

189 p. 6434  
999 / 42 / 12  
a

189

ISSN 0021-3462

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

# РАДИОФИЗИКА

1999

ТОМ 42

12

ИЗДАНИЕ НИЖЕГОРОДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬНОГО  
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.391

## ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЁМ ОПТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМ МОМЕНТОМ ПОЯВЛЕНИЯ

А. П. Трифонов, Ю. В. Невежин

Получены максимально правдоподобный и байесовский алгоритмы обнаружения сигнала и измерения момента его появления. Выполнен сравнительный анализ байесовских и максимально правдоподобных алгоритмов. Посредством статистического моделирования на ЭВМ проверена работоспособность синтезированных алгоритмов и установлены границы применимости асимптотических формул для их характеристик.

### ВВЕДЕНИЕ

В значительном числе задач статистической радиофизики, лазерного зондирования, оптической связи и оптической обработки информации находят применение алгоритмы приёма оптических импульсных сигналов с неизвестными моментами появления [1–3]. Обнаружение оптического импульсного сигнала и оценка момента его появления рассматривались в [2–5] и др. Найдены приближённые выражения для характеристик обнаружения сигнала по методу максимального правдоподобия (МП), а также для характеристик оценки максимального правдоподобия (ОМП) и байесовской оценки (БО) момента появления. Однако известно [2, 3, 6], что оптимальное решение задач обнаружения сигнала и оценки его параметров приводит к соответствующим байесовским алгоритмам (БА). В этой связи вызывает интерес синтез и анализ байесовских алгоритмов обнаружения оптического импульсного сигнала и оценки момента его появления. Ниже показано, что в рамках байесовского подхода [6–8] можно получить достаточно простые и эффективные алгоритмы обнаружения оптического импульсного сигнала и оценки момента его появления.

### 1. ОБНАРУЖЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМ МОМЕНТОМ ПОЯВЛЕНИЯ

Пусть на интервале времени  $[0, T]$  наблюдается реализация  $\pi(t)$  пуассоновского процесса, описывающего поток фотоэлектронов при детектировании оптического импульсного сигнала [1–3]. Интенсивность процесса  $\pi(t)$  обозначим через

$$\rho(t) = \gamma_0 s(t - \lambda_0) + a. \quad (1)$$

Здесь момент появления оптического импульсного сигнала  $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$  предполагается случайной величиной с априорной плотностью вероятности  $W(\lambda)$ ;  $a$  — интенсивность оптического фона,  $s(t) = bf(t/\tau)$  — интенсивность оптического импульсного сигнала,  $b = \sup s(t)$  — максимальная интенсивность сигнала,  $\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt / b$  — его эквивалентная длительность. Функция  $f(x) \geq 0$  описывает временную зависимость интенсивности обнаруживаемого сигнала и нормирована так, что  $\sup f(x) = 1$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ . Далее полагаем, что момент появления сигнала является

неэнергетическим параметром [7]. Это предположение справедливо, если при наличии сигнала он полностью располагается внутри интервала наблюдения  $[0; T]$ , так что  $S(-\Lambda_1) \approx S(T - \Lambda_2) \approx 0$ . В силу принятой нормировки функции  $f(x)$  последнее соотношение выполняется, если  $\tau \ll \Lambda_1$  и  $\tau \ll T - \Lambda_2$ . Индекс "0" в (1) и далее означает истинное значение соответствующего параметра. Параметр  $\gamma_0$  в (1) является дискретным и принимает два значения:  $\gamma_0 = 0$  (в наблюдаемой реализации  $\pi(t)$  сигнал отсутствует) и  $\gamma_0 = 1$  (в наблюдаемой реализации  $\pi(t)$  сигнал присутствует). Априорные вероятности отсутствия и наличия сигнала известны и равны соответственно  $p_0 = P(\gamma_0=0)$  и  $p_1 = P(\gamma_0=1) = 1 - p_0$ . По наблюдаемой реализации  $\pi(t)$  необходимо оптимальным образом решить, какое значение принимает параметр  $\gamma$ , т.е. определить, присутствует сигнал или нет.

Логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) в данном случае будет зависеть от параметров  $\lambda$  и  $\gamma$  и в соответствии с [2, 3] может быть записан в виде

$$L(\gamma, \lambda) = \int_0^T \ln[1 + \gamma q f((t - \lambda)/\tau)] d\pi(t) - \gamma \mu q.$$

Здесь  $q = b/a$  — отношение сигнал—фон,

$$\mu = a\tau. \quad (2)$$

Оценка  $\hat{\gamma}$  дискретного параметра  $\gamma$  в соответствии с алгоритмом МП может быть найдена как [8]:

$$\hat{\gamma} = \arg \sup_{\gamma} \sup_{\lambda} L(\gamma, \lambda).$$

Учитывая соотношение  $L(\gamma=0, \lambda) \equiv 0$ , получаем, что МП алгоритм обнаружения оптического импульсного сигнала с неизвестным моментом появления заключается в сравнении с нулевым порогом величины абсолютного максимума логарифма ФОП:

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sup_{\lambda} L(\lambda) > 0; \\ 0, & \text{если } \sup_{\lambda} L(\lambda) < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $L(\lambda) = L(\gamma=1, \lambda)$ . Обозначив

$$L_z(\lambda) = \int_0^T \ln[1 + q f((t - \lambda)/\tau)] d\pi(t) \quad (4)$$

— член логарифма ФОП, зависящий от неизвестного момента появления оптического импульсного сигнала, перепишем алгоритм (3) в виде

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sup_{\lambda} L_z(\lambda) > q\mu; \\ 0, & \text{если } \sup_{\lambda} L_z(\lambda) < q\mu. \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что вместо алгоритмов (3), (5) можно использовать обобщённый МП алгоритм обнаружения [7], основанный на сравнении величины абсолютного максимума логарифма ФОП с некоторым порогом  $C$ :

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sup_{\lambda} L_z(\lambda) > C; \\ 0, & \text{если } \sup_{\lambda} L_z(\lambda) < C. \end{cases} \quad (6)$$

Порог  $C$  в (6) может выбираться исходя из различных критериев оптимальности.

На рис. 1 штриховой линией выделена структурная схема МП обнаружителя оптического импульсного сигнала с неизвестным моментом появления. Здесь блок 1 обозначает фильтр, согласованный с сигналом  $\ln[1 + qf(t/\tau)]$ , 2 — пиковый детектор, определяющий наибольшее значение сигнала, 3 — пороговое устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала пикового детектора с порогом  $C$  и выносящее решение о наличии сигнала на входе обнаружителя, если порог превышен, или об отсутствии сигнала, если порог не превышен. Аналогично работам [2, 3] предполагалось, что на вход обнаружителя поступает производная пуассоновского процесса  $\pi'(t)$ , представляющая собой последовательность коротких импульсов. Структурная схема МП обнаружителя является одноканальной по неизвестному параметру и, следовательно, достаточно легко реализуема аппаратно.

Качество обнаружения будем характеризовать средней вероятностью ошибки [7]

$$P_e = p_0\alpha + p_1\beta, \quad (7)$$

где  $\alpha$  — вероятность ошибки 1-го рода (ложной тревоги),  $\beta = \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \beta(\lambda)W(\lambda) d\lambda$  — безусловная вероятность ошибки 2-го рода (пропуска сигнала),  $\beta(\lambda_0)$  — условная вероятность пропуска сигнала, который появляется в момент времени  $\lambda_0$ . В [4] найдены приближённые выражения для вероятностей ошибок

$$\alpha = \begin{cases} 1 - \exp[-md \exp(-u^2/2)/(2\pi)], & u \geq 0; \\ 1, & u < 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$\beta = \begin{cases} \exp[-md \exp(-u^2/2)/(2\pi)] \Phi(u/\varkappa - z), & u \geq 0; \\ 0, & u < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $u = (C - m_N)/\sigma_N$  — центрированный и нормированный порог,  $m_N = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + qf(x)] dx$  и  $\sigma_N^2 = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2[1 + qf(x)] dx$  — математическое ожидание и дисперсия логарифма ФОП (4) при отсутствии сигнала,

$$m = (\Lambda_2 - \Lambda_1)/\tau, \quad (10)$$

$$d^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (d \ln[1 + qf(x)]/dx)^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2[1 + qf(x)] dx}, \quad (11)$$

$$\varkappa^2 = 1 + \frac{q \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln^2[1 + qf(x)] dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2[1 + qf(x)] dx}, \quad (12)$$

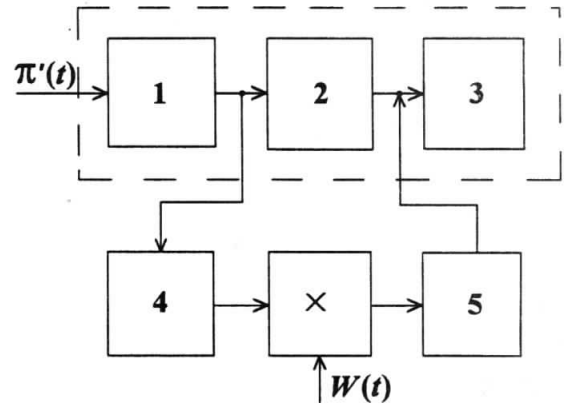


Рис. 1

$$z^2 = \mu q^2 \frac{\left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln[1 + qf(x)] dx \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} [1 + qf(x)] \ln^2[1 + qf(x)] dx} \quad (13)$$

— выходное отношение сигнал—шум [9], а

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$$

— интеграл вероятности [8, 9]. Точность приближённых формул (8), (9) улучшается с увеличением  $\mu$ ,  $u$ ,  $m$  и  $z$ .

Отметим, что приближённая величина вероятности пропуска оптического импульсного сигнала не зависит от истинного значения неизвестного момента появления. Следовательно, формула (9) позволяет рассчитать приближённое значение безусловной вероятности пропуска сигнала при любой априорной плотности вероятности  $W(\lambda)$  момента появления сигнала.

В качестве критерия оптимальности обнаружения выберем минимальность средней вероятности ошибки (7) и будем находить порог  $C$  исходя из этого критерия. Очевидно, что получаемый таким образом порог  $C^* = \arg \inf P_e(C)$  будет зависеть от априорных вероятностей наличия  $p_1$  и отсутствия  $p_0 = 1 - p_1$  оптического импульсного сигнала. Назовём порог  $C^*$  оптимальным, а соответствующий обнаружитель (6) — МП обнаружителем с оптимизированным порогом.

Хорошо известно (см. [7, 8] и др.), что при байесовском подходе оптимальным алгоритмом обнаружения является алгоритм, обеспечивающий минимум среднего риска. Рассмотрим возможность применения классического байесовского подхода к обнаружению оптического импульсного сигнала с неизвестным моментом появления. Для синтеза байесовского алгоритма используем простую функцию потерь, у которой стоимости правильных решений принимаются нулевыми, а стоимости ошибок первого и второго рода одинаковы, что соответствует критерию идеального наблюдателя. Тогда оптимальный (байесовский) алгоритм обнаружения оптического импульсного сигнала при априорной плотности вероятности момента появления  $W(\lambda)$  заключается в формировании величины

$$I = \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} W(\lambda) \exp[L_z(\lambda)] d\lambda \quad (14)$$

и сравнении её с порогом  $p_0 \exp(\mu q)/p_1$ .

В большинстве задач байесовские обнаружители сигналов с неизвестными параметрами достаточно сложно реализуемы аппаратно: они, как правило, являются многоканальными, причём для полностью оптимальной реализации число каналов должно быть бесконечным [7]. Однако, как следует из (14), одним из немногих исключений является БА обнаружения оптического импульсного сигнала с неизвестным моментом появления. Структурная схема такого обнаружителя приведена на рис. 1, из которого следует исключить блок 2. Здесь блок 4 обозначает нелинейный элемент с экспоненциальной характеристикой, 5 — интегратор на интервале времени  $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ , а пороговое устройство 3 осуществляет сравнение выходного сигнала интегратора 5 с порогом  $p_0 \exp(\mu q)/p_1$  и выносит решение о наличии сигнала, если порог превышен, или об отсутствии сигнала, если порог не превышен. Из рис. 1 следует, что структурная схема байесовского обнаружителя является одноканальной, однако она несколько сложнее схемы МП обнаружителя.

Рассмотрим характеристики МП обнаружителя оптического импульсного сигнала с неизвестным моментом появления. Положим, что временная зависимость интенсивности сигнала описывается кривой Лоренца [1], так что

$$f(x) = 1/(1 + \pi^2 x^2). \quad (15)$$

Для такой формы интенсивности на рис. 2 представлены зависимости средней вероятности ошибки  $P_e$ , соответствующие выражению (7), от отношения сигнал—фон  $q$  при  $p_0 = p_1 = 1/2$ ,  $\mu = 10$ . Сплошные линии соответствуют МП обнаружителю (3), (5), а штриховые — обобщённому МП обнаружителю (6) с оптимизированным порогом  $C^*$ . Кривые 1 на рис. 2 рассчитаны при  $m = 10$ , кривые 2 — при  $m = 50$ . Сопоставление сплошных и штриховых кривых на рис. 2 показывает, что применение обобщённого МП обнаружителя с оптимизированным порогом существенно повышает эффективность обнаружения оптического импульсного сигнала с неизвестным моментом появления, особенно при больших значениях параметра  $m$ .

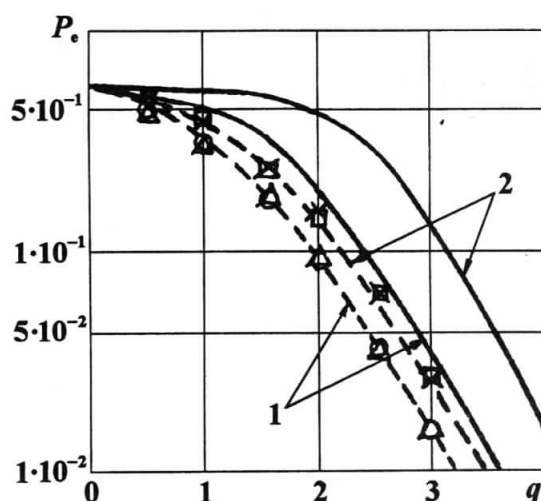


Рис. 2

Однако для определения оптимального порога  $C^*$  необходимо знание априорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала. Если эти вероятности неизвестны, то может оказаться целесообразным применение МП обнаружителя (3), (5).

Теоретический анализ БА обнаружения выполнить не удаётся. Кроме того, приведённые выше выражения (8), (9) для вероятностей ошибок МП обнаружителя являются лишь асимптотически точными при больших значениях параметров  $\mu$ ,  $u$ ,  $m$ ,  $z$ . При конечных значениях этих параметров определить погрешности приближённых формул аналитическими методами пока не представляется возможным. В связи с этим исследование работоспособности байесовского и МП обнаружителей, а также определение границ применимости асимптотических выражений для характеристик МП обнаружителя было выполнено на ЭВМ методами статистического моделирования.

## 2. ОЦЕНКА МОМЕНТА ПОЯВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

Рассмотрим теперь задачу оценки момента появления оптического импульсного сигнала, полагая, что  $p_1 = 1$ . Алгоритм ОМП момента появления [9] состоит в отыскании положения  $\hat{\lambda}$  абсолютного максимума логарифма ФОП (4):

$$\hat{\lambda} = \arg \sup L_z(\lambda), \quad \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]. \quad (16)$$

Следовательно, структура МП алгоритма оценивания инвариантна по отношению к априорной плотности вероятности момента появления сигнала  $W(\lambda)$ . Структурная схема МП измерителя момента появления оптического импульсного сигнала выделена на рис. 3 штриховой линией, где блок 1 обозначает фильтр, согласованный с сигналом  $\ln[1 + qf(t/\tau)]$ , 2 — устройство поиска положения абсолютного максимума сигнала, являющегося ОМП  $\hat{\lambda}$ , на интервале времени  $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ . Аналогично рис. 1 предполагалось, что на вход измерителя на рис. 3 поступает производная



пуассоновского процесса  $\pi'(t)$ , представляющая собой последовательность коротких импульсов.

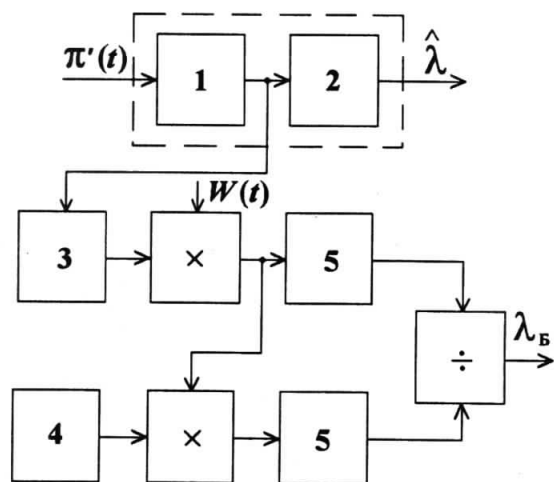


Рис. 3.

Точность оценки будем характеризовать безусловным рассеянием (средним квадратом ошибки) оценки момента появления

$$V(\hat{\lambda}) = \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} V(\hat{\lambda}|\lambda)W(\lambda) d\lambda,$$

где  $V(\lambda|\lambda_0)$  — условное рассеяние ОМП момента появления оптического импульсного сигнала.

Если описываемый выражением (10) параметр  $m \gg 1$ , то согласно [8, 9] условное рассеяние ОМП (16) определяется приближенной формулой

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0) = P_0 V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) + (1 - P_0) \times \times [(\Lambda_2^2 + \Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1^2)/3 - (\Lambda_1 + \Lambda_2) \lambda_0 + \lambda_0^2], \quad (17)$$

точность которой возрастает с увеличением  $m$ .  
Здесь  $P_0$  — вероятность, а  $V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0)$  — условное рассеяние надёжной оценки соответственно. Под надёжной понимается такая оценка  $\hat{\lambda}$ , что  $|\hat{\lambda} - \lambda_0| < \tau$  [8, 9]. Воспользовавшись результатами [5], можно записать

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}} \int_0^\infty \exp \left[ -\frac{(x - b\sqrt{\mu})^2}{2\kappa^2} - \frac{md}{2\pi} \exp \frac{-x^2}{2} \right] dx, \quad (18)$$

$$V_0(\hat{\lambda}|\lambda) = \tau^2 \left\{ \mu q^2 \int_{-\infty}^\infty \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]^2 [1 + qf(x)]^{-1} dx \right\}^{-1}, \quad (19)$$

где

$$b^2 = q^2 \frac{\left( \int_{-\infty}^\infty f(x) \ln[1 + qf(x)] dx \right)^2}{\int_{-\infty}^\infty \ln^2[1 + qf(x)] dx},$$

$d^2$  определяется из (11), а  $\kappa^2$  — из (12).

Точность формул (17), (18) возрастает с увеличением параметров  $\mu$ ,  $z$  и  $m$ , описываемых соответственно выражениями (2), (13) и (10), а формулы (19) — с увеличением  $\mu$  и  $z$ . Отметим, что в рассматриваемом приближении рассеяние надёжной ОМП момента появления (19) совпадает с дисперсией эффективной оценки [2, 3].

Усредняя (17) по параметру  $\lambda_0$ , обладающему априорной плотностью вероятности  $W(\lambda)$ , получаем безусловное рассеяние ОМП (16)

$$V(\hat{\lambda}) = P_0 V_0(\hat{\lambda}) + (1 - P_0) \left\{ (\Lambda_2 - \Lambda_1)^2/12 + [\lambda_{\text{pr}} - (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2]^2 + D_{\text{pr}} \right\}. \quad (20)$$

Здесь  $V_0(\hat{\lambda})$  — безусловное рассеяние надёжной ОМП, совпадающее с условным рассеянием  $V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0)$  (19), а  $\lambda_{\text{pr}}$  и  $D_{\text{pr}}$  — априорные среднее значение и дисперсия момента появления соответственно.

На рис. 4 сплошными линиями нанесены зависимости условного рассеяния (17)  $\tilde{V}_c(q) = 12 \times V(\hat{\lambda}|\lambda_0)/(\Lambda_2 - \Lambda_1)^2$  ОМП  $\hat{\lambda}$  с учётом аномальных ошибок, зависящих от отношения сигнал—фон  $q$ , при  $\lambda_0 = (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2$  для временной зависимости интенсивности оптического сигнала (15) и  $\mu = 10$ . На рис. 5 сплошными линиями изображены аналогичные зависимости нормированного безусловного рассеяния (20)  $\tilde{V}_n(q) = 6V(\hat{\lambda})/(\Lambda_2 - \Lambda_1)^2$ , рассчитанные для равномерной априорной плотности вероятности момента появления оптического импульсного сигнала

$$W(\lambda) = \begin{cases} 1/(\Lambda_2 - \Lambda_1), & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2; \\ 0, & \lambda < \Lambda_1, \lambda > \Lambda_2. \end{cases} \quad (21)$$

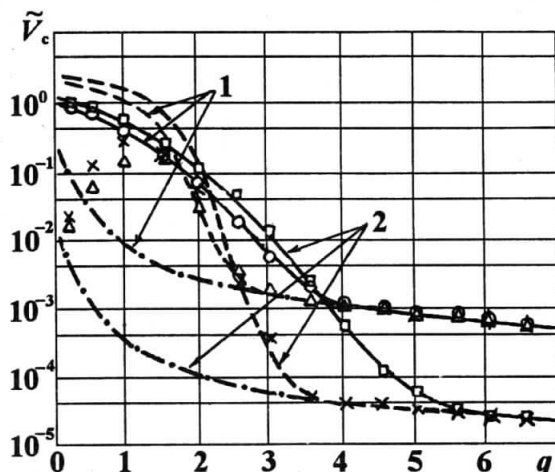


Рис. 4

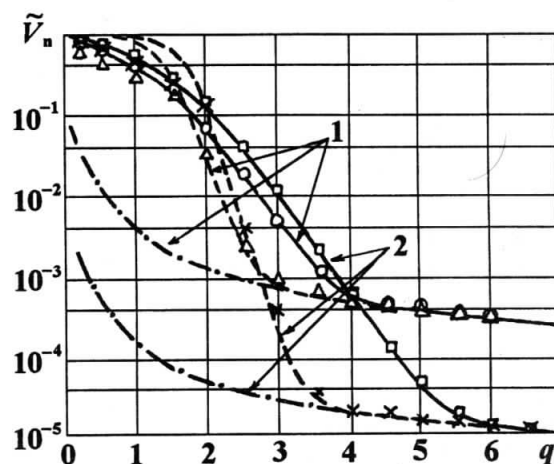


Рис. 5

Штрих-пунктирными линиями на рис. 4, 5 показаны соответствующие зависимости нормированного условного  $\tilde{V}_{oc}(q) = 12V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0)/(\Lambda_2 - \Lambda_1)^2$  и безусловного  $\tilde{V}_{on}(q) = 6V_0(\hat{\lambda})/(\Lambda_2 - \Lambda_1)^2$  рассеяния (19) надёжной ОМП. Кривые 1 на рис. 4, 5 соответствуют  $m = 10$ , кривые 2 —  $m = 50$ . Сопоставление сплошных и штрих-пунктирных кривых на рис. 4, 5 показывает, что при недостаточно больших значениях отношения сигнал—шум (13) существенную роль начинают играть пороговые эффекты, связанные с относительно частым появлением аномальных ошибок. Вследствие этого условное  $V(\hat{\lambda}|\lambda_0)$  (17) и безусловное  $V(\hat{\lambda})$  (20) рассеяния ОМП  $\hat{\lambda}$  резко возрастают по сравнению с соответствующим условным  $V_0(\lambda|\lambda_0)$  и безусловным  $V_0(\hat{\lambda})$  рассеянием (19) надёжной ОМП  $\hat{\lambda}$  (дисперсией эффективной оценки). Значит, точность ОМП момента появления оптического импульсного сигнала существенно ухудшается. Сопоставляя на рис. 4, 5 сплошные кривые 1 и 2, видим, что с ростом параметра  $m$  влияние аномальных ошибок возрастает. Так, согласно рис. 5, если при  $m = 10$  пороговые эффекты пренебрежимо малы, когда  $q \gtrsim 4,5$ , то при  $m = 50$  ими можно пренебречь лишь для  $q \gtrsim 6$ .

Байесовский алгоритм оценки момента появления при квадратичной функции потерь минимизирует безусловный средний квадрат ошибки (рассеяние) оценки. Согласно [6, 8, 9] БО момента появления оптического импульсного сигнала записывается в виде

$$\lambda_B = \frac{\int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \lambda W(\lambda) \exp[L_z(\lambda)] d\lambda}{\int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} W(\lambda) \exp[L_z(\lambda)] d\lambda}, \quad (22)$$

где  $L_z(\lambda)$  определяется из (4), а  $W(\lambda)$  — априорная плотность вероятности параметра  $\lambda_0$ .



В большинстве случаев байесовские измерители параметров сигнала достаточно сложно реализуемы аппаратно. Они, как правило, являются многоканальными, причём для полностью оптимальной реализации число каналов должно быть бесконечным [8, 9]. Однако, как следует из работы [6] и выражения (22), одним из немногих исключений является байесовский измеритель момента появления импульсного сигнала. Это существенно облегчает аппаратную реализацию БА оценки, структурная схема которого приведена на рис. 3, откуда следует исключить блок 2.

Блок 3 обозначает нелинейный элемент с экспоненциальной характеристикой, 4 — генератор линейно возрастающего напряжения, 5 — интегратор на интервале времени  $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ . Очевидно, что структура байесовского измерителя момента появления оптического импульсного сигнала несколько сложнее структуры МП измерителя.

В [5] найдено приближённое выражение для условного рассеяния БО (22) момента появления оптического импульсного сигнала:

$$V(\lambda_B|\lambda_0) = P_B V_0(\lambda|\lambda_0) + (1 - P_B) \left\{ (\Lambda_2 - \Lambda_1)^2/12 + P_B [\lambda_0 - (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2]^2 \right\}, \quad (23)$$

где

$$P_B = \left[ 1 + m q [\mu \nu / (2\pi)]^{1/2} \exp(-\mu \varepsilon) \right]^{-1},$$

$$\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]^2 [1 + qf(x)]^{-1} dx, \quad \varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} [1 + qf(x)] \ln[1 + qf(x)] dx - q,$$

а  $V_0(\lambda|\lambda_0)$  определяется из (19). Точность формулы (23) возрастает с увеличением  $\mu$ ,  $z$  и  $m$ .

Усредняя (23) по параметру  $\lambda_0$ , обладающему априорной плотностью вероятности  $W(\lambda)$ , получим безусловное рассеяние байесовской оценки  $\lambda_B$ :

$$V(\lambda_B) = P_B V_0(\lambda) + (1 - P_B) \left\{ (\Lambda_2 - \Lambda_1)^2/12 + P_B [D_{pr} + (\lambda_{pr} - (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2)^2] \right\}. \quad (24)$$

Здесь  $V_0(\lambda)$  — безусловное рассеяние надёжной ОМП, совпадающее с условным рассеянием  $V_0(\lambda|\lambda_0)$  (19), а  $\lambda_{pr}$  и  $D_{pr}$  — априорные среднее значение и дисперсия момента появления импульса соответственно.

На рис. 4 штриховыми линиями нанесены зависимости нормированного условного рассеяния (23)  $V_{\text{сб}}(q) = 12V(\lambda_B|\lambda_0)/(\Lambda_2 - \Lambda_1)^2$  байесовской оценки от отношения сигнал—фон  $q$  при  $\lambda_0 = (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2$  и  $\mu = 10$ . На рис. 5 штриховыми линиями изображены зависимости нормированного безусловного рассеяния (24)  $V_{\text{нб}}(q) = 6V(\lambda_B)/(\Lambda_2 - \Lambda_1)^2$ , рассчитанные для априорной плотности вероятности (21). Как следует из рис. 4, 5, применение БО приводит к некоторому повышению точности оценки в пороговой области. Действительно, если согласно рис. 5 для ОМП при  $m = 10$  влияние аномальных ошибок пренебрежимо мало, когда  $q \gtrsim 4,5$ , то для байесовской оценки пороговые эффекты практически отсутствуют уже при  $q \gtrsim 3$ . Для  $m = 50$  применение байесовского алгоритма позволяет уменьшить пороговое отношение сигнал—фон до величины  $q \simeq 3,5$ . В то же время при любом фиксированном значении  $m$  и неограниченном увеличении отношения сигнал—шум (13) рассеяния как ОМП, так и БО сходятся к дисперсии эффективной оценки. Действительно, в рассматриваемом регулярном случае ОМП является асимптотически байесовской [8, 9].

Выигрыш в точности БО по сравнению с ОМП можно охарактеризовать отношением их безусловных рассеяний  $\chi = V(\lambda)/V(\lambda_B)$ . На рис. 6 приведены зависимости отношения  $\chi(q)$  при  $m = 10$  (кривая 1) и  $m = 50$  (кривая 2). Как следует из рис. 6, в пороговой области выигрыш в точности БО по сравнению с ОМП может быть значительным. Причём этот выигрыш возрастает с увеличением параметра  $m$ . Однако с ростом отношения сигнал—шум (13) величина  $\chi$

стремится к единице, т.е. асимптотически рассеяния БО и ОМП совпадают.

Приведённые выше выражения для рассеяний ОМП (17), (20) и БО (23), (24) являются лишь асимптотически точными при больших значениях параметров  $\mu$ ,  $z$  и  $m$ . При конечных значениях этих параметров определить погрешность найденных формул аналитическими методами пока не представляется возможным. В связи с этим исследование работоспособности байесовского и МП алгоритмов, а также определение границ применимости асимптотических выражений для характеристик оценок момента появления оптического импульсного сигнала были выполнены методами статистического моделирования на ЭВМ.

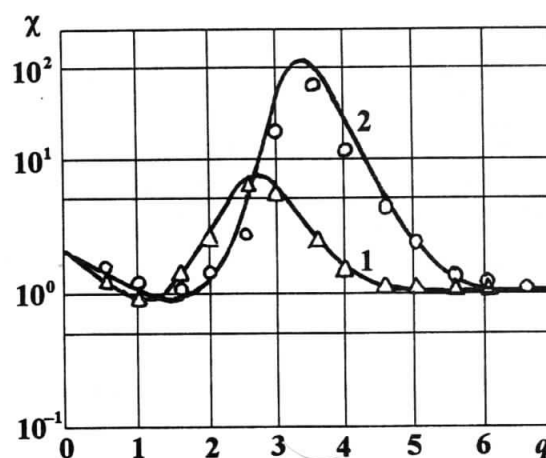


Рис. 6

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В процессе статистического моделирования формировались дискретные отсчёты логарифма ФОП (4)

$$L_z(n\delta) = \sum_k \ln[1 + qf(l_k - n\delta)], \quad (25)$$

где  $\delta = \Delta/\tau$  — интервал дискретизации нормированного момента появления  $l = \lambda/\tau$ ;  $N_1 \leq n \leq N_2$ ,  $N_i = \text{entr}(\Lambda_i/\Delta)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\text{entr}(x)$  — целая часть  $x$ ;  $l_k$  — моменты скачков реализации пуассоновского процесса  $\pi(t)$  с интенсивностью (1). При этом  $0 \leq l_k \leq M = \text{entr}(T/\Delta)$ , где  $\Delta$  — интервал дискретизации момента появления. Предполагалось, что временной профиль интенсивности оптического импульсного сигнала описывается кривой Лоренца (15). Значения  $l_k$  формировались на основе стандартного датчика равномерно распределённых на интервале  $[0, 1]$  независимых случайных чисел методом обратных функций [10, 11]. Интервал дискретизации  $\delta$  нормированного момента появления в зависимости от отношения сигнал—фон  $q$  варьировался в интервале  $0,015 \leq \delta \leq 0,3$ . При таком выборе интервала дискретизации относительная среднеквадратическая погрешность аппроксимации логарифма ФОП (6) ступенчатыми функциями на основе дискретных отсчётов (25) не превышала 2,5 %.

Для получения характеристик МП обнаружителя оптического импульсного сигнала в процессе моделирования определялась величина наибольшего отсчёта логарифма ФОП (25). Сравнение наибольшего максимума логарифма ФОП с порогом  $C^*$  при  $p_0 = p_1 = 1/2$  позволило определить относительные частоты появления ошибок первого и второго рода соответственно при  $\gamma_0 = 0$  и  $\gamma_0 = 1$ .

Для получения характеристик байесовского обнаружителя оптического импульсного сигнала с неизвестным моментом появления на основе дискретных отсчётов логарифма ФОП формировалась величина (14) при априорном распределении плотности вероятности момента появления (21):

$$I = \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{\exp[L_z(n\delta)]}{N_2 - N_1}. \quad (26)$$

Сравнение величины (26) с порогом  $\exp(\mu q)$  позволило определить относительные частоты появления ошибок первого и второго рода соответственно при  $\gamma_0 = 0$  и  $\gamma_0 = 1$ .

Относительные частоты появления ошибок первого и второго рода при моделировании МП и байесовского обнаружителей использовались в качестве оценок вероятностей соответствующих ошибок.

Для определения ОМП момента появления оптического сигнала находилось положение абсолютного максимума логарифма ФОП (25). Для получения БО момента появления формировалась величина (22) при априорном распределении плотности вероятности момента появления (21):

$$\lambda_B = \Delta \frac{\sum_{n=N_1}^{N_2} n \exp[L_z(n\delta)]}{\sum_{n=N_1}^{N_2} \exp[L_z(n\delta)]}. \quad (27)$$

В процессе моделирования по  $N$  реализациям логарифма ФОП определялись выборочные значения условного и безусловного рассеяний соответствующих оценок при  $\gamma_0 = 1$ .

Для получения условных рассеяний ОМП и БО истинное значение  $\lambda_0$  момента появления оптического импульса во всех испытаниях выбиралось фиксированным и соответствующим середине априорного интервала  $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ . При получении безусловных рассеяний исследуемых оценок в каждом испытании момент появления  $\lambda_0$  представлял собой значение случайной величины, распределённой согласно (21).

Объём  $N$  экспериментальной выборки в зависимости от значений параметров  $q$ ,  $\mu$ ,  $m$  варьировался в интервале от  $3,5 \cdot 10^3$  до  $3 \cdot 10^4$  реализаций. Эти значения  $N$  обеспечивают среднеквадратическую погрешность экспериментальных данных в пределах  $10 \div 20$  %. Результаты статистического моделирования приведены на рис. 2, 4–6. На рис. 2, 4, 5 экспериментальные значения характеристик МП алгоритмов обозначены кружочками для  $m = 10$  и квадратиками для  $m = 50$ . Характеристики БА на этих рисунках обозначены соответственно треугольниками для  $m = 10$  и крестиками для  $m = 50$ . На рис. 6 экспериментальные значения отношения рассеяния ОМП к рассеянию байесовской оценки обозначены треугольниками для  $m = 10$  и кружочками для  $m = 50$ .

Как следует из рис. 2, теоретические зависимости средней вероятности ошибки максимально правдоподобного обнаружителя (7) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные по крайней мере при  $\mu \geq 10$ ,  $z \geq 1$  и  $m \geq 10$ . Кроме того, сопоставление экспериментальных значений на рис. 2 свидетельствует о практически полном (в пределах погрешности эксперимента) совпадении характеристик байесовского и МП обнаружителей при использовании в последнем оптимизированного порога  $C^*$ . Это позволяет рекомендовать формулы (7)–(9) для расчёта средней вероятности ошибки  $P_{eB}$  при использовании байесовского обнаружителя:  $P_{eB} \approx \inf P_e(C)$ .

Из рис. 4, 5 следует, что теоретические зависимости условного (17) и безусловного (20) рассеяний ОМП  $\hat{\lambda}$  с учётом аномальных ошибок удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные по крайней мере при  $\mu \geq 10$ ,  $z \geq 0,5$  и  $m \geq 10$ . Точность аппроксимации теоретическими зависимостями условного (23) и безусловного (24) рассеяний БО с учётом аномальных ошибок экспериментальных данных несколько хуже, чем для ОМП. Эту точность можно считать удовлетворительной лишь при  $q \geq 2$ .

Сопоставление результатов моделирования байесовского и МП измерителей показывает, что условное рассеяние БО не превосходит рассеяние ОМП и стремится к нулю не только при  $q \rightarrow \infty$ , но и при  $q \rightarrow 0$ . Последнее объясняется тем, что истинное значение момента появления оптического импульсного сигнала совпадает в данном случае с его априорным средним  $\lambda_{pr}$ , а БО сходится к величине  $\lambda_{pr}$  с уменьшением  $q$  в среднеквадратическом смысле [9].

Согласно рис. 5, 6 безусловное рассеяние БО также всюду не превосходит рассеяния ОМП. Экспериментальные данные, нанесённые на рис. 6, подтверждают существенный выигрыш в точности оценки, который обеспечивает БА в пороговой области. Тем не менее, с ростом отношения сигнал—шум условные и безусловные рассеяния как БО, так и ОМП сходятся к дисперсии эффективной оценки.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При одинаковом объёме априорной информации и равномерном априорном распределении неизвестного момента появления оптического импульсного сигнала характеристики байесовского и максимально правдоподобного алгоритмов обнаружения практически совпадают. Следовательно, вместо относительно сложного байесовского обнаружителя можно использовать более простой максимально правдоподобный обнаружитель с оптимизированным порогом.

Для определения момента появления оптического импульсного сигнала можно использовать как байесовский, так и МП алгоритмы оценки. Аппаратная реализация МП измерителя по сравнению с байесовским является более простой. Кроме того, ОМП инвариантна по отношению к априорной плотности вероятности оцениваемого параметра. Однако при наличии полной априорной информации БА может заметно повысить точность оценки в пороговой области.

Таким образом, полученные результаты позволяют в зависимости от объёма имеющейся априорной информации и требований, предъявляемых к простоте аппаратной реализации и эффективности алгоритмов, сделать обоснованный выбор между байесовским и МП алгоритмами приёма оптического импульсного сигнала с неизвестным моментом появления.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981. — 640 с.
2. Гальярди Р.М., Карп Ш. Оптическая связь. — М.: Связь, 1978. — 424 с.
3. Курикса А.А. Квантовая оптика и оптическая локация. — М.: Сов. радио, 1973. — 134 с.
4. Трифонов А.П., Невежин Ю.В. // Направления развития систем и средств радиосвязи. — Воронеж, 1996. — С. 157.
5. Трифонов А.П., Енина Е.П. // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. 1984. Т. 27, № 5. С. 38.
6. Ванжа А.В., Силаев А.М. // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 12. С. 1257.
7. Трифонов А.П. // Теория обнаружения сигналов. — М.: Радио и связь, 1984. — С. 12.
8. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
9. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
10. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний и его реализация на ЦВМ. — М.: Физматгиз, 1961. — 226 с.

Воронежский государственный  
университет, г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию  
19 января 1999 г.