИЗМЕНЕНИЯ НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА. I[1]

Рассмотрены максимально правдоподобные алгоритмы обнаружения изменения неизвестной интенсивности пуассоновского потока и оценивания интенсивности потока до и после момента ее изменения, а также самого момента изменения. На основе метода локально-марковской аппроксимации логарифма функционала отношения правдоподобия получены асимптотические выражения для характеристик алгоритмов обработки. Работоспособность синтезированных алгоритмов и границы применимости найденных формул установлены посредством статистического моделирования алгоритмов на ЭВМ.

1. Введение

Во многих практических задачах, связанных с контролем и управлением стохастическими системами, необходимо анализировать случайные потоки событий, воздействующие на систему или являющиеся результатом ее работы. Эти потоки возникают при исследовании свойств материалов, присутствуют в информационно-вычислительных сетях, в радиотехнических системах и системах связи. Такие задачи, как правило, требуют контроля за изменением свойств наблюдаемого потока [1, 2]. Причем, при изучении подобных объектов естественные предположения об ординарности и отсутствии последействия во многих случаях приводят к наиболее распространенной модели потока – нестационарному пуассоновскому точечному потоку [3]. В простейшем случае возможно скачкообразное изменение известной интенсивности в некоторый, вообще говоря, неизвестный момент времени наблюдения

[1]Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00090.

(контроля). Задача обнаружения такого изменения интенсивности (разладки потока) и оценки самого момента изменения рассматривалась в [4]. В [5] полагалось, что неизвестна также величина скачка интенсивности. Однако для осуществления полного оперативного контроля изменения свойств потока необходимо в общем случае обнаружить разладку, оценить интенсивность потока до и после изменения, а также сам момент разладки. Использование при этом апостериорных методов, в том числе метода максимального правдоподобия, оправданно как с точки зрения постановки целого ряда задач, так и в силу большей статистической эффективности апостериорных методов обнаружения и оценки момента разладки [1, 2, 4–9] и др.

Итак, пусть на интервале времени $[0;T]$ наблюдается реализация $\Xi(t)$ пуассоновского случайного потока. При этом согласно гипотезе H_0 его неизвестная интенсивность постоянна: $\lambda_0 = a_0$, $a_0 > 0$. С другой стороны, при гипотезе H_1 интенсивность потока имеет вид

$$\lambda_1(t,\theta_0) = b_0 s(t,\theta_0) + a_0, \quad s(t,\theta_0) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \theta_0, \\ 0, & t < 0, \quad t > \theta_0, \end{cases} \tag{1}$$

т.е. интенсивность $\lambda_1(t,\theta_0)$ скачком изменяется в момент $t = \theta_0$, причем a_0, b_0, θ_0 неизвестны и θ_0 может принимать значения из интервала $[T_1;T_2]$, $0 < T_1 < T_2 < T$. По наблюдаемой реализации $\Xi(t)$ необходимо сделать выбор из двух сложных гипотез H_0 и H_1. Если справедлива гипотеза H_0, то следует оценить неизвестную интенсивность a_0, в противном случае необходимо оценить неизвестные параметры a_0, b_0, θ_0.

В первой части работы рассмотрены алгоритмы максимального правдоподобия обработки такого потока. В результате исследования асимптотических свойств решающей статистики найдены функции распределения ее абсолютных максимумов при обеих гипотезах.

Во второй части работы на основе этих функций распределения получены асимптотические выражения для характеристик обнаружения и оценки неизвестных параметров. Здесь же приведены результаты численных расчетов и статистического моделирования для конкретных значений параметров. Результаты моделирования на ЭВМ подтверждают работоспособность синтезированных алгоритмов и позволяют установить границы применимости найденных асимптотических формул для расчета характеристик обработки.

2. Алгоритмы обнаружения и оценки момента разладки

В большинстве практических задач априорные распределения величин a, b и момента их изменения θ, а также априорные вероятности гипотез H_0 и H_1 неизвестны. Это не позволяет применить байесовские алгоритмы обнаружения и оценки. В то же время использование метода максимального правдоподобия [4–9] дает возможность преодолеть трудности, связанные с априорной неопределенностью. Для реализации метода максимального правдоподобия необходимо формировать функционал отношения правдоподобия [7]

$$\ell(a,b,\theta) = F\left[\Xi(t)\,|\,H_1,a,b,\theta\right] / F\left[\Xi(t)\,|\,H_0,a\right], \tag{2}$$

где $F[\Xi(t)\,|\,H_i]$ – функционал плотности вероятности потока, когда верна гипотеза H_i, $i = 0,1$. Явные выражения для функционалов плотности вероятности приведены, например, в [8, 9]. Метод максимального правдоподобия предполагает последующую максимизацию функционала (2) по неизвестным параметрам наблюдаемого потока [4, 5, 8].

Для проверки сложной гипотезы H_1 против сложной альтернативы H_0 воспользуемся в качестве решающей процедуры критерием Неймана–Пирсона [6, 10], определяемым критической областью

$$(3)\qquad L > h_\alpha$$

и отвечающим уровню значимости α. При этом порог h_α определяется соотношением $\mathrm{P}_{10}(h_\alpha) = \alpha$, где $\mathrm{P}_{10}(h) = \mathrm{P}\,(H_1 \mid H_0)$ – вероятность ошибки первого рода (ложной тревоги). В (3) обозначено

$$(4)\qquad L = \ln\left\{\sup_{a,b,\theta} F\left[\Xi(t) \mid H_1, a, b, \theta\right] \Big/ \sup_{a} F\left[\Xi(t) \mid H_0, a\right]\right\} =$$

$$= \ln\left\{F\left[\Xi(t) \mid H_1, a_m, b_m, \theta_m\right] / F\left[\Xi(t) \mid H_0, a_{0m}\right]\right\} =$$

$$= \sup L(\theta) = L(\theta_m),$$

$$(5)\qquad L(\theta) = \Xi_\theta \ln\frac{\Xi_\theta T}{\theta \Xi_T} + (\Xi_T - \Xi_\theta)\ln\frac{(\Xi_T - \Xi_\theta)T}{(T-\theta)\Xi_T},$$

$$(6)\qquad \theta_m = \arg\sup L(\theta), \quad \theta \in [T_1; T_2],$$

$$(7)\qquad b_m = \frac{\Xi_{\theta_m}}{\theta_m} - \frac{(\Xi_T - \Xi_{\theta_m})}{T - \theta_m}, \quad a_m = \frac{\Xi_T - \Xi_{\theta_m}}{T - \theta_m},$$

$$(8)\qquad a_{0m} = \frac{\Xi_T}{T}, \quad \Xi_\theta = \int\limits_0^\theta d\Xi(t), \quad \Xi_T = \int\limits_0^T d\Xi(t).$$

Если справедлива гипотеза H_0, то оценка максимального правдоподобия неизвестной интенсивности наблюдаемого потока имеет вид (8) [8, 9]. При гипотезе H_1 совместные оценки максимального правдоподобия момента изменения (разладки) неизвестной интенсивности потока, а также интенсивностей потока до и после момента изменения определяются из (6), (7). Отметим, что формулы, аналогичные (5)–(7), найдены также в [8].

Согласно (5)–(8) реализация алгоритмов максимального правдоподобия обнаружения и совместной оценки момента разладки и величины неизвестной интенсивности пуассоновского потока существенно проще, чем, например, реализация байесовского алгоритма [11]. Кроме того, в отличие от байесовских алгоритмов при анализе качества функционирования синтезированных алгоритмов максимального правдоподобия можно найти асимптотически точные аналитические выражения для их характеристик. С этой целью, аналогично [5, 12] введем вспомогательную двумерную функцию распределения абсолютных максимумов выходной статистики (5)

$$(9)\qquad F(u, v, s) = \mathrm{P}\left[\,\underset{T_1 \leqslant \theta < s}{L(\theta) < u};\, \underset{s \leqslant \theta \leqslant T_2}{L(\theta) < v}\,\right].$$

Через эту функцию относительно просто выражаются вероятности ошибок первого и второго рода при обнаружении, а также распределение оценки максимального правдоподобия момента разладки [5, 12].

3. Некоторые свойства логарифма функционала отношения правдоподобия при отсутствии разладки

Введем в рассмотрение безразмерный параметр $\nu = \theta/T_2$, $\nu \in [\nu^*; 1]$, $\nu^* = T_1/T_2$ и определим центрированные и нормированные случайные потоки

$$(10)\qquad y(\nu) = (\Xi_\nu - \langle \Xi_\nu \rangle)\Big/\sqrt{\langle \Xi_\nu^2 \rangle - \langle \Xi_\nu \rangle^2}$$

и величину

$$(11)\qquad x = \left(\Xi_{\nu^{**}} - \langle \Xi_{\nu^{**}} \rangle\right)\Big/\sqrt{\langle \Xi_{\nu^{**}}^2 \rangle - \langle \Xi_{\nu^{**}} \rangle^2},$$

где $\Xi_\nu = \int\limits_0^{\nu T_2} d\Xi(t)$, $\Xi_{\nu^{**}} = \int\limits_0^{\nu^{**}T_2} d\Xi(t)$ и $\nu^{**} = T/T_2$. Здесь и далее угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций потока $\Xi(t)$. Будем считать, что среднее число точек наблюдаемого потока на интервале анализа достаточно велико при обеих гипотезах, так что, в частности,

$$\mu = a_0 T_2 \gg 1, \tag{12}$$

и величина $\varepsilon = 1/\sqrt{\mu}$ является малым параметром. Положим далее, что верна гипотеза H_0 (разладка потока не происходит) и обозначим

$$L(\theta \mid H_0) = L_0(\theta) = L_0(\nu T_2) = \widetilde{L}_0(\nu).$$

Утверждение 1. *Когда верна гипотеза H_0, и выполняется (12), для выходной статистики (5) справедливо приближенное выражение*

$$\widetilde{L}_0(\nu) \approx \left[y(\nu)\sqrt{\nu^{**}} - x\sqrt{\nu}\right]^2 / 2(\nu^{**} - \nu), \tag{13}$$

точность которого возрастает с увеличением μ (12).

Учитывая, что при выполнении (12) процесс (10) и величина (11) являются асимптотически гауссовскими [13], для первых двух моментов (13) имеем

$$\begin{aligned} &\left\langle \widetilde{L}_0(\nu) \right\rangle = 1/2, \\ &K_0(\nu_1, \nu_2) = \left\langle \left[\widetilde{L}_0(\nu_1) - \left\langle \widetilde{L}_0(\nu_1) \right\rangle\right] \left[\widetilde{L}_0(\nu_2) - \left\langle \widetilde{L}_0(\nu_2) \right\rangle\right] \right\rangle \approx \\ &\approx \left[\nu^{**} \min(\nu_1, \nu_2) - \nu_1\nu_2\right]^2 / 2\nu_1\nu_2(\nu^{**} - \nu_1)(\nu^{**} - \nu_2). \end{aligned} \tag{14}$$

Далее, воспользовавшись преобразованием гауссовской плотности вероятности, получим выражение для плотности вероятности логарифма функционала отношения правдоподобия (13) в виде

$$W_0(\widetilde{L}_0) = \exp(-\widetilde{L}_0)/\sqrt{\pi \widetilde{L}_0}, \quad \widetilde{L}_0 \geqslant 0. \tag{15}$$

При гипотезе H_0 с учетом введенных обозначений (9) перепишется как

$$F(u, v, s) = F(u, v, s \mid H_0) = F_0(u, v, s) = \mathrm{P}\left[\widetilde{L}_0(\nu) \underset{\nu^* \leqslant \nu < \widetilde{s}}{<} u; \widetilde{L}_0(\nu) \underset{\widetilde{s} \leqslant \nu \leqslant 1}{<} v\right], \tag{16}$$

где $\widetilde{s} = s/T_2$, а $\widetilde{L}_0(\nu)$ определяется из (13).

Утверждение 2. *Когда верна гипотеза H_0, и выполняется (12), при достаточно больших значениях порогов u и v приближенное выражение для двумерной функции распределения абсолютных максимумов выходной статистики (16) имеет вид*

$$\begin{aligned} &F(u, v, \widetilde{s}) \approx \\ &\approx \exp\left[-\ln\frac{\widetilde{s}}{(\nu^{**} - \widetilde{s})}\sqrt{\frac{u}{\pi}}\exp(-u) - \ln\frac{(\nu^{**} - \nu^*)(\nu^{**} - \widetilde{s})}{\nu^*\widetilde{s}(\nu^{**} - 1)}\sqrt{\frac{v}{\pi}}\exp(-v)\right], \\ &u, v > 1/2. \end{aligned} \tag{17}$$

Точность этой аппроксимации возрастает с увеличением u, v, μ, а также по мере увеличения априорного интервала $[T_1; T_2]$ возможных значений момента разладки.

4. Некоторые свойства логарифма функционала отношения правдоподобия при наличии разладки потока

Пусть теперь справедлива гипотеза H_1. Тогда, в соответствии с определением и свойствами пуассоновского потока [9], находим $\langle \Xi_{\nu^{**}} \rangle = \mu(\nu^{**} + \nu_0 q)$, $\langle \Xi_\nu \rangle = \mu\psi(\nu, \nu_0)$, где $\psi(\nu, \nu_0) \equiv \psi \equiv \nu + q \min(\nu, \nu_0)$, $q = b_0/a_0$, $\nu_0 = \theta_0/T_2$. Обозначим $\varphi = \langle \Xi_\nu \rangle \langle \Xi_{\nu^{**}} \rangle^{-1} = \psi/(\nu^{**} + \nu_0 q)$, $L(\theta \,|\, H_1) = L_1(\theta) = L_1(\nu T_2) = \widetilde{L}_1(\nu)$. Используя также (10), (11), перепишем (5) в виде

$$\begin{aligned}(18)\qquad \widetilde{L}_1(\nu) = \widetilde{L}_1(\nu, \varepsilon) = \mu(\nu^{**} + \nu_0 q) \Bigg\{ \varphi \left(\frac{\varepsilon y(\nu)}{\sqrt{\psi}} + 1 \right) \ln \frac{\nu^{**}(\varepsilon y(\nu) + \sqrt{\psi})\sqrt{\varphi}}{\nu\,(\varepsilon x + \sqrt{\nu^{**} + \nu_0 q})} + \\ + \left[\frac{\varepsilon x}{\sqrt{\nu^{**} + \nu_0 q}} + 1 - \varphi \left(\frac{\varepsilon y(\nu)}{\sqrt{\psi}} + 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{\nu^{**} \left[\varepsilon x + \sqrt{\nu^{**} + \nu_0 q} - \sqrt{\varphi}\,(\varepsilon y(\nu) + \sqrt{\psi}) \right]}{(\nu^{**} - \nu)\,(\varepsilon x + \sqrt{\nu^{**} + \nu_0 q})} \right] \Bigg\}.\end{aligned}$$

Разложим (18) в ряд по степеням ε. Удерживая лишь первый ненулевой член разложения, зависящий от реализации наблюдаемых данных, получим приближенное выражение для логарифма функционала отношения правдоподобия (18)

$$\begin{aligned}(19)\qquad \widetilde{L}_1(\nu) = \left[\widetilde{L}_1(\nu, \varepsilon) \right]_{\varepsilon=0} + \left[\frac{\partial \widetilde{L}_1(\nu, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \varepsilon + o(\varepsilon) \approx \\ \approx \mu(\nu^{**} + \nu_0 q) \Bigg\{ \varphi \ln \frac{\varphi(\nu^{**} - \nu)}{\nu(1 - \varphi)} + \ln \frac{\nu^{**}(1 - \varphi)}{\nu^{**} - \nu} + \\ + \left[\frac{\varphi y(\nu)}{\sqrt{\psi}} \ln \frac{\varphi(\nu^{**} - \nu)}{\nu(1 - \varphi)} + \frac{x}{\sqrt{\nu^{**} + \nu_0 q}} \ln \frac{\nu^{**}(1 - \varphi)}{\nu^{**} - \nu} \right] \varepsilon \Bigg\}.\end{aligned}$$

Представим (19) в виде суммы регулярной (сигнальной) и помеховой составляющих $\widetilde{L}_1(\nu) = S(\nu) + N(\nu)$, где $S(\nu) = \langle \widetilde{L}_1(\nu) \rangle$, $N(\nu) = \widetilde{L}_1(\nu) - \langle \widetilde{L}_1(\nu) \rangle$. Учитывая, что при выполнении (12) процесс (10), случайная величина (11) и помеховая функция $N(\nu)$ являются асимптотически гауссовскими [13], для первых двух моментов (19) получим

$$\begin{aligned}S(\nu) = \mu(\nu^{**} + \nu_0 q) \left[\varphi \ln \frac{\varphi(\nu^{**} - \nu)}{\nu(1 - \varphi)} + \ln \frac{\nu^{**}(1 - \varphi)}{\nu^{**} - \nu} \right], \\ (20)\qquad K_1(\nu_1, \nu_2) = \langle N(\nu_1) N(\nu_2) \rangle = \\ = \mu \Bigg\{ \min(\psi_1, \psi_2) \ln \frac{\varphi_1(\nu^{**} - \nu_1)}{\nu_1(1 - \varphi_1)} \ln \frac{\varphi_2(\nu^{**} - \nu_2)}{\nu_2(1 - \varphi_2)} + \\ + \psi_1 \ln \frac{\varphi_1(\nu^{**} - \nu_1)}{\nu_1(1 - \varphi_1)} \ln \frac{\nu^{**}(1 - \varphi_2)}{\nu^{**} - \nu_2} + \psi_2 \ln \frac{\varphi_2(\nu^{**} - \nu_2)}{\nu_1(1 - \varphi_2)} \ln \frac{\nu^{**}(1 - \varphi_1)}{\nu^{**} - \nu_1} + \\ + (\nu^{**} + \nu_0 q) \ln \frac{\nu^{**}(1 - \varphi_1)}{\nu^{**} - \nu_1} \ln \frac{\nu^{**}(1 - \varphi_2)}{\nu^{**} - \nu_2} \Bigg\}.\end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения $\psi_i \equiv \psi(\nu_i, \nu_0)$, $\varphi_i \equiv \varphi(\nu_i)$, $i = 1, 2$.

На основании (20) можно записать дисперсию выходной статистики (19) при $\nu < \nu_0$

$$(21a)\qquad \sigma^2(\nu) = \mu \left\{ \nu(1 + q) \ln^2 \frac{(\nu^{**} - \nu)(1 + q)}{\nu^{**} + \nu_0 q - \nu(1 + q)} + \right.$$

$$+2\nu(1+q)\ln\frac{(\nu^{**}-\nu)(1+q)}{\nu^{**}+\nu_0 q-\nu(1+q)}\ln\frac{[\nu^{**}+\nu_0 q-\nu(1+q)]\nu^{**}}{(\nu^{**}-\nu)(\nu^{**}+\nu_0 q)}+$$
$$\left.+(\nu^{**}+\nu_0 q)\ln^2\frac{[\nu^{**}+\nu_0 q-\nu(1+q)]\nu^{**}}{(\nu^{**}-\nu)(\nu^{**}+\nu_0 q)}\right\}$$

и при $\nu \geqslant \nu_0$

(21б) $$\sigma^2(\nu)=\mu\left\{(\nu+\nu_0 q)\ln^2\frac{\nu+\nu_0 q}{\nu}-2(\nu+\nu_0 q)\ln\frac{\nu+\nu_0 q}{\nu}\times\right.$$
$$\left.\times\ln\frac{\nu^{**}+\nu_0 q}{\nu^{**}}+(\nu^{**}+\nu_0 q)\ln^2\frac{\nu^{**}+\nu_0 q}{\nu^{**}}\right\}.$$

Введем в рассмотрение отношение сигнал–шум на выходе устройства обработки [7]

(22) $$z^2=S^2(\nu_0)/\langle N^2(\nu_0)\rangle=\mu\{\nu_0(1+q)\ln(1+q)-(\nu^{**}+\nu_0 q)\times$$
$$\times\ln\left[(\nu^{**}+\nu_0 q)/\nu^{**}\right]\}^2\{\nu_0(1+q)\ln^2(1+q)-2\nu_0(1+q)\times$$
$$\times\ln(1+q)\ln\left[(\nu^{**}+\nu_0 q)/\nu^{**}\right]+(\nu^{**}+\nu_0 q)\ln^2\left[(\nu^{**}+\nu_0 q)/\nu^{**}\right]\}^{-1},$$

которое далее предполагается достаточно большим, чтобы обеспечить высокую апостериорную точность оценок.

Утверждение 3. При $\mu\to\infty$ и $z\to\infty$ логарифм функционала отношения правдоподобия (18) *в малой окрестности точки ν_0 можно аппроксимировать гауссовским марковским диффузионным процессом. Для коэффициентов сноса k_1 и диффузии k_2 процесса $\widetilde{L}_1(\nu)$ при $|\nu-\nu_0|=\Delta\to 0$ и $z\to\infty$ справедливы асимптотические выражения*

(23) $$k_1=k_{01}+o(\Delta),\quad k_2=k_{02}+o(\Delta);$$

(24) $$k_{01}=\begin{cases} c_1, & \nu^*\leqslant\nu<\nu_0,\\ -c_2, & \nu_0\leqslant\nu\leqslant 1,\end{cases}\qquad k_{02}=\begin{cases} c_3, & \nu^*\leqslant\nu<\nu_0,\\ c_4, & \nu_0\leqslant\nu\leqslant 1;\end{cases}$$

(25) $$c_1=\mu\big[(1+q)\ln(1+q)-q\big],\quad c_2=\mu\big[q-\ln(1+q)\big],$$
$$c_3=\mu(1+q)\ln^2(1+q),\quad c_4=\mu\ln^2(1+q).$$

В условиях высокой апостериорной точности оценки максимального правдоподобия ν_m для расчета характеристик алгоритма максимального правдоподобия необходимо обеспечить высокую точность аппроксимации характеристик логарифма функционала отношения правдоподобия в малой окрестности истинного значения параметра ν_0. При этом точность аппроксимации характеристик выходной статистики за пределами этой окрестности не играет существенной роли [14]. В дальнейшем будем аппроксимировать коэффициенты сноса k_1 и диффузии k_2 (23) главными членами асимптотических разложений (24) на всем интервале возможных значений неизвестного момента разладки, положив $k_1\equiv k_{01}$ и $k_2\equiv k_{02}$.

Когда справедлива гипотеза H_1 (1), двумерная функция распределения $F(u,v,s)$ (9) запишется как

(26) $$F(u,v,s)=F(u,v,s\,|\,H_1)=F_1(u,v,s)=\mathrm{P}\left[\widetilde{L}_1(\nu)_{\nu^*\leqslant\nu<s}<u;\,\widetilde{L}_1(\nu)_{s\leqslant\nu\leqslant 1}<v\right].$$

Это распределение можно выразить через вспомогательную функцию вида

(27) $$\widetilde{F}_1(u,v,s;\nu_1,\nu_2)=\mathrm{P}\left[\widetilde{L}_1(\nu)_{\nu_1\leqslant\nu<s}<u;\,\widetilde{L}_1(\nu)_{s\leqslant\nu\leqslant\nu_2}<v\right],$$

где $\nu^* \leqslant \nu_1 < \nu_0 < \nu_2 \leqslant 1$. Действительно, сопоставляя (26) и (27), имеем

$$F_1(u,v,s) = \widetilde{F}_1(u,v,s;\nu^*,1). \tag{28}$$

Вспомогательную функцию (28) можно переписать как $\widetilde{F}_1(u,\ v,\ s;\ \nu_1,\ \nu_2) = \int\limits_{-\infty}^{v} W(x,\nu_2)dx$, где $W(x,\nu_2) = W(x,\nu=\nu_2)$, а $W(x,\nu)$ – решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [13] с коэффициентами (24). Задавая нулевые граничные условия: $W(x=u,\nu)=0$ при $\nu\in[\nu_1;s)$; $W(x=v,\nu)=0$ при $\nu\in[s;\nu_2]$; $W(x=-\infty,\nu)=0$ при $\nu\in[\nu_1;\nu_2]$, решая уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова методом отражения с переменой знака [13], получим при $s<\nu_0$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{F}_1(u,v,s;\nu_1,\nu_2) = \\
&= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{W_1(u-\xi)\chi(\xi_2)}{2\pi c_3\sqrt{(\nu_0-s)(s-\nu_1)}}\left[1-\exp\left(-\frac{2\xi_1\xi_2}{c_3(\nu_0-s)}\right)\right]\times\\
&\times\exp\left[\frac{c_1(\xi-u+v-\xi_1)}{c_3}-\frac{c_1^2(s-\nu_1)}{2c_3}-\frac{[c_1(\nu_0-s)-\xi_1+\xi_2]^2}{2c_3(\nu_0-s)}\right]\times\\
&\times\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-u+v-\xi_1)^2}{2c_3(s-\nu_1)}\right]-\exp\left[-\frac{(\xi+u-v+\xi_1)^2}{2c_3(s-\nu_1)}\right]\right\}d\xi d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned} \tag{29а}$$

и при $s\geqslant\nu_0$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{F}_1(u,v,s;\nu_1,\nu_2) = \\
&= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{W_1(u-\xi)\chi(\xi_2)}{2\pi\sqrt{c_3c_4(s-\nu_0)(\nu_0-\nu_1)}}\exp\left[\frac{c_1(\xi-\xi_1)}{c_3}-\frac{c_1^2(\nu_0-\nu_1)}{2c_3}\right]\times\\
&\times\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-\xi_1)^2}{2c_3(\nu_0-\nu_1)}\right]-\exp\left[-\frac{(\xi+\xi_1)^2}{2c_3(\nu_0-\nu_1)}\right]\right\}\times\\
&\times\left\{\exp\left[-\frac{(\xi_2+u-v-\xi_1)^2}{2c_4(s-\nu_0)}\right]-\exp\left[-\frac{(\xi_2+u-v+\xi_1)^2}{2c_4(s-\nu_0)}\right]\right\}\times\\
&\times\exp\left[\frac{c_2(\xi_2+u-v-\xi_1)}{c_4}-\frac{c_2^2(s-\nu_0)}{2c_4}\right]d\xi d\xi_1 d\xi_2.
\end{aligned} \tag{29б}$$

Здесь обозначено

$$\chi(\xi) = \Phi\left[\frac{c_2(\nu_2-g)+\xi}{\sqrt{c_4(\nu_2-g)}}\right]-\exp\left(-\frac{2c_2\xi}{c_4}\right)\Phi\left[\frac{c_2(\nu_2-g)-\xi}{\sqrt{c_4(\nu_2-g)}}\right],$$

где $g=\max(\nu_0,s)$,

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-t^2/2\right)dt/\sqrt{2\pi} \tag{30}$$

– интеграл вероятности [13], $W_1(x)$ – начальная плотность вероятности, т.е. плотность вероятности случайной величины $\widetilde{L}_1(\nu_1)$ (19).

Обоснование утверждения 1. Положим, что верна гипотеза H_0. Тогда в соответствии с определением и свойствами пуассоновского потока, например [9], находим

$$(\text{П}.1) \qquad \langle \Xi_\nu \rangle = \langle \Xi_\nu^2 \rangle - \langle \Xi_\nu \rangle^2 = \mu\nu, \quad \langle \Xi_{\nu^{**}} \rangle = \langle \Xi_{\nu^{**}}^2 \rangle - \langle \Xi_{\nu^{**}} \rangle^2 = \mu\nu^{**}.$$

Подставляя (П.1) в (10), (11), представим случайный поток Ξ_θ и случайную величину Ξ_T (8) в виде

$$(\text{П}.2) \qquad \Xi_\theta = \mu\big[\varepsilon y(\nu)\sqrt{\nu} + \nu\big], \quad \Xi_T = \mu\big[\varepsilon x\sqrt{\nu^{**}} + \nu^{**}\big].$$

Подставляя далее (П.2) в (5), перейдем к безразмерному параметру ν. С учетом введенных обозначений преобразуем выходную статистику (5) к виду

$$(\text{П}.3) \qquad \widetilde{L}_0(\nu) = \widetilde{L}_0(\nu,\varepsilon) = \mu\left\{ \left(\varepsilon y(\nu)\sqrt{\nu} + \nu\right) \ln \frac{(\varepsilon y(\nu) + \sqrt{\nu})\sqrt{\nu^{**}}}{(\varepsilon x + \sqrt{\nu^{**}})\sqrt{\nu}} + \right.$$
$$\left. + \left[\varepsilon\left(x\sqrt{\nu^{**}} - y(\nu)\sqrt{\nu}\right) + \nu^{**} - \nu\right] \ln \frac{[\varepsilon(x\sqrt{\nu^{**}} - y(\nu)\sqrt{\nu}) + \nu^{**} - \nu]\sqrt{\nu^{**}}}{(\nu^{**} - \nu)(\varepsilon x + \sqrt{\nu^{**}})} \right\}.$$

Разложим (П.3) в ряд по степеням ε с удержанием первого ненулевого члена разложения, зависящего от реализации наблюдаемых данных

$$\widetilde{L}_0(\nu) = \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{\partial^2 \widetilde{L}_0(\nu,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right]_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon^2).$$

Отсюда получаем приближенное выражение (13) для логарифма функционала отношения правдоподобия.

Обоснование утверждения 2. Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$(\text{П}.4) \qquad \mathrm{P}_1(u) = \mathrm{P}\left[\widetilde{L}_0(\nu) < u \atop {\nu^* \leqslant \nu < \widetilde{\delta}}\right], \quad \mathrm{P}_2(v) = \mathrm{P}\left[\widetilde{L}_0(\nu) < v \atop {\widetilde{\delta} \leqslant \nu < 1}\right].$$

Для того, чтобы найти функции (П.4), сделаем в (13) аналогично [15] замену переменной $\eta = \ln[\nu/(\nu^{**} - \nu)]$, $\eta \in [\eta^*; \eta^{**}]$, где $\eta^* = \ln[\nu^*/(\nu^{**} - \nu^*)]$, $\eta^{**} = \ln[1/(\nu^{**} - 1)]$. Тогда функция корреляции в (14) примет вид

$$(\text{П}.5) \qquad K_0(\eta_1, \eta_2) = \exp(-|\Delta\eta|)/2, \quad \Delta\eta = \eta_1 - \eta_2.$$

Асимптотически точные (с увеличением μ, u, v) выражения для вероятностей $\mathrm{P}_1(u)$ и $\mathrm{P}_2(v)$ можно получить как частный случай более общей задачи, рассмотренной в [16]. Пусть $r(t)$, $t \in [T_1; T_2]$ – стационарный случайный процесс с одномерной плотностью вероятности

$$(\text{П}.6) \qquad W(r) = r^{\tau-1}\exp(-r)/\Gamma(\tau), \quad r \geqslant 0, \quad \tau > 0,$$

где $\Gamma(\tau)$ – гамма-функция. При этом коэффициент корреляции $R(\Delta)$ процесса $r(t)$ при $\Delta \to 0$ допускает представление

$$(\text{П}.7) \qquad R(\Delta) = 1 - \delta|\Delta| + o(\Delta), \quad \delta > 0.$$

На основании локально-марковских свойств процесса $r(t)$ в [16] найдено асимптотически точное выражение для функции распределения $F_r(h) = \mathrm{P}[\sup r(t) < h]$, $t \in [T_1; T_2]$, справедливое при больших, но конечных величинах интервала $[T_1; T_2]$ и порога h. Если положить $\tau = 1/2$, $\delta = 1$, то в этом случае плотность вероятности $W(r)$ (П.6) процесса $r(t)$ совпадает с плотностью вероятности $W_0(\widetilde{L}_0)$ (15) выходной статистики $\widetilde{L}_0(\eta)$. Кроме того, при малых значениях Δ и $\Delta\eta$ корреляционные функции (П.5), (П.7) асимптотически также совпадают. Следовательно, переходя к локально-марковскому процессу $\widetilde{L}_0(\eta)$, аналогично [12], можно получить аппроксимацию распределений (П.4) в виде

$$\mathrm{P}_1(u) \approx \begin{cases} \exp\left[-\overline{s}\sqrt{u/\pi}\exp(-u)\right], & u > 1/2, \\ 0, \quad u < 1/2, \end{cases}$$

$$\mathrm{P}_2(v) \approx \begin{cases} \exp\left[-\left(\ln\dfrac{\nu^{**}-\nu^*}{\nu^*(\nu^{**}-1)} - \overline{s}\right)\sqrt{v/\pi}\exp(-v)\right], & v > 1/2, \\ 0, \quad v < 1/2, \quad \overline{s} = \ln\left[\widetilde{s}/\left(\nu^{**}-\widetilde{s}\right)\right]. \end{cases} \tag{П.8}$$

Для случайного процесса с плотностью вероятности (П.6) и коэффициентом корреляции (П.7) в [17–20] показано, что поток “τ-выходов” [18–20] реализаций процесса за достаточно высокий уровень приближенно пуассоновский. На этом основании при достаточно больших значениях u и v, когда верны аппроксимации (П.8), можем приближенно записать

$$F_0(u, v, \widetilde{s}) = \mathrm{P}\left[\widetilde{L}_0(\nu)_{\nu^* \leqslant \nu < \widetilde{s}} < u; \widetilde{L}_0(\nu)_{\widetilde{s} \leqslant \nu \leqslant 1} < v\right] \approx \mathrm{P}_1(u)\mathrm{P}_2(v). \tag{П.9}$$

Подставляя (П.8) в (П.9), получаем приближенное выражение (17).

Обоснование утверждения 3. Покажем, аналогично [14], что при $\mu \to \infty$ и $z \to \infty$ логарифм ФОП (19) представляет собой асимптотически марковский процесс в малой окрестности точки ν_0.

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial W(r,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n [k_n(r,t) W(r,t)]}{\partial r^n} \tag{П.10}$$

справедливо для одномерной плотности вероятности $W(r,t)$ любого случайного процесса $r(t)$, для которого существуют коэффициенты $k_n(r,t)$ [13]. Коэффициенты $k_n(r,t)$ можно выразить через условные моменты процесса $r(t)$

$$k_n(r,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[r_\Delta - r\right]^n W\left(r_\Delta, t + \Delta t \,|\, r, t\right) dr_\Delta \right\}, \tag{П.11}$$

где $W(r_\Delta, t + \Delta t \,|\, r, t)$ – условная плотность вероятности $r_\Delta = r(t + \Delta t)$ при фиксированном значении $r = r(t)$. В силу асимптотически гауссовского характера процесса $\widetilde{L}_1(\nu)$ (19) при $\mu \gg 1$ условную плотность вероятности $\widetilde{L}_{1\Delta} = \widetilde{L}_1(\nu + \Delta\nu)$ при фиксированном значении $\widetilde{L}_1 = \widetilde{L}_1(\nu)$ можно записать в виде

$$W\left(\widetilde{L}_{1\Delta}, \nu + \Delta\nu \,|\, \widetilde{L}_1, \nu\right) = \exp\left\{-\left(\widetilde{L}_{1\Delta} - m\right)^2 / 2D\right\} / \sqrt{2\pi D}, \tag{П.12}$$

где $m = S(\nu + \Delta\nu) + \left[\widetilde{L}_1 - S(\nu)\right] K_1(\nu, \nu + \Delta\nu)/\sigma^2(\nu)$, $D = \sigma^2(\nu + \Delta\nu) - K_1^2(\nu, \nu +$ $+\Delta\nu)/\sigma^2(\nu)$.

Функции (П.11), (П.12) являются кусочно-дифференцируемыми на участках $\nu <$ $< \nu_0$ и $\nu \geqslant \nu_0$ интервала $[\nu^*; 1]$. Поэтому, аналогично [14], воспользуемся разложением в точке $\nu + 0$ этих функций для вычисления (П.11), и учитывая (П.12), получим для процесса (19)

$$
\text{(П.13)} \qquad
\begin{aligned}
k_1 &\equiv k_1\left(\widetilde{L}_1, \nu\right) = \left.\frac{dS(\nu_1)}{d\nu_1}\right|_{\nu_1 = \nu + 0} + \frac{\left[\widetilde{L}_1 - S(\nu)\right]}{\sigma^2(\nu)} \left.\frac{\partial K_1(\nu, \nu_1)}{\partial \nu_1}\right|_{\nu_1 = \nu + 0}, \\
k_2 &\equiv k_2\left(\widetilde{L}_1, \nu\right) = \left.\frac{d\sigma^2(\nu_1)}{d\nu_1}\right|_{\nu_1 = \nu + 0} - 2 \left.\frac{\partial K_1(\nu, \nu_1)}{\partial \nu_1}\right|_{\nu_1 = \nu + 0},
\end{aligned}
$$

$k_n \equiv 0$ при $n \geqslant 3$. Следовательно, процесс (19) является марковским диффузионным процессом в окрестности точки ν_0 [13]. Его распределение можно найти на основе решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (П.10) с коэффициентами сноса k_1 и диффузии k_2 (П.13).

Оценим относительную величину второго слагаемого в выражении для коэффициента сноса, переписав k_1 (П.13) в виде

$$
\text{(П.14)} \qquad k_1 = \left.\frac{dS(\nu_1)}{d\nu_1}\right|_{\nu_1 = \nu + 0} \left[1 + \varkappa(\nu)\right].
$$

Случайный асимптотически гауссовский процесс $\varkappa(\nu)$ имеет нулевое среднее значение и дисперсию

$$
\text{(П.15)} \qquad \langle \varkappa^2(\nu) \rangle = \frac{\sigma^2(\nu_0)}{z^2 \sigma^2(\nu)} \left[\frac{\partial \widehat{K}_1(\nu, \nu_1)}{\partial \nu_1}\right]^2_{\nu_1 = \nu + 0} \left[\frac{d\widehat{S}(\nu_1)}{d\nu_1}\right]^{-2}_{\nu_1 = \nu + 0},
$$

где $\widehat{K}_1(\nu, \nu_1) = K_1(\nu, \nu_1)/\sigma^2(\nu_0)$, $\widehat{S}(\nu_1) = S(\nu_1)/S(\nu_0)$ – нормированные корреляционная и сигнальная функции.

Из (П.15) следует, что в условиях высокой апостериорной точности, т.е. при $z \to \infty$, $\langle \varkappa^2(\nu) \rangle \to 0$, а сам случайный процесс $\varkappa(\nu) \to 0$ в среднеквадратическом, по крайней мере в малой окрестности точки ν_0. В частности, выражение (П.15) существенно упрощается при $q \ll 1$ и принимает вид

$$
\langle \varkappa^2(\nu) \rangle = \nu\nu_0(\nu^{**} - \nu)(\nu^{**} - \nu_0)/z^2\left[\nu^{**} \min(\nu, \nu_0) - \nu\nu_0\right]^2.
$$

Следовательно, при больших отношениях сигнал–шум (22) вторым слагаемым в выражении для k_1 (П.14) можно пренебречь.

Как отмечалось, например в [8], при $z \to \infty$ оценка максимального правдоподобия $\nu_m \to \nu_0$ в среднеквадратическом. Следовательно, при больших z (22) для расчета характеристик обнаружения и оценки неизвестного момента разладки достаточно исследовать поведение $\widetilde{L}_1(\nu)$ (19) в малой окрестности ν_0. Обозначив $\Delta = |\nu - \nu_0|$, при $\Delta \to 0$ и $z \to \infty$ из (20), (21), (П.13), (П.14) можем дифференцированием получить требуемые асимптотические выражения (23) для коэффициентов сноса k_1 и диффузии k_2 процесса $\widetilde{L}_1(\nu)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никифоров В. И.* Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. М.: Наука, 1983.

2. *Клигене Н., Телькснис Л.* Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов // АиТ. 1983. № 10. С. 5–56.
3. *Снеговой А. А., Умрихин Ю. Д.* О прогнозировании нестационарных пуассоновских потоков // АиТ. 1978. № 7. С. 44–52.
4. *Галун С. А., Трифонов А. П.* Обнаружение и оценка момента изменения интенсивности пуассоновского потока // АиТ. 1982. № 6. С. 95–105.
5. *Trifonov A. P., Buteiko V. K., Bokk G. O.* Efficiency of testing of the change in the Poisson flow intensity // Second IFAC Symposium on Stochastic Control. Vilnius, USSR, 1986. Preprints. Part II. P. 249–254.
6. *Жиглявский А. А., Красковский А. Е.* Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
7. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
8. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем: Пер. с англ. / Под ред. М. Бассвиль, А. Банвениста. М.: Мир, 1989.
9. *Большаков И. А., Ракошиц В. С.* Прикладная теория случайных потоков. М.: Сов. радио, 1978.
10. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.
11. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.
12. *Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
13. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
14. *Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфенов В. И.* Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1991.
15. *Вострикова Л. Ю.* Обнаружение “разладки” винеровского процесса // Теория вероятностей и ее применения. 1981. Т. 26. Вып. 2. С. 362–368.
16. *Трифонов А. П.* Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами // Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
17. *Питербарг В. И.* О работе Д. Пикандса “Вероятности пересечения для стационарного гауссовского процесса” // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 1972. № 5. С. 25–30.
18. *Pickands J.* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian process // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 145. Nov. P. 51–73.
19. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
20. *Qualls C., Watanabe H.* Asymptotic properties of Gaussian processes // Ann. Math. Statist. 1972. V. 3. No. 2. P. 580–596.

Поступила в редакцию 30.06.97