

182 C.57 182
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1999, N2

МОСКВА

Системы массового обслуживания

УДК 519.262.4

© 1999 г. Т. М. ОВЧИННИКОВА, канд. физ.-мат. наук,
А. П. ТРИФОНОВ, д-р техн. наук
(Воронежский государственный университет)

ОБНАРУЖЕНИЕ И ОЦЕНКА МОМЕНТА ИЗМЕНЕНИЯ НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА. II¹

На основе функций распределения абсолютных максимумов решающей статистики в отсутствие и при наличии изменения интенсивности пуассоновского потока, найденных в [1], получены асимптотические выражения для характеристик обнаружения момента изменения и оценки неизвестных параметров. Сравнение результатов численных расчетов и статистического моделирования на ЭВМ для конкретных значений параметров подтверждает работоспособность синтезированных алгоритмов и позволяет установить границы применимости найденных асимптотических формул для расчета характеристик обработки.

1. Введение

В [1] рассмотрен алгоритм максимального правдоподобия обработки пуассоновского потока $\Xi(t)$ со скачкообразным изменением неизвестной интенсивности, наблюдаемого на интервале $[0; T]$. При гипотезе H_0 (в отсутствие разладки) интенсивность потока имеет вид $\lambda_0 = a_0 > 0$. При гипотезе H_1 , т.е. при наличии разладки, интенсивность потока

$$(1) \quad \lambda_1(t, \theta_0) = b_0 s(t, \theta_0) + a_0, \quad s(t, \theta_0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \theta_0, \\ 0, & t < 0, \quad t > \theta_0, \end{cases}$$
$$\theta_0 \in [T_1; T_2], \quad 0 < T_1 < T_2 < T.$$

Для случая, когда среднее число зарегистрированных точек потока достаточно велико, т.е. выполняется условие

$$(2) \quad \mu = a_0 T_2 \gg 1,$$

получены асимптотически точные выражения для двумерных функций распределения $F_0(u, v, s)$ (1.17) и $F_1(u, v, s)$ (1.28), (1.29, а, б) абсолютных максимумов логарифма функционала отношения правдоподобия при гипотезах H_0 и H_1 , соответственно. Здесь и далее для ссылок на формулы из [1] – первой части статьи – используется двойная нумерация.

Воспользуемся найденными выражениями для расчета характеристик обнаружения и совместной оценки максимального правдоподобия неизвестных параметров a_0 , b_0 , θ_0 потока $\Xi(t)$.

¹Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №98-01-00090.

2. Характеристики обнаружения разладки пуассоновского потока

Если верна гипотеза H_0 , то вероятность ошибки первого рода (ложной тревоги) можно записать как [2-4]

$$(3) \quad P_{10} = P \left[\sup_{\nu} \tilde{L}_0(\nu) > h \mid H_0 \right] = 1 - F_0(h), \quad \nu \in [\nu^*; 1],$$

где $\tilde{L}_0(\nu)$ – логарифм функционала отношения правдоподобия в отсутствие разладки потока (1.13), $\nu = \theta/T_2$ – безразмерный параметр, $\nu^* = T_1/T_2$, $F_0(h) = F_0(u, v, s)$ при $u = v = h$ – функция распределения абсолютного максимума $\tilde{L}_0(\nu)$, найденная в [1], $s \in [\nu^*; 1]$. Используя (3) и (1.17), можем записать приближенное выражение для вероятности ложной тревоги

$$(4) \quad P_{10} \approx \begin{cases} 1 - [\nu^*(\nu^{**} - 1)/(\nu^{**} - \nu^*)]^{\exp(-h)\sqrt{h/\pi}}, & h > 1/2, \\ 1, & h < 1/2, \end{cases} \quad \nu^{**} = T/T_2.$$

Точность этой аппроксимации возрастает с увеличением μ и порога h . В рассматриваемом приближении $P_{10}(h)$ не зависит от параметра μ (2) и интенсивности потока a_0 , так что обнаружитель является асимптотически инвариантным к значениям этих параметров [5].

На рис. 1 сплошной линией нанесена зависимость $P_{10}(h)$ (4), рассчитанная при $\nu^* = 0,1$; $\nu^{**} = 1,1$. Здесь же для сравнения штриховой линией представлена аналогичная зависимость, полученная в [2] для случая обнаружения разладки потока $\Xi(t)$ с неизвестной величиной скачка интенсивности. Штрихпунктирными линиями показаны приближенные зависимости, найденные в [3] для $P_{10}(h)$ при обнаружении разладки потока с априори известными значениями интенсивностей до и после момента разладки. Штрихпунктирные кривые рассчитаны при $\mu = 100$ и обозначены 1 – для $q = 0,1$; 2 – $q = 1$; 3 – $q = 3$. Как следует из рис. 1, для сохранения требуемого уровня значимости $P_{10} = \alpha$ в случае незнания интенсивности потока необходимо значительное увеличение порогового уровня h_α (1.3).

Если же верна гипотеза H_1 , то вероятность ошибки второго рода (пропуска разладки) представима в виде [5, 6]

$$(5) \quad P_{01} = P \left[\sup_{\nu} \tilde{L}_1(\nu) < h_\alpha \mid H_1 \right], \quad \nu \in [\nu^*; 1].$$

Утверждение 1. Если $\nu^* > \nu_{\min} = \nu_0 - \sigma^2(\nu_0)/\{c_3 - 2c_1 \ln[(\nu^{**} + \nu_0 q)/\nu^{**}]\}$, то выражение для вероятности ошибки второго рода (5) запишется как

$$(6, a) \quad P_{10} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + c_3(\nu_0 - \nu^*))}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{[c_1(\nu_0 - \nu^*) + \xi - m_1 - h_\alpha]^2}{2(\sigma_1^2 + c_3(\nu_0 - \nu^*))} \right] \times \\ \times \left\{ \Phi \left[\frac{[c_1(\nu_0 - \nu^*) + \xi]\sigma_1^2 + (h_\alpha - m_1)c_3(\nu_0 - \nu^*)}{\sqrt{\sigma_1^2 c_3(\nu_0 - \nu^*)}[\sigma_1^2 + c_3(\nu_0 - \nu^*)]} \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[-2\frac{c_1\sigma_1^2 - (h_\alpha - m_1)c_3}{[\sigma_1^2 + c_3(\nu_0 - \nu^*)]} \xi \right] \times \right. \\ \left. \times \Phi \left[\frac{[c_1(\nu_0 - \nu^*) - \xi]\sigma_1^2 + (h_\alpha - m_1)c_3(\nu_0 - \nu^*)}{\sqrt{\sigma_1^2 c_3(\nu_0 - \nu^*)}[\sigma_1^2 + c_3(\nu_0 - \nu^*)]} \right] \right\} \Psi(\xi) d\xi,$$

где

$$\Psi(\xi) = \Phi \left[\frac{c_2(\tilde{\nu}^{**} - \nu_0) + \xi}{\sqrt{c_4(\tilde{\nu}^{**} - \nu_0)}} \right] - \exp \left(-2\xi \frac{c_2}{c_4} \right) \Phi \left[\frac{c_2(\tilde{\nu}^{**} - \nu_0) - \xi}{\sqrt{c_4(\tilde{\nu}^{**} - \nu_0)}} \right],$$

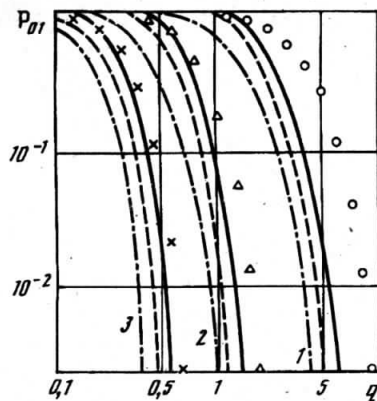
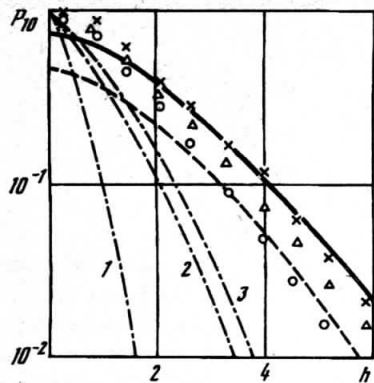


Рис. 1. Вероятность ошибки первого рода

Рис. 2. Вероятность ошибки второго рода

а $\Phi(x)$ – интеграл вероятности (1.30) [4, 6]. Если же $\nu^* \leq \nu_{\min}$, то вероятность ошибки второго рода

$$(6,6) \quad P_{01} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi c_3(\nu_0 - \nu_{\min})}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{[c_1(\nu_0 - \nu_{\min}) + \xi - m_1^* - h_\alpha]^2}{2c_3(\nu_0 - \nu_{\min})} \right] \times \\ \times \left[1 - \exp \left(-\frac{2\xi(h_\alpha - m_1^*)}{c_3(\nu_0 - \nu_{\min})} \right) \right] \Psi(\xi) d\xi.$$

В (6,а,б) обозначено: $m_1 = S(\nu^*)$, $\sigma_1^2 = \sigma^2(\nu^*)$, $m_1^* = S(\nu_0) - \sigma^2(\nu_0)c_1/\{c_3 - 2c_1 \ln[(\nu^{**} + \nu_0 q)/\nu^{**}]\}$, $\tilde{\nu}^{**} = \min \{1, \nu_0 + \sigma^2(\nu_0)/[c_4 + 2c_2 \ln[(\nu^{**} + \nu_0 q)/\nu^{**}]] - 2q(1 + q)\}$, $S(\nu)$ и $\sigma^2(\nu)$ определяются из (1.20), (1.21,а,б), а коэффициенты c_i , $i = 1, 4$ – из (1.25). Точность полученных выражений (6,а,б) возрастает с увеличением μ (2) и z (1.22).

На рис. 2 сплошными линиями нанесены зависимости вероятности ошибки второго рода $P_{01}(q)$, рассчитанные по формулам (4), (6,а,б) в соответствии с критерием Неймана–Пирсона [4, 5] при уровне значимости $\alpha = 10^{-2}$; $\nu^* = 0,1$; $\nu^{**} = 1,1$. Штриховыми линиями представлены результаты, полученные в [2] для обнаружения разладки с неизвестной величиной скачка интенсивности. Штрихпунктиром показаны зависимости $P_{01}(q)$, найденные в [3] при тех же условиях для случая обнаружения разладки априори известной интенсивности потока. Кривые 1 рассчитаны при $\mu = 10$, 2 – $\mu = 100$, 3 – $\mu = 500$.

3. Характеристики совместных оценок параметров потока

Если верна гипотеза H_0 , оценка максимального правдоподобия интенсивности потока a_{0m} определяется согласно (1.8). При этом оценка оказывается несмещенной, а ее рассеяние запишется как

$$(7) \quad V(a_{0m} | a_0) = \langle (a_{0m} - a_0)^2 \rangle = a_0^2 / \mu \nu^{**}.$$

Положим теперь, что верна гипотеза H_1 , т.е. с вероятностью 1 происходит разладка потока $\Xi(t)$. Тогда оценка максимального правдоподобия момента разладки представляет собой положение ν_m абсолютного максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (1.19) [1, 7]. Плотность вероятности, а также моменты случайной величины ν_m можно найти с помощью метода локально-марковской аппроксимации [2, 3, 7, 8].

Утверждение 2. В условиях высокой апостериорной точности для смеще-

ния и рассеяния нормированной оценки максимального правдоподобия справедливы асимптотические выражения

$$(8) \quad d(\nu_m | \nu_0) = \langle \nu_m - \nu_0 \rangle = [R(R+2)/z_2^2 - (2R+1)/z_1^2]/2(1+R)^2,$$

$$(9) \quad V(\nu_m | \nu_0) = \langle (\nu_m - \nu_0)^2 \rangle = \frac{(2+6R+5R^2)/z_2^4 + (2R^2+6R+5)R/z_1^4}{2(1+R)^3},$$

где

$$(10) \quad z_i^2 = c_i^2/c_{i+2}, \quad i = 1, 2,$$

$R = c_2 c_3 / c_1 c_4$, а коэффициенты c_i , $i = \overline{1, 4}$ определяются из (1.25). Точность выражений (8), (9) возрастает с увеличением μ (2), z^2 (1.22) или z_i^2 (10).

Сопоставляя (8), (9) с результатами, полученными в [2, 3], можно сделать вывод о том, что при больших отношениях сигнал-шум z и выполнении (2) отсутствие априорной информации об интенсивности пуассоновского потока асимптотически не влияет на характеристики оценки максимального правдоподобия момента ее изменения.

При конечном интервале возможных значений параметра $\nu_0 \in [\nu^*; 1]$, рассеяние оценки момента разладки должно быть ограничено сверху, а асимптотическое значение рассеяния (9) с уменьшением q неограниченно возрастает. Уточним поведение $V(\nu_m | \nu_0)$ в области малых q .

Утверждение 3. При $q \rightarrow 0$ для смещения и рассеяния нормированной оценки максимального правдоподобия ν_m справедливы асимптотические выражения

$$(11) \quad \begin{aligned} d_0(\nu_m | \nu_0) &= \langle (\nu_m - \nu_0) \rangle = \\ &= \nu^{**} \ln [(\nu^{**} - \nu^*)/(\nu^{**} - 1)] \ln^{-1} [(\nu^{**} - \nu^*)/(\nu^{**} - 1)\nu^*] - \nu_0, \\ V_0(\nu_m | \nu_0) &= \langle (\nu_m - \nu_0)^2 \rangle = \\ &= \nu^{**} \left[\nu^* - 1 - (\nu^{**} - 2\nu_0) \ln \frac{\nu^{**} - 1}{\nu^{**} - \nu^*} \right] \ln^{-1} \frac{\nu^{**} - \nu^*}{\nu^*(\nu^{**} - 1)} + \nu_0^2. \end{aligned}$$

Таким образом, возвращаясь к исходной переменной θ , с учетом априорных ограничений можем записать рассеяние оценки θ_m момента разладки потока θ_0 как

$$(12) \quad V(\theta_m | \theta_0) = T_2^2 \min \{ V_0(\nu_m | \nu_0), V(\nu_m | \nu_0) \},$$

где $V_0(\nu_m | \nu_0)$ определяется из (11), а $V(\nu_m | \nu_0)$ — из (9).

Зависимости относительного рассеяния оценки максимального правдоподобия момента разладки $\chi_\theta = V(\theta_m | \theta_0)/T_2^2$ от отношения сигнал-фон $q = b_0/a_0$, рассчитанные по формуле (12) при $\nu_0 = 0,5$; $\nu^* = 0,1$; $\nu^{**} = 1,1$ представлены на рис. 3. Кривая 1 соответствует значению $\mu = 10$, 2 — $\mu = 100$.

Найденные в [1] двумерные функции распределения $F_1(u, v, s)$ позволяют выполнить анализ синтезированных алгоритмов совместных оценок интенсивности потока до и после момента ее изменения, а также получить асимптотически точные формулы для характеристик оценок максимального правдоподобия a_m и b_m (1.7) интенсивности. Однако эти формулы оказываются весьма громоздкими и неудобными для конкретных расчетов. Тем не менее, анализ этих формул показывает, что для широкого диапазона значений параметров q , μ , ν^* и ν^{**} характеристики оценок интенсивности удовлетворительно аппроксимируются выражениями для смещений и рассеяний оценок a_m и b_m при априори известном моменте изменения интенсивности [7, 9]

$$(13) \quad \begin{aligned} d_0(a_m) &= \langle (a_m - a_0) \rangle = d_0(b_m) = \langle (b_m - b_0) \rangle = 0, \\ V_0(a_m) &= \langle (a_m - a_0)^2 \rangle = a_0^2/\mu(\nu^{**} - \nu_0), \\ V_0(b_m) &= \langle (b_m - b_0)^2 \rangle = b_0^2[\nu^{**} + q(\nu^{**} - \nu_0)]/\mu q^2 \nu_0(\nu^{**} - \nu_0). \end{aligned}$$

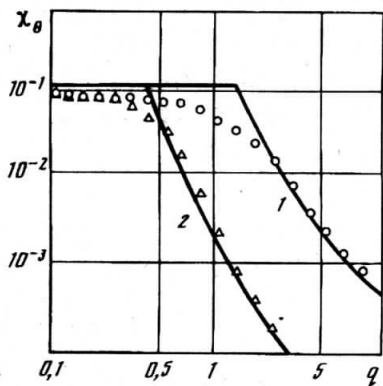


Рис. 3. Рассеяние оценки момента разладки

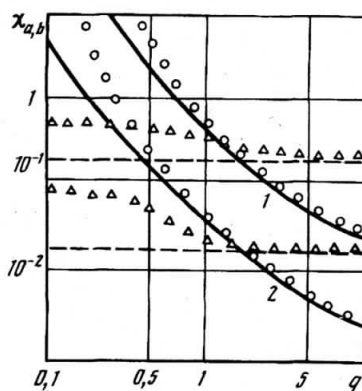


Рис. 4. Рассеяния оценок интенсивностей

Зависимости относительных рассеяний оценок интенсивности $\chi_a(q) = V_0(a_m)/a_0^2$ и $\chi_b(q) = V_0(b_m)/b_0^2$, рассчитанные по формулам (13) при $\nu^* = 0,1$; $\nu^{**} = 1,1$ приведены на рис. 4 для значений $\mu = 10$ (кривые 1) и $\mu = 100$ (кривые 2). Сплошными линиями показаны зависимости $\chi_b(q)$, штриховыми – $\chi_a(q)$.

4. Результаты статистического моделирования

Расчет характеристик обнаружения и оценки разладки неизвестной интенсивности пуассоновского потока проводился на основе формул, которые получены с использованием различного рода приближений. Оценить их точность аналитическими методами не удастся. Известно лишь, что погрешности этих формул уменьшается с увеличением априорного интервала анализа, отношения сигнал-шум z , параметра μ и величины порога обнаружения h . Поэтому возможность использования найденных формул при конечных значениях этих параметров определялась экспериментально. Эксперимент заключался в статистическом моделировании на ЭВМ алгоритмов обнаружения момента разладки неизвестной интенсивности пуассоновского потока $\Xi(t)$ и совместной оценки параметров a , b и θ потока, синтезированных по методу максимального правдоподобия в [1]. Реализации $\Xi(t)$ с интенсивностью, соответствующей одной из гипотез H_0 или H_1 , формировались в виде ступенчатой функции с единичными скачками. Согласно [10], последовательность интервалов между скачками потока можно получить с помощью датчика квазислучайных чисел [11] методом обратных функций из последовательности независимых, равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$ квазислучайных чисел. По сформированной таким образом реализации $\Xi(t)$ в каждой точке ее скачкообразного изменения вычислялась реализация статистики $L(\theta)$ (1.5) для всех значений $\theta \in [T_1; T_2]$. Затем определялись величина и положение наибольшего максимума $L(\theta)$. Сравнение величины наибольшего максимума реализаций $L(\theta)$ с порогом h позволило определить относительные частоты появления ошибок первого и второго рода при гипотезах H_0 и H_1 , соответственно.

Когда верна гипотеза H_1 , оценка ν_{mi} нормированного момента разладки находилась как положение наибольшего максимума i -й реализации статистики $L(\theta)$. Одновременно, согласно (1.7), определялись оценки a_{mi} и b_{mi} интенсивностей потока $\Xi(t)$. По N реализациям статистики $L(\theta)$ рассчитывались выборочные нормированные рассеяния оценок

$$\kappa_\nu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\nu_{mi} - \nu_0)^2, \quad \kappa_a = \frac{1}{\mu^2 N} \sum_{i=1}^N (a_{mi} - a_0)^2,$$

$$\kappa_b = \frac{1}{\mu^2 q^2 N} \sum_{i=1}^N (b_{mi} - b_0)^2.$$

Моделирование алгоритмов обнаружения и оценки выполнялось для значений $\nu^* = 0,05; 0,1; 0,2$, $\nu^{**} = 1,05; 1,1; 1,2$ и $q = 0,01 - 100$. Истинное положение момента разладки выбиралось в середине априорного интервала анализа, т.е. $\theta_0 = T_2/2$ ($\nu_0 = 0,5$). На рис. 1-4 из-за ограниченного объема статьи приведены экспериментальные результаты только для $\nu^* = 0,1$ и $\nu^{**} = 1,1$. Экспериментальные значения вероятностей ошибок первого и второго рода нанесены на рис. 1, 2 и обозначены: $\circ$ - для $\mu = 10$, Δ - для $\mu = 100$, $\times$ - для $\mu = 500$. Экспериментальные значения вероятности ошибки первого рода P_{10} получены в результате обработки $N = 5 \cdot 10^3$ реализаций потока $\Xi(t)$ с интенсивностью $\lambda_0 = a_0$. Значения вероятности ошибки второго рода P_{01} получены в результате обработки $N = 2 \cdot 10^3$ реализаций потока с интенсивностью (1) для значения порога, определяемого из (4) в соответствии с критерием Неймана-Пирсона при уровне значимости $\alpha = 10^{-2}$. Как следует из рис. 1, 2, экспериментальные значения вероятностей ошибок первого и второго рода удовлетворительно аппроксимируются теоретическими зависимостями, рассчитанными по (4), (6,а,б) при $\mu \geq 100$.

Экспериментальные значения нормированного рассеяния оценки максимального правдоподобия момента разладки, полученные в результате обработки $N = 10^3$ реализаций потока с интенсивностью (1), нанесены на рис. 3 в тех же обозначениях, как и на рис. 1, 2. Как следует из рис. 3 рассеяние оценки, рассчитанное по формуле (12), при $\mu \geq 10$ удовлетворительно согласуется с экспериментальными зависимостями, когда отношение сигнал-шум (1.22) $z \lesssim 0,7 - 0,8$ или $z \gtrsim 1,3 - 1,5$.

На рис. 4 в тех же обозначениях приведены экспериментальные значения нормированных рассеяний оценок интенсивностей a_m и b_m (1.7), полученные в результате обработки $N = 10^3$ реализаций потока $\Xi(t)$ с интенсивностью (1). Сопоставление экспериментальных и теоретических зависимостей на рис. 4 показывает удовлетворительную точность формул (13) при $\mu \geq 10$ и $z \gtrsim 1,3 - 1,5$.

Для реализованного объема экспериментальной выборки относительная погрешность экспериментальных данных с доверительной вероятностью 0,9 не превышает 15-25% [12].

5. Заключение

Теоретическое и экспериментальное исследование алгоритма обнаружения разладки пуассоновского потока позволяют оценить влияние незнания интенсивности потока на эффективность обнаружения. Сопоставление полученных здесь результатов с известными [2, 3] показывает, что незнание интенсивности потока при обнаружении разладки приводит к заметному увеличению вероятности ошибки первого рода. Это требует увеличения порогового отношения сигнал-фон q в 2-3 раза.

Анализ совместных оценок максимального правдоподобия параметров a , b , θ потока $\Xi(t)$ показал, что при отношении сигнал-шум $z \gtrsim 1,3 - 1,5$ отсутствие априорной информации об интенсивности потока не влияет на точность оценки момента разладки. В тех же условиях отсутствие априорной информации о моменте разладки не влияет на точность оценки интенсивностей потока a и b .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обоснование утверждения 1. Как отмечается в [1, 4] для расчета вероятности ошибки второго рода при больших отношениях сигнал-шум необходимо

обеспечить высокую точность аппроксимации статистических характеристик логарифма функционала отношения правдоподобия в малой окрестности истинного значения θ_0 неизвестного параметра. Ухудшение точности аппроксимации за пределами этой окрестности не играет существенной роли. Производные справа и слева математического ожидания $S(\nu)$ и корреляционной функции $K_1(\nu_1, \nu_2)$ (1.20) логарифма функционала отношения правдоподобия (1.19) непрерывны при всех $\nu_1, \nu_2, \nu \in [\nu^*; 1]$, исключая точку разрыва первого рода $\nu_0 = \theta_0/T_2$. Обозначим $\Delta = \max\{|\nu_1 - \nu_2|, |\nu_1 - \nu_0|, |\nu_2 - \nu_0|\}$. Полагая $\Delta \rightarrow 0$, разложим функции $S(\nu)$ и $K_1(\nu_1, \nu_2)$ в степенной ряд по Δ справа и слева от точки ν_0 и отбросим члены порядка малости Δ^2 и менее. В результате для математического ожидания $S(\nu)$ и дисперсии $\sigma^2(\nu) = K_1(\nu, \nu)$ логарифма функционала отношения правдоподобия получим аппроксимации

$$(П.1) \quad \begin{aligned} S(\nu) &= S(\nu_0) + (\nu - \nu_0) \begin{cases} c_1, & \nu < \nu_0, \\ -c_2, & \nu \geq \nu_0, \end{cases} \\ \sigma^2(\nu) &= \sigma^2(\nu_0) + (\nu - \nu_0) \begin{cases} R_1, & \nu < \nu_0, \\ -R_2, & \nu \geq \nu_0, \end{cases} \end{aligned}$$

где $c_i, i = \overline{1, 4}$ определены в (1.25). Очевидно, что аппроксимации (П.1) можно использовать лишь при тех значениях ν , при которых дисперсия неотрицательна, т.е. когда $\nu_{\min} \leq \nu \leq \nu_{\max}$, где $\nu_{\min} = \nu_0 - \sigma^2(\nu_0)/R_1, \nu_{\max} = \nu_0 + \sigma^2(\nu_0)/R_2$.

Поэтому, когда верна гипотеза H_1 , вероятность ошибки второго рода P_{01} запишем в виде (5), где теперь $\nu \in [\tilde{\nu}^*; \tilde{\nu}^{**}]$, а $\tilde{\nu}^* = \max(\nu^*, \nu_{\min}), \tilde{\nu}^{**} = \min(1, \nu_{\max})$.

Воспользовавшись двумерной функцией распределения $\tilde{F}_1 = (u, v, s; \nu_1, \nu_2)$ (1.29), с учетом аппроксимации (П.1) получаем для P_{01} выражение

$$(П.2) \quad P_{01} = \tilde{F}_1(h_\alpha, h_\alpha, \tilde{\nu}^{**}; \tilde{\nu}^*, \tilde{\nu}^{**}).$$

Однако чтобы по этой формуле рассчитать вероятность ошибки второго рода, надо задать явный вид начальной плотности вероятности логарифма функционала отношения правдоподобия $\tilde{L}_1(\nu)$ (1.19). Если $\nu^* > \nu_{\min}$, то начальная гауссовская плотность вероятности имеет математическое ожидание $m_1 = S(\nu^*)$ (1.20) и дисперсию $\sigma_1^2 = \sigma^2(\nu^*)$ (1.21, а), так что

$$W_1(x) = \exp[-(x - m_1)^2 / 2\sigma_1^2] / \sqrt{2\pi\sigma_1^2}.$$

Если же $\nu^* < \nu_{\min}$, то начальная плотность вероятности вырождается в дельта-функцию, расположенную в точке $m_1^* = S(\nu_0) - \sigma^2(\nu_0)c_1/R_1$, т.е. $W_1(x) = \delta(x - m_1^*)$. Подставляя найденные начальные плотности вероятности в (1.29, а, б) и затем (1.29) в (П.2), получаем (6, а) при $\nu^* > \nu_{\min}$ и (6, б) при $\nu^* \leq \nu_{\min}$.

Обоснование утверждения 2. Плотность вероятности случайной величины ν_m можно выразить через двумерную функцию распределения $F_1(u, v, s)$ (1.28) как [2, 7, 8]

$$(П.3) \quad W(\nu_m) = \int_0^\infty [\partial^2 F_1(u, v, s) / \partial u \partial s]_{v=u, s=\nu_m} du.$$

Подставляя полученные в [1] выражения для функций распределения (1.28), (1.29, а, б) и выполняя в (П.3) соответствующие преобразования, получаем при $\nu_m < \nu_0$

$$(П.4, а) \quad W(\nu_m) = \int_0^\infty \frac{\xi F_1(\xi)}{\pi c_3^2 [(\nu_0 - \nu_m)(\nu_m - \tilde{\nu}^*)]^{3/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2c_3(\nu_m - \tilde{\nu}^*)} + \frac{c_1 \xi}{c_3} \right] d\xi \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \Psi(\xi_1) \xi_1 \exp \left[-\frac{\xi_1^2}{2c_3(\nu_0 - \nu_m)} - \frac{c_1 \xi_1}{c_3} - \frac{c_1^2(\nu_m - \tilde{\nu}^*)}{2c_3} \right] d\xi_1$$

и при $\nu_m \geq \nu_0$

$$\begin{aligned} (\text{П.4,б}) \quad W(\nu_m) = & \int_0^{\infty} \frac{2c_2 F_1(\xi)}{c_4 \sqrt{2\pi} [c_4(\nu_m - \nu_0) + c_3(\nu_0 - \tilde{\nu}^*)]^{3/2}} \times \\ & \times \exp \left[-\frac{[\xi - c_1(\nu_0 - \tilde{\nu}^*) - c_2(\nu_m - \nu_0)]^2}{2[c_3(\nu_0 - \tilde{\nu}^*) + c_4(\nu_m - \nu_0)]} \right] \times \\ & \times \left\{ [\xi c_4 - (\nu_0 - \tilde{\nu}^*)(c_1 c_4 + c_2 c_3)] \times \right. \\ & \times \Phi \left[\frac{[\xi c_4 - (\nu_0 - \tilde{\nu}^*)(c_1 c_4 + c_2 c_3)] \sqrt{\nu_m - \nu_0}}{\sqrt{c_3 c_4 (\nu_0 - \tilde{\nu}^*) [c_3(\nu_0 - \tilde{\nu}^*) + c_4(\nu_m - \nu_0)]}} \right] + \\ & + [\xi c_4 + (\nu_0 - \tilde{\nu}^*)(c_1 c_4 + c_2 c_3)] \times \\ & \times \Phi \left[-\frac{[\xi c_4 + (\nu_0 - \tilde{\nu}^*)(c_1 c_4 + c_2 c_3)] \sqrt{\nu_m - \nu_0}}{\sqrt{c_3 c_4 (\nu_0 - \tilde{\nu}^*) [c_3(\nu_0 - \tilde{\nu}^*) + c_4(\nu_m - \nu_0)]}} \right] \times \\ & \times \exp \left[2\xi \frac{(c_1 c_4 + c_2 c_3)(\nu_m - \nu_0)}{c_3 [c_3(\nu_0 - \tilde{\nu}^*) + c_4(\nu_m - \nu_0)]} \right] \left\{ \Phi \left[\frac{c_2}{\sqrt{c_4}} \sqrt{\tilde{\nu}^{**} - \nu_m} \right] + \right. \\ & \left. + \sqrt{c_4} \exp \left[-c_2^2 (\tilde{\nu}^{**} - \nu_m) / 2c_4 \right] / c_2 \sqrt{2\pi (\tilde{\nu}^{**} - \nu_m)} \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Здесь

$$F_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} W_1(x) dx.$$

Положим, что для (10) выполняются условия

$$(\text{П.5}) \quad z_i^2 \gg 1, \quad i = 1, 2,$$

эквивалентные условию (2) высокой апостериорной точности. Введем новую нормированную переменную

$$(\text{П.6}) \quad \kappa = \begin{cases} z_1^2(\nu_m - \nu_0), & \tilde{\nu}^* \leq \nu_m < \nu_0, \\ z_2^2(\nu_m - \nu_0), & \nu_0 \leq \nu_m \leq \tilde{\nu}^{**}, \end{cases}$$

которая принимает значения из интервала $[-z_1^2(\nu_0 - \tilde{\nu}^*); z_2^2(\tilde{\nu}^{**} - \nu_0)]$. Перейдем в (П.4,а,б) от переменной ν_m к переменной κ (П.6) и найдем предел плотности вероятности нормированной ошибки оценки при $z_i \rightarrow \infty$. Получаем

$$\begin{aligned} (\text{П.7}) \quad W(\kappa) = & 2 \left\{ \Phi \left[\sqrt{|\kappa|} \right] - 1 + \right. \\ & \left. + (1 + 2G) \exp \left[2G(1 + G)|\kappa| \right] \left[1 - \Phi \left[(1 + 2G)\sqrt{|\kappa|} \right] \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $G = 1/R$ при $-\infty < \kappa < 0$ и $G = R$ при $0 \leq \kappa < \infty$, $R = c_2 c_3 / c_1 c_4$. Используя предельную плотность вероятности нормированной ошибки оценки (П.7),

найдем два первых ее момента. Возвращаясь затем согласно (П.6) к ошибке $\nu_m - \nu_0$ оценки ν_m , получаем асимптотические выражения для смещения и рассеяния оценки максимального правдоподобия (8) и (9).

Обоснование утверждения 3. Разложим $\tilde{L}_1(\nu)$ (1.18) в двумерный ряд Маклорена по малым параметрам ε и q . Удерживая члены второго порядка малости, получим

$$(П.8) \quad \tilde{L}_1(\nu) = L_1(\nu, \varepsilon, q) = [\mu/2(\nu^{**} - \nu)] \times \\ \times \left\{ q [\nu^{**} \min(\nu, \nu_0) - \nu \nu_0] / \sqrt{\nu \nu^{**}} + [y(\nu) \sqrt{\nu^{**}} - x \sqrt{\nu}] \varepsilon \right\}^2 + o(\varepsilon^2, q^2, \varepsilon q).$$

Здесь $y(\nu)$ и x определены в (1.10) и (1.11), соответственно. При $q \rightarrow 0$ (П.8) совпадает с выражением (1.13) для логарифма функционала отношения правдоподобия в отсутствие разладки потока $\Xi(t)$. Подставив в (П.3) двумерную функцию распределения $F_0(u, v, s)$ (1.17) вместо $F_1(u, v, s)$ и выполнив необходимые операции дифференцирования и интегрирования, получим предельную плотность вероятности оценки нормированного момента разладки ν_m при $q \rightarrow 0$ в виде

$$(П.9) \quad W_0(\nu_m) = \nu^{**} \{ \nu_m(\nu^{**} - \nu_m) \ln[(\nu^{**} - \nu^*)/\nu^*(\nu^{**} - 1)] \}^{-1}, \\ \nu_m \in [\nu^*, 1].$$

Воспользовавшись (П.9), находим явные выражения (11) для смещения $d_0(\nu_m | \nu_0)$ и рассеяния $V_0(\nu_m | \nu_0)$ оценки максимального правдоподобия параметра ν_m , когда $q \rightarrow 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трифонов А. П., Овчинникова Т. М. Обнаружение и оценка момента изменения неизвестной интенсивности пуассоновского потока. I // *АиТ*. 1999. № 1. С. 66–76.
2. Trifonov A. P., Buteiko V. K., Bokk G. O. Efficiency of testing of the change in the Poisson flow intensity // *Second IFAC Symposium on Stochastic Control*, Vilnius, USSR, 1986. Preprints. Part II. P. 249–254.
3. Галун С. А., Трифонов А. П. Обнаружение и оценка момента изменения интенсивности пуассоновского потока // *АиТ*. 1982. № 6. С. 95–105.
4. Трифонов А. П. Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами // *Теория обнаружения сигналов*. М.: Радио и связь, 1984. С. 12–89.
5. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1978.
6. Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфенов В. И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: ВГУ, 1991.
7. Трифонов А. П., Овчинникова Т. М. Совместная оценка момента изменения и величины неизвестной интенсивности пуассоновского потока // *Статистические проблемы управления*. Вильнюс, 1990. Вып. 89. С. 94–100.
8. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
9. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем: Пер. с англ. / Под ред. М. Бассвиля, А. Банвениста. М.: Мир, 1989.
10. Бусленко Н. П. Метод статистического моделирования. М.: Статистика, 1970.
11. Форсайт Дж., Малькольм М., Мулдер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.
12. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 30.06.97