

Р-6434/
2000/43/3
62

3

ISSN 0021-3462

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОФИЗИКА

2000
ТОМ 43
3

ИЗДАНИЕ НИЖЕГОРОДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.391

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЁМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНЫМИ МОМЕНТАМИ ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин

Получены максимально правдоподобный и оптимальный (байесовский) алгоритмы обнаружения и измерения моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса, наблюдаемого на фоне белого гауссовского шума. Найдены точные выражения для характеристик максимально правдоподобных алгоритмов. С помощью моделирования на ЭВМ определены характеристики байесовских алгоритмов.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрена задача приёма прямоугольного импульса с неизвестной длительностью (моментом исчезновения). Показано, что полезный сигнал является разрывным по неизвестному параметру. Однако в различных приложениях радио- и гидролокации, радиосвязи, сейсмологии часто возникает необходимость приёма сигнала, у которого неизвестны как момент появления, так и момент исчезновения [2, 3]. В работе [4] рассмотрена более общая задача обнаружения сигнала, претерпевающего скачкообразные изменения в M случайных моментах времени. В [5] исследованы оценки этих моментов. Подход, развитый в работах [4, 5], позволяет синтезировать алгоритмы обнаружения и оценки параметров сигнала с M скачкообразными изменениями. В частности, в работах [4, 5] рассмотрен приём прямоугольного импульса с неизвестными моментами появления и исчезновения, т. е. когда $M = 2$. Однако при наличии всего двух скачкообразных изменений сигнала оптимальный приём сигнала можно реализовать без решения полученных в [4, 5] довольно сложных нелинейных стохастических дифференциальных уравнений. Ниже показано, что как на основе метода максимального правдоподобия [6, 7], так и в рамках классического байесовского подхода [4–8] удаётся получить достаточно простые и относительно легко реализуемые алгоритмы обнаружения сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения и оценивания этих моментов.

1. ОБНАРУЖЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНЫМИ МОМЕНТАМИ ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ

Рассмотрим задачу обнаружения прямоугольного импульса

$$s(t, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} a, & \theta_1 \leq t \leq \theta_2; \\ 0, & t < \theta_1, t > \theta_2, \end{cases} \quad (1)$$

наблюдаемого в течение интервала времени $[0, T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь a — амплитуда сигнала, моменты появления θ_1 и исчезновения θ_2 принимают значения из априорных интервалов

$$\theta_1 \in [\theta_{1\min}, \theta_{1\max}], \quad \theta_2 \in [\theta_{2\min}, \theta_{2\max}], \quad \theta_{1\max} < \theta_{2\min}, \quad (2)$$

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин

271

и предполагаются случайными величинами с совместной априорной плотностью вероятности $W_{\text{пр}}(\theta_1, \theta_2)$. Тогда реализация наблюдаемых данных запишется в виде $x(t) = \gamma_0 s(t, \theta_{01}, \theta_{02}) + n(t)$, где θ_{01} и θ_{02} — истинные моменты появления и исчезновения. Дискретный параметр γ_0 принимает два значения: $\gamma_0 = 0$ (сигнал отсутствует в принятой реализации) и $\gamma_0 = 1$ (сигнал присутствует в принятой реализации). Предполагается, что априорные вероятности отсутствия и наличия сигнала известны и равны соответственно $p_0 = P(\gamma_0 = 0)$ и $p_1 = P(\gamma_0 = 1) = 1 - p_0$. По наблюдаемой реализации $x(t)$ необходимо оптимальным образом решить, какое значение имеет параметр γ_0 , т. е. определить, присутствует сигнал или нет.

Логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) [6–8] в этом случае будет зависеть от трёх неизвестных параметров γ , θ_1 и θ_2 . Будем считать, что интервал наблюдения $[0, T]$ удовлетворяет условию $0 \leq \theta_{1\min} < \theta_{2\max} \leq T$, так что сигнал (1) полностью размещается в этом интервале. Тогда в соответствии с [6, 8] логарифм ФОП может быть записан в виде

$$L(\gamma, \theta_1, \theta_2) = \frac{2\gamma a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (x(t) - a/2) dt. \quad (3)$$

Оценка $\hat{\gamma}$ дискретного параметра γ в соответствии с алгоритмом максимального правдоподобия (МП) может быть найдена как

$$\hat{\gamma} = \arg \sup_{\gamma} \left[\sup_{\theta_1, \theta_2} L(\gamma, \theta_1, \theta_2) \right].$$

Учитывая, что $L(\gamma = 0, \theta_1, \theta_2) = 0$, получаем, что МП алгоритм обнаружения сигнала (1) заключается в сравнении с нулевым порогом величины абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если } L = \sup L(\theta_1, \theta_2) > 0; \\ 0, & \text{если } L = \sup L(\theta_1, \theta_2) < 0, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$L(\theta_1, \theta_2) = L(\gamma = 1, \theta_1, \theta_2). \quad (5)$$

Вместо алгоритма (4) можно использовать обобщённый МП алгоритм обнаружения [6], основанный на сравнении абсолютного максимума логарифма ФОП с некоторым порогом c :

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если } L > c; \\ 0, & \text{если } L < c. \end{cases} \quad (6)$$

Порог c в выражении (6) может выбираться исходя из различных критериев оптимальности.

Согласно алгоритмам (4), (6) приёмник должен формировать двумерное случайное поле (5) для всех возможных значений неизвестных моментов появления и исчезновения. Поэтому его аппаратная реализация оказывается значительно сложнее, нежели приёмника, синтезированного в [4]. Действительно, нахождение величины L предполагает построение структуры, многоканальной по обоим неизвестным параметрам, а алгоритм, предложенный в [4], является одноканальным. Однако трудностей аппаратной реализации алгоритма (6) частично удастся избежать, если представить логарифм ФОП (5) в виде суммы двух случайных процессов [9]: $L(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2)$. Первый из них зависит только от момента появления θ_1 , а второй — только от момента исчезновения θ_2 :

$$L_1(\theta_1) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{t_0} (x(t) - a/2) dt, \quad (7)$$

$$L_2(\theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{t_0}^{\theta_2} (x(t) - a/2) dt, \quad (8)$$

где t_0 — произвольная точка, принадлежащая интервалу $(\theta_{1\max}, \theta_{2\min})$.

Согласно выражениям (7) и (8) функции $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$ статистически независимы, т. к. представляют собой интегралы от белого шума на неперекрывающихся интервалах (θ_1, t_0) и (t_0, θ_2) . Тогда в (4) и (6)

$$L = L_1 + L_2, \quad L_1 = \sup L_1(\theta_1), \quad L_2 = \sup L_2(\theta_2), \quad (9)$$

где L_1 и L_2 — статистически независимые случайные величины.

Следовательно, величину L можно получить посредством раздельной максимизации функций (7) и (8), что существенно облегчает аппаратную реализацию приёмника МП.

На рис. 1 штриховой линией выделена структурная схема МП обнаружителя прямоугольного импульса с неизвестными моментами появления и исчезновения, где обозначено: 1 и 1' — интеграторы на интервалах времени соответственно $[t_0, t]$, где $t \in [t_0, \theta_{2\max}]$, и $[\theta_{1\min}, t]$, где $t \in [\theta_{1\min}, t_0]$, 2 — линия задержки на время $t = t_0 - \theta_{1\min}$, 3 — пиковые детекторы, 6 — сумматор, 7 — решающее устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала сумматора 6 в момент времени $t = \max[\theta_{2\max}, t_0 + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$ с порогом c и выносящее решение о наличии сигнала, если порог превышен, и решение об отсутствии сигнала, если порог не превышен. Структурная схема МП обнаружителя является двухканальной и состоит из блоков, которые легко реализуются аппаратно или программно.

Качество обнаружения будем характеризовать средней вероятностью ошибки

$$P_e = p_0\alpha + p_1\beta, \quad (10)$$

где α — вероятность ошибки 1-го рода (ложной тревоги), $\beta =$

$$\int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{1\max}} \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \beta(\theta_1, \theta_2) W_{\text{пр}}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 — \text{без-}$$

условная вероятность ошибки 2-го рода (пропуска сигнала), а $\beta(\theta_{01}, \theta_{02})$ — условная вероятность пропуска сигнала с моментами появления и исчезновения соответственно θ_{01} и θ_{02} .

Вероятности ошибок ложной тревоги α и пропуска сигнала $\beta(\theta_{01}, \theta_{02})$ при использовании приёмника МП определяются выражениями [6]

$$\alpha = P[\sup L(\theta_1, \theta_2) > c | H_0] = 1 - P_0(c), \quad (11)$$

$$\beta(\theta_{01}, \theta_{02}) = P[\sup L(\theta_1, \theta_2) < c | H_1] = P_1(c), \quad (12)$$

где $P_j(c) = P[\sup L(\theta_1, \theta_2) < c | H_j]$ — функции распределения величины абсолютного максимума случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$. Используя (9) и учитывая статистическую независимость функций (7) и (8), получаем, что

$$P_0(c) = P[L_1 + L_2 < c | H_0] = \int F_{20}(c - x, c - x, \theta_{2\max}) dF_{10}(x, x, \theta_{1\max}), \quad (13)$$

$$P_1(c) = P[L_1 + L_2 < c | H_1] = \int F_{21}(c - x, c - x, \theta_{2\max}) dF_{11}(x, x, \theta_{1\max}), \quad (14)$$

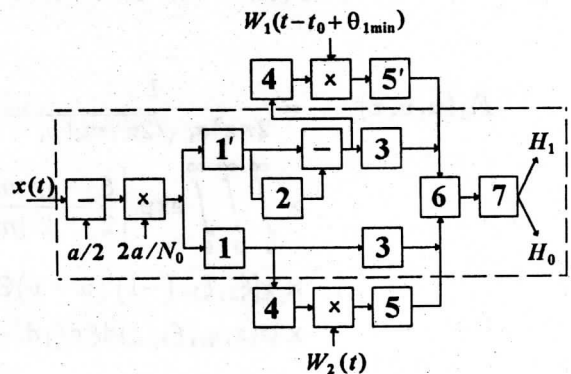


Рис. 1

где

$$F_{ij}(u, v, \tau) = P \left[\sup_{\theta_i \min \leq \theta_i < \tau} L_i(\theta_i) < u, \sup_{\tau \leq \theta_i \leq \theta_i \max} L_i(\theta_i) < v | H_j \right] \quad (15)$$

— двумерная функция распределения абсолютных максимумов случайного процесса $L_i(\theta_i)$ в предположении справедливости гипотезы H_j , $i = 1; 2$, $j = 0; 1$, а θ_1 и θ_2 удовлетворяют (2). В результате замены переменных $\tau_i = (-1)^i (\theta_i - t_0)$ выражения (7) и (8) можно переписать в следующем виде:

$$L_i(\tau_i) = \frac{2a}{N_0} \int_0^{\tau_i} \{x[(-1)^i (t - t_0)] - a/2\} dt, \quad (16)$$

где $i = 1; 2$. Согласно (16) случайные процессы $L_i(\tau_i)$ совпадают с логарифмом ФОП в задаче приёма сигнала с неизвестной длительностью, которая исследована в [8]. Там же найдены функции, аналогичные (15). Используя результаты работы [8], можно записать точные выражения для распределений (15):

$$F_{i0}(u, v, \tau) = \frac{1}{2\pi z \sigma_i \sqrt{\eta_{i\tau}}} \exp \left[(-1)^i \frac{(u - v)}{2} - \frac{z^2 \eta_{i\tau}}{8} \right] \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(\xi - u \delta_{2i} - v \delta_{1i} - \sigma_i^2/2)^2}{2\sigma_i^2} \right] \times \\ \times \exp(\xi_1/2 - \xi/2) \chi[\xi_1, \xi, (-1)^i (u - v), z^2 \eta_{i\tau}] \varphi(z, \eta_i - \eta_{i\tau}, \xi_1/z) d\xi d\xi_1, \quad (17)$$

$$F_{i1}(u, v, \tau) = \frac{1}{2\pi z^2 \sigma_i \sqrt{2\pi |m_i|} \rho_i} \exp \left[(-1)^{i+1} \frac{(u - v)}{2} \frac{m_i}{|m_i|} - \frac{z^2 (|m_i| + \rho_i)}{8} \right] \times \\ \times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[\frac{\xi}{2} - \frac{\xi_2}{2} \frac{m_i}{|m_i|} - \xi_1 \Theta(-m_i) - \frac{(\xi - u \delta_{2i} - v \delta_{1i} + \sigma_i^2/2)^2}{2\sigma_i^2} \right] \times \\ \times \chi[\xi_2, \xi_1, (-1)^i (u - v) \Theta(-m_i), z^2 |m_i|] \chi[\xi_1, \xi, (-1)^i (u - v) \Theta(m_i), z^2 \rho_i] \times \\ \times \varphi(z, q_i, \xi_2/z) d\xi d\xi_1 d\xi_2. \quad (18)$$

Здесь $\chi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \exp[-(y_1 - y_2 + y_3)^2/(2y_4)] - \exp[-(y_1 + y_2 + y_3)^2/(2y_4)]$,

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = \Phi(y_1 \sqrt{y_2}/2 + y_3/\sqrt{y_2}) - \exp(-y_1 y_3) \Phi(y_1 \sqrt{y_2}/2 - y_3/\sqrt{y_2}),$$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности, $\Theta(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$, δ_{ij} — символ Кронекера,

$$z^2 = 2a^2 T_{\max} / N_0 \quad (19)$$

— максимальное отношение сигнал/шум (ОСШ), $T_{\max} = \theta_{2\max} - \theta_{1\min}$ — максимальная длительность сигнала, $\eta_i = (\theta_{i\max} - \theta_{i\min})/T_{\max}$ — нормированные длины априорных интервалов,

$$\begin{aligned} \eta_{1\tau} &= (\theta_{1\max} - \tau)/T_{\max}, & \eta_{2\tau} &= (\tau - \theta_{2\min})/T_{\max}, \\ \rho_1 &= [\theta_{1\max} - \max[\theta_{01}, \tau]]/T_{\max}, & \rho_2 &= [\min[\theta_{02}, \tau] - \theta_{2\min}]/T_{\max}, \\ q_1 &= [\min[\theta_{01}, \tau] - \theta_{1\min}]/T_{\max}, & q_2 &= [\theta_{2\max} - \max[\theta_{02}, \tau]]/T_{\max}, \\ \sigma_1^2 &= z^2 (t_0 - \theta_{1\max})/T_{\max}, & \sigma_2^2 &= z^2 (\theta_{2\min} - t_0)/T_{\max}, \\ m_i &= (-1)^{i+1} (\tau - \theta_{0i})/T_{\max}, & i &= 1; 2. \end{aligned}$$

Подставляя функцию (17) в (13), (18) в (14), а затем (13) и (14) соответственно в (11) и (12), получаем выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\eta \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(\xi_1 + \xi_2 - u_0 - z\eta/2)^2}{2\eta} \right] \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 - u_0}{\sqrt{\eta}} - \frac{z\sqrt{\eta}}{2} \right) \times \\ \times \varphi(z, \eta_1, \xi_1) \varphi(z, \eta_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (20)$$

$$\beta(\theta_{01}, \theta_{02}) = \frac{\exp[-z^2(\mu_1 + \mu_2)/8]}{2\pi \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(\xi_1 + \xi_3 - u_0 + z\eta/2)^2}{2\eta} \right] \times \\ \times \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{2\mu_1} \right] - \exp \left[-\frac{(\xi_2 + \xi_1)^2}{2\mu_1} \right] \right\} \varphi(z, \eta_1 - \mu_1, \xi_2) \times \\ \times \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi_4 - \xi_3)^2}{2\mu_2} \right] - \exp \left[-\frac{(\xi_4 + \xi_3)^2}{2\mu_2} \right] \right\} \varphi(z, \eta_2 - \mu_2, \xi_4) \times \\ \times \left[\frac{\xi_1 + \xi_3 - u_0 + z\eta/2}{\sqrt{2\pi} \eta^{3/2}} \right] \exp \left[\frac{z(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4)}{2} \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4, \quad (21)$$

где $\eta = T_{\min}/T_{\max}$, $T_{\min} = \theta_{2\min} - \theta_{1\max}$, $u_0 = c/z$ — нормированный порог,

$$\mu_1 = (\theta_{1\max} - \theta_{01})/T_{\max}, \quad \mu_2 = (\theta_{02} - \theta_{2\min})/T_{\max}. \quad (22)$$

Таким образом, выражения (17)–(21) позволяют рассчитать точные значения вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала (1) с неизвестными моментами появления и исчезновения.

Хорошо известно [6, 8], что при байесовском подходе оптимальным правилом обнаружения сигнала является правило, обеспечивающее минимум риска. Рассмотрим возможность применения классического байесовского подхода к обнаружению сигнала (1) с неизвестными моментами появления и исчезновения. Для синтеза байесовского алгоритма используем простую функцию потерь, у которой стоимости правильных решений принимаются нулевыми, а стоимости ошибок первого и второго рода одинаковыми, что соответствует критерию идеального наблюдателя. Тогда оптимальный (байесовский) алгоритм обнаружения сигнала (1) заключается в формировании величины

$$I = \int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{1\max}} \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \exp[L(\theta_1, \theta_2)] W_{\text{pr}}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (23)$$

и сравнении её с порогом p_0/p_1 . Из сопоставления обобщённого МП алгоритма обнаружения (6) и байесовского алгоритма (23) следует, что порог c в алгоритме (6) может быть выбран таким же, как для байесовского алгоритма, т. е. равным $\ln(p_0/p_1)$.

Воспользуемся представлением логарифма ФОП $L(\theta_1, \theta_2)$ в виде суммы случайных процессов (7) и (8) и, полагая, что $W_{\text{pr}}(\theta_1, \theta_2) = W_1(\theta_1)W_2(\theta_2)$, перепишем выражение (23) в виде

$$I = I_1 I_2, \quad I_i = \int_{\theta_i \min}^{\theta_i \max} \exp[L_i(\theta_i)] W_i(\theta_i) d\theta_i. \quad (24)$$

Структурная схема такого обнаружителя приведена на рис. 1, из которого необходимо исключить блоки 3. На рис. 1 блоки 4 — нелинейные элементы с экспоненциальной характеристикой, блоки 5 и 5' — интеграторы на интервалах времени соответственно $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$ и

$[t_0, t_0 + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$. Сумматор 6 для реализации байесовского алгоритма обнаружения необходимо заменить на перемножитель. Пороговое устройство 7 осуществляет сравнение в момент времени $t = \max[\theta_{2\max}, t_0 + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$ выходного сигнала перемножителя 6 с порогом p_0/p_1 и выносит решение о наличии сигнала, если порог превышен и об отсутствии сигнала, если порог не превышен. Из рис. 1 следует, что схема байесовского обнаружителя (БО) является одноканальной по каждому неизвестному параметру, однако она несколько сложнее схемы МП обнаружителя.

Рассмотрим характеристики МП обнаружителя импульса (1). На рис. 2 представлены зависимости средней вероятности ошибки P_e (10) от ОСШ z (19) при $\eta = 0,1$; $\eta_1 = \eta_2 = (1 - \eta)/2$ и равномерных априорных плотностях вероятности моментов появления и исчезновения

$$W_i(\theta_i) = \begin{cases} 1/(\theta_{i\max} - \theta_{i\min}), & \theta_{i\min} \leq \theta_i \leq \theta_{i\max}; \\ 0, & \theta_i < \theta_{i\min}, \theta_i > \theta_{i\max}. \end{cases} \quad (25)$$

Кривые 1 на рис. 2 построены для $p_0 = 0,1$, а кривые 2 — $p_0 = 0,7$. Штрих-пунктирные кривые соответствуют порогу обнаружения $c = 0$, штриховые — порогу $c = \ln(p_0/p_1)$.

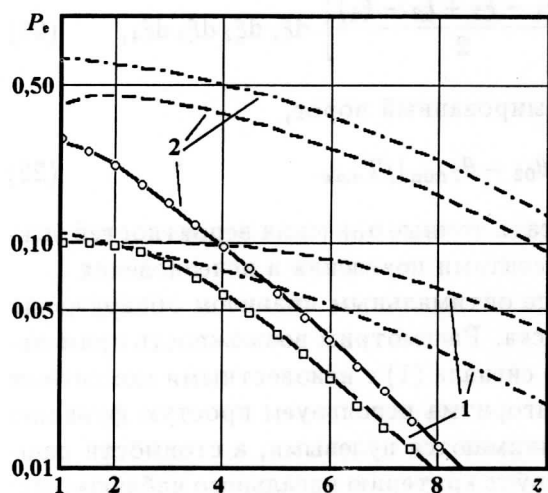


Рис. 2

В качестве критерия оптимальности можно выбрать критерий минимума средней вероятности ошибки (10) [6] и на его основе находить порог c . Очевидно, получаемый таким образом порог $c^* = \arg \inf P_e(c)$ будет зависеть от z и p_0 . Назовём этот порог оптимальным, а соответствующий алгоритм обнаружения — МП обнаружителем с оптимизированным порогом. Зависимости $P_e(z)$, показанные на рис. 2 сплошными линиями, соответствуют оптимизированному порогу обнаружения c^* .

Анализ зависимостей, приведённых на рис. 2, свидетельствует о целесообразности использования МП обнаружителя с оптимизированным порогом, особенно при малых значениях p_0 и не очень малых z , однако при этом должны быть известны априорные вероятности p_0, p_1 и плотности вероятности $W_i(\theta_i)$, где $i = 1, 2$. Отметим, что теоретическое исследование БО (24) затруднительно и найти аналитически его характеристики не удаётся.

2. ОЦЕНКА МОМЕНТОВ ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ СИГНАЛА

Рассмотрим теперь задачу оценки моментов появления и исчезновения импульса (1), полагая, что $p_1 = 1$. Алгоритм нахождения оценок максимального правдоподобия (ОМП) моментов появления и исчезновения состоит в поиске положения абсолютного максимума случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$ (5)

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \arg \sup_{\theta_1, \theta_2} L(\theta_1, \theta_2).$$

Следовательно, структура МП алгоритма оценивания не зависит от априорной плотности вероятности параметров θ_1 и θ_2 . Логарифм ФОП $L(\theta_1, \theta_2)$ (5) можно представить в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов $L_1(\theta_1)$ (7) и $L_2(\theta_2)$ (8). Следовательно,

положение максимума случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$ по переменной θ_1 совпадает с положением максимума случайного процесса $L_1(\theta_1)$, а по переменной θ_2 — с положением максимума процесса $L_2(\theta_2)$. В результате для ОМП моментов появления и исчезновения можно записать

$$\hat{\theta}_i = \arg \sup L_i(\theta_i), \quad (26)$$

где $i = 1; 2$. Структурная схема МП измерителя моментов появления и исчезновения выделена на рис. 3 штриховой линией, где обозначено: 1 и 1' — интеграторы на интервалах времени соответственно $[t_0, t]$, где $t \in [t_0, \theta_{2\max}]$, и $[\theta_{1\min}, t]$, где $t \in [\theta_{1\min}, t_0]$, 2 — линия задержки на время $t = t_0 - \theta_{1\min}$, 3 и 3' — устройства поиска положений абсолютных максимумов сигналов на интервалах $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$ и $[t_0, t_0 + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$. Эти положения являются ОМП моментов появления и исчезновения сигнала (1).

Точность оценок будем характеризовать без-условными рассеяниями (средними квадратами ошибок) оценок моментов появления и исчезновения:

$$V(\hat{\theta}_i) = \int_{\theta_{i\min}}^{\theta_{i\max}} V(\hat{\theta}_i|\theta) W_i(\theta) d\theta, \quad (27)$$

где $i = 1; 2$,

$$V(\hat{\theta}_i|\theta_{0i}) = \int_{\theta_{i\min}}^{\theta_{i\max}} (\theta_i - \theta_{0i})^2 W_i(\theta_i|\theta_{0i}) d\theta_i \quad (28)$$

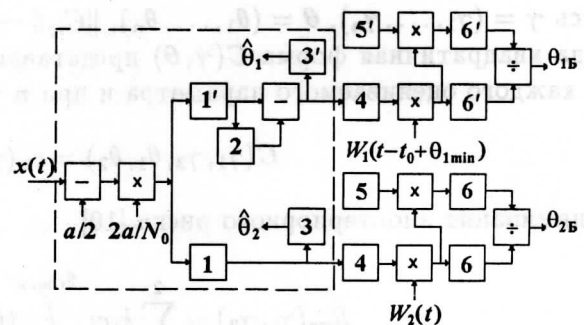


Рис. 3

— условные рассеяния ОМП моментов θ_1 и θ_2 , а $W_i(\theta_i|\theta_{0i})$ — условные плотности вероятностей ОМП моментов появления и исчезновения сигнала (1). Согласно [8] плотности вероятностей $W_i(\theta_i|\theta_{0i})$ могут быть выражены через функции (18):

$$W_i(\theta_i|\theta_{0i}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left[\frac{\partial F_{i1}(u, v, \theta_i)}{\partial u} \right]_{v=u} du. \quad (29)$$

Подставляя функции распределения (18) в (29), получаем точные выражения для плотностей вероятностей $W_i(\theta_i|\theta_{0i})$ в виде [9]

$$W_i(\theta_i|\theta_{0i}) = \frac{z^2}{2T_{\max}} \begin{cases} \Psi[z^2(\theta_{0i} - \theta_i)/(2T_{\max}), z^2\mu_i/2, z^2(\eta_i - \mu_i)/2], & \theta_{i\min} \leq \theta_i \leq \theta_{0i}; \\ \Psi[z^2(\theta_i - \theta_{0i})/2T_{\max}, z^2(\eta_i - \mu_i)/2, z^2\mu_i/2], & \theta_{0i} < \theta_i \leq \theta_{i\max}, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$\Psi(y, y_1, y_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}|y|^{3/2}} \left\{ \Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - y}{2}}\right) + \exp\left[-\frac{y_1 - y}{4}\right] / \sqrt{\pi(y_1 - y)} \right\} \times \\ \times \int_0^\infty \xi \exp\left[-\frac{(\xi + y)^2}{4y}\right] \left[\Phi\left(\frac{y + \xi}{\sqrt{2y_2}}\right) - \exp(-\xi) \Phi\left(\frac{y - \xi}{\sqrt{2y_2}}\right) \right] d\xi.$$

Используя (30), для рассеяний ОМП моментов появления и исчезновения (28) можем записать

$$V(\hat{\theta}_i|\theta_{0i}) = \frac{4T_{\max}^2}{z^4} \left[H\left(z^2(\eta_i - \mu_i)/2, z^2\mu_i/2\right) + H\left(z^2\mu_i/2, z^2(\eta_i - \mu_i)/2\right) \right], \quad (31)$$

где $H(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \xi^2 \Psi(\xi, x_1, x_2) d\xi$. Если θ_{0i} — внутренние точки априорных интервалов (2), то при достаточно больших ОСШ (19) находим асимптотическое выражение для рассеяний ОМП: $V(\hat{\theta}_i | \theta_{0i}) = 26T_{\max}^2 / z^4$, которое совпадает с асимптотическим рассеянием ОМП длительности прямоугольного импульса [6, 8, 9].

Рассмотрим байесовский алгоритм оценивания моментов появления и исчезновения [7]. При синтезе оценки одного параметра сигнала наиболее распространенной является квадратичная функция потерь [7]. При оценке n параметров сигнала аналогом квадратичной функции потерь служит квадратичная форма [10]

$$C(\gamma, \theta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} (\gamma_i - \theta_i) (\gamma_j - \theta_j).$$

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\|C_{ij}\|$ — некоторая числовая матрица. Пусть $C_{ij} = c_i \delta_{ij}$, тогда квадратичная форма $C(\gamma, \theta)$ представляет собой сумму квадратичных функций потерь для каждого оцениваемого параметра и при $n = 2$ запишется как

$$C(\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2) = c_1 (\gamma_1 - \theta_1)^2 + c_2 (\gamma_2 - \theta_2)^2. \quad (32)$$

Минимизация апостериорного риска [10]

$$R_{ps}(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{i=1}^2 k_i c_i \int_{\theta_i \min}^{\theta_i \max} (\theta_i - \gamma_i)^2 W_i(\theta_i) \exp[L_i(\theta_i)] d\theta_i, \quad (33)$$

где $k_i^{-1} = \int_{\theta_i \min}^{\theta_i \max} W_i(\theta_i) \exp[L_i(\theta_i)] d\theta_i$, $i = 1, 2$ — не зависящие от θ_1, θ_2 величины, равносильна минимизации средних квадратов ошибок (рассеяний) оценок. Положение минимума апостериорного риска (33) находим из решения системы уравнений $[\partial R_{ps}(\gamma_1, \gamma_2) / \partial \gamma_i]_{\gamma_i = \theta_{iB}} = 0$, где $i = 1, 2$,

$$\theta_{iB} = \frac{\int_{\theta_i \min}^{\theta_i \max} \theta_i W_i(\theta_i) \exp[L_i(\theta_i)] d\theta_i}{\int_{\theta_i \min}^{\theta_i \max} W_i(\theta_i) \exp[L_i(\theta_i)] d\theta_i}. \quad (34)$$

Поскольку оценки (34) не зависят от величин c_i , то без ограничения общности можно положить $c_1 = c_2 = 1$. Тогда риск [10]

$$R_B = \langle R_{ps}(\theta_{1B}, \theta_{2B}) \rangle = V(\theta_{1B}) + V(\theta_{2B}) \quad (35)$$

представляет собой сумму безусловных рассеяний байесовских оценок моментов появления и исчезновения. Точность ОМП моментов появления и исчезновения можно также характеризовать риском [10]

$$\hat{R} = \langle R_{ps}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \rangle = V(\hat{\theta}_1) + V(\hat{\theta}_2), \quad (36)$$

где безусловные рассеяния $V(\hat{\theta}_i)$ определены в (27).

Структурная схема байесовского алгоритма оценивания моментов появления и исчезновения изображена на рис. 3, из которого следует исключить блоки 3 и 3'. Здесь блоки 4 обозначают нелинейные элементы с экспоненциальной характеристикой, 5 и 5' — генераторы линейно меняющихся напряжений, пропорциональных t и $t - t_0$, с началами отсчёта времени соответственно $t = 0$ и $t = t_0$, 6 и 6' — интеграторы на интервалах времени соответственно $[\theta_{2 \min}, \theta_{2 \max}]$ и

$[t_0, t_0 + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$. Как видно из рис. 3, аппаратная реализация байесовского измерителя моментов появления и исчезновения несколько сложнее МП измерителя. Тем не менее, блок-схема байесовского измерителя является одноканальной по каждому оцениваемому параметру. Это существенно облегчает реализацию байесовского алгоритма оценки.

На рис. 4 приведены зависимости условного и безусловного рассеяний ОМП момента появления от отношения сигнал/шум z (19) для $\eta = 0,1$, $\eta_1 = \eta_2 = (1 - \eta)/2$ и априорных плотностей вероятности (25). Сплошной линией на рис. 4 показано безусловное рассеяние ОМП, рассчитанное по формуле (27), штриховой и штрих-пунктирной — условные рассеяния $V(\hat{\theta}_i|\theta_{0i})$, рассчитанные по формуле (31) при $\mu_1 = \mu_2 = (1 - 2\eta)/4$ (22) и $\mu_1 = \mu_2 = 0$ соответственно. Поскольку априорные интервалы (2) возможных значений моментов появления и исчезновения выбраны симметрично относительно точки t_0 и имеют одинаковую длину, то характеристики ОМП момента появления совпадают с характеристиками ОМП момента исчезновения.

На рис. 5 показаны зависимости риска (36) от ОСШ z (19) при использовании ОМП моментов появления и исчезновения сигнала (1) для $\eta_1 = \eta_2 = (1 - \eta)/2$, $\mu_1 = \mu_2 = (1 - 2\eta)/4$. Сплошная кривая соответствует значению $\eta = 0,1$, штриховая — $\eta = 0,25$.

Следует отметить, что теоретический анализ байесовского измерителя (как и байесовского обнаружителя) осуществить не удаётся. В связи с этим исследование эффективности байесовских алгоритмов обнаружения и оценки было выполнено методами статистического моделирования на ЭВМ.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Представим случайные процессы $L_1(\theta_1)$ (7) и $L_2(\theta_2)$ (8) в виде $L_i(\xi_i) = S_i(\xi_i, \xi_{0i}) + N_i(\xi_i)$, где $i = 1, 2$; $\xi_1 = (t_0 - \theta_1)/T_{\max}$, $\xi_2 = (\theta_2 - t_0)/T_{\max}$, $\xi_{01} = (t_0 - \theta_{01})/T_{\max}$, $\xi_{02} = (\theta_{02} - t_0)/T_{\max}$. Здесь $S_i(\xi_i, \xi_{0i}) = \langle L_i(\xi_i) \rangle = z^2 [\gamma_0 \min(\xi_i, \xi_{0i}) - \xi_i/2]$, $N_i(\theta_i) = (-1)^i (2a/N_0) \int_{t_0}^{\theta_i} n(t) dt$ — гауссовские случайные процессы с нулевыми средними значениями и дисперсиями $z^2 \xi_i$.

При моделировании вырабатывались отсчёты функций $N_i(\theta_i)$, где $i = 1, 2$. На основе сформированных дискретных отсчётов реализации этих процессов аппроксимировались ступенчатыми функциями с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\varepsilon = 0,1$. Согласно [11] случайные процессы $N_i(\theta_i)$ представляются своими дискретными отсчётами как $N_i(n\Delta\xi) = z\varepsilon \sqrt{\eta/2} \sum_{k=0}^n X_i[k]$, где $X_i[k]$ — гауссовские независимые случайные величины с нулевыми средними значениями и единичными дисперсиями. Таким образом, дискретные отсчёты случайных процессов (7) и (8) формировались с шагом $\Delta\xi_1 = \Delta\xi_2 = \Delta\xi = \eta\varepsilon^2/2$ в виде

$$L_i(n\Delta\xi) = \frac{\eta}{2} z^2 \varepsilon^2 [\gamma_0 \min(n, n_{0i}) - n/2] + z\varepsilon \sqrt{\eta/2} \sum_{k=0}^n X_i[k],$$

где $n_{0i} = \text{ent}(2\xi_{0i}/(\eta\varepsilon^2))$, $\text{ent}(x)$ — целая часть числа x . На основе дискретных отсчётов случайных процессов (7) и (8) вырабатывались величины (24) и (34):

$$I = \frac{\varepsilon^4 \eta^2}{2\eta_1 \eta_2} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_1(n\Delta\xi)] \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_2(n\Delta\xi)], \quad (37)$$

$$\xi_{1B} = \frac{t_0 - \theta_{1B}}{T_{\max}} = \frac{\varepsilon^2 \eta}{2} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} n \exp[L_1(n\Delta\xi)] / \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_1(n\Delta\xi)],$$

$$\xi_{2B} = \frac{\theta_{2B} - t_0}{T_{\max}} = \frac{\varepsilon^2 \eta}{2} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} n \exp[L_2(n\Delta\xi)] / \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_2(n\Delta\xi)],$$
(38)

где $n_{\min} = \text{ent}(1/\varepsilon^2)$, $n_{\max} = \text{ent}(1/(\eta\varepsilon^2))$.

Моделирование БО осуществлялось следующим образом. Формировалась величина I (37) при $\gamma_0 = 0$ и при $\gamma_0 = 1$ и сравнивалась с порогом p_0/p_1 . Если при $\gamma_0 = 0$ порог был превышен, то фиксировалась ошибка ложной тревоги. Если при $\gamma_0 = 1$ выполнялось условие $I < p_0/p_1$, то фиксировалась ошибка пропуска сигнала. В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала использовались относительные частоты появления соответствующих ошибок. При моделировании байесовского алгоритма оценивания формировались величины (38), которые являются нормированными байесовскими оценками моментов появления и исчезновения импульса (1). При этом истинные значения нормированных моментов появления и исчезновения выбирались либо фиксированными (при определении условных характеристик), либо случайными, распределёнными равномерно на интервале $[\eta/2, 1/2]$ (при определении безусловных характеристик). В процессе моделирования было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого z . Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений средней вероятности ошибки P_e и условного и безусловного рассеяний не более чем на 15 % при $P_e > 10^{-3}$ и $V(\hat{\theta}_i)/T_{\max}^2 > 10^{-3}$, где $i = 1; 2$.

Результаты моделирования приведены на рис. 2, 4 и 5. На рис. 2 нанесены экспериментальные значения средней вероятности ошибки БО, которые изображены квадратиками для $p_0 = 0,1$ и кружочками для $p_0 = 0,7$. Сравнение экспериментальных значений со сплошными кривыми на рис. 2 свидетельствует о практически полном совпадении характеристик обнаружения БО и МП обнаружителя с оптимизированным порогом. Это позволяет рекомендовать формулы (20) и (21) для расчёта вероятностей ошибки при использовании БО: $P_{eB} \approx \inf P_e(c)$.

На рис. 4 нанесены экспериментальные значения условных и безусловных рассеяний байесовской оценки момента появления: квадратиками обозначено безусловное рассеяние байесовской оценки момента появления, кружочками — условное рассеяние байесовской оценки при $\mu_1 = \mu_2 = (1 - 2\eta)/4$ (см. 22), крестиками — условное рассеяние байесовской оценки при $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Результаты моделирования байесовского измерителя и сравнение их с теоретическими формулами для характеристик МП измерителя показывают, что условное рассеяние байесовской оценки при $\mu_1 = \mu_2 = (1 - 2\eta)/4$ меньше условного рассеяния ОМП. Однако если $\mu_1 = \mu_2 = 0$, то при малых z условное рассеяние байесовской оценки меньше, а при больших z — больше условного рассеяния оценки максимального правдоподобия. Безусловное рассеяние байесовских оценок моментов появления и исчезновения меньше рассеяний ОМП при всех значениях отношения сигнал/шум. В частности, $\chi = V(\theta_{2B})/V(\hat{\theta}_2) = V(\theta_{1B})/V(\hat{\theta}_1) \approx 0,7$ при $z \geq 5$, что совпадает с аналогичным соотношением, полученным в [1, 12]. Если же отношение сигнал/шум мало ($z \leq 1$), то $\chi = V(\theta_{2B})/V(\hat{\theta}_2) = V(\theta_{1B})/V(\hat{\theta}_1) \approx 0,5$. При этом полученные значения χ практически не зависят от η .

На рис. 5 показаны экспериментальные значения риска (35) для $\eta = 0,1$ (кружочки) и $\eta = 0,25$ (квадратики). Как и следовало ожидать, риск при использовании байесовских оценок моментов появления и исчезновения меньше риска при использовании ОМП, что свидетельствует о более высокой точности байесовских оценок по сравнению с оценками максимального правдоподобия.

С увеличением длины априорных интервалов (2) значение риска возрастает, особенно при не-
больших ОСШ.

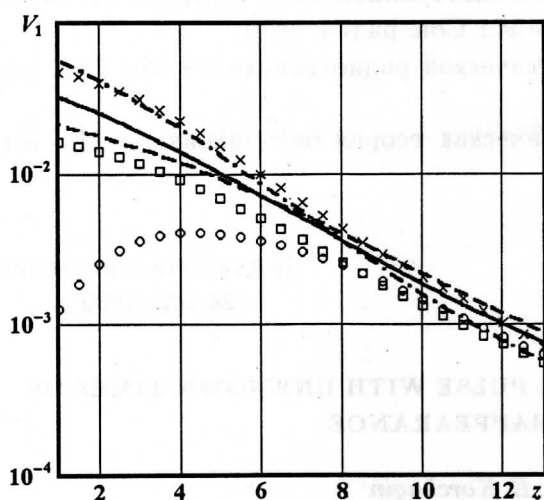


Рис. 4

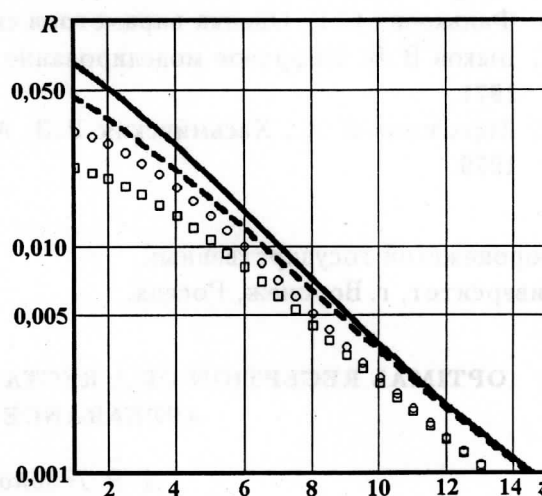


Рис. 5

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При одинаковом объёме априорной информации и равномерном распределении неизвестных моментов появления и исчезновения характеристики байесовского и максимально правдоподобного алгоритмов обнаружения практически совпадают. Следовательно, вместо относительно сложного байесовского обнаружителя можно использовать относительно простой максимально правдоподобный обнаружитель с оптимизированным порогом, т. к. средние вероятности ошибок этих двух алгоритмов практически одинаковы.

При оценке моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса, если не требуется очень высокая точность оценки, возможно применение максимально правдоподобного измерителя, более просто реализуемого аппаратурно. Если же необходимо обеспечить предельно достижимую точность оценки, то целесообразно использовать байесовский измеритель.

Приведённые результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трифонов А. П., Парфенов В. И., Мишин Д. В. // Изв. вуз. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 12. С. 1531.
2. Репин В. Г. // Проблемы передачи информации. 1991. Т. 27, вып. 1. С. 61.
3. Тартаковский А. Г. // Проблемы передачи информации. 1988. Т. 24, вып. 2. С. 39.
4. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32, № 6. С. 1241.
5. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34, № 5. С. 1024.
6. Трифонов А. П. Теория обнаружения сигналов. — М.: Радио и связь, 1984. — С. 12.
7. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978.

8. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986.
9. Трифонов А. П., Бутейко В. К. // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34, № 11. С. 2323.
10. Фалькович С. Е. Оценка параметров сигнала. — М.: Сов. радио, 1970.
11. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1971.
12. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979.

Воронежский государственный
университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила в редакцию
24 мая 1999 г.

OPTIMAL RECEPTION OF A RECTANGULAR PULSE WITH UNKNOWN TIMES OF APPEARANCE AND DISAPPEARANCE

A. P. Trifonov and Yu. E. Korchagin

We synthesize the maximum-likelihood and optimum (bayesian) algorithms of detection and estimation of appearance and disappearance times of a rectangular pulse in the white-noise background. The rigorous expressions for the characteristics of the maximum-likelihood algorithms are found. The characteristics of the bayesian algorithms are obtained using numerical simulations.