ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ТОМ 43

7-8

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2000

УДК 621.391

ТРИФОНОВ А. П., БЕСПАЛОВА М. Б.

ОБНАРУЖЕНИЕ ЦЕЛИ ПРИ ЗОНДИРОВАНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ РАЗРЫВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ*

Получены асимптотические выражения для характеристик максимально правдоподобно обнаружителя цели с неизвестными дальностью или скоростью.

В системах оптической локации широко применяются последовательности оптических импульсов [1—3] и др. В [3] найдены характеристики обнаружения цели с неизвестными дальностью и скоростью при зондировании последовательностью регулярных оптических импульсов, интенсивности которых описываются дифференцируемыми функциями. Однако реальные оптические импульсы часто имеют весьма короткие фронты, что позволяет успешно аппроксимировать их интенсивности разрывными функциями времени. Среди таких функций наиболее распространенной является аппроксимация в виде прямоугольного импульса [1, 2, 4]. В связи с чем рассмотрим характеристики обнаружения цели с неизвестными дальностью или скоростью при зондировании последовательностью прямоугольных оптических импульсов.

Положим, что излучается последовательность оптических импульсов с интенсивностью

$$s_N(t) = a \sum_{k=0}^{N-1} I\left\{\left[t - (k-\mu)\,\theta - \lambda\right] / \tau\right\}. \qquad (1)$$

Здесь $I(x) = 1$ при $|x| < 1/2$ и $I(x) = 0$ при $|x| > 1/2$, a — максимальная интенсивность импульсов, θ — период следования, τ — длительность одного импульса последовательности, а параметр μ определяет с какой точкой последовательности связано ее временное положения λ. Если $\mu = 0$, то λ — временное положение первого импульса последовательности. Если же $\mu = (N-1)/2$, то λ — временное положение середины последовательности (1).

* Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

интенсивностью (1), находится на расстоянии

$$R_0 \in [R_{min}, R_{max}] \quad (2)$$

и движется со скоростью

$$V_0 \in [-V_{max} / 2;\ V_{max} / 2], \quad (3)$$

причем $V_{max} << c$, где c — скорость света. Тогда интенсивность рассеянного целью сигнала будет иметь вид

$$s(t, R_0, V_0) = a \sum_{k=0}^{N-1} I\left\{[t - 2R_0/c - (k - \mu)\,\theta\,(1 + 2V_0/c)]/\tau\right\}. \quad (4)$$

Положим, что оптический сигнал с интенсивностью (4) наблюдается на фоне оптического шума с интенсивностью ν и интервал наблюдения $[0; T]$ больше длительности всей последовательности, т. е. $T > N\theta$. Тогда обработке доступна реализация $\pi'(t)$ пуассоновского процесса с интенсивностью $\nu + s(t, R_0, V_0)$ — при наличии цели и с интенсивностью ν — при отсутствии цели. Скважность последовательности (4) полагаем достаточно большой, так что отдельные импульсы не перекрываются. В этом случае логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) с точностью до несущественных постоянных определяется выражением [1—3]

$$L(R, V) = \sum_{k=0}^{N-1} \{\pi\,[2R/c + (k - \mu)\,\theta\,(1 + 2V/c) + \tau/2] -$$

$$-\pi\,[2R/c + (k - \mu)\,\theta\,(1 + 2V/c) - \tau/2]\} = \sum_{k=0}^{N-1} \pi_k(R, V). \quad (5)$$

Рассмотрим вначале характеристики обнаружения цели с неизвестной дальностью R_0 при априори известной скорости V_0. Согласно [5], решение о наличии цели с неизвестной дальностью, принимается, если

$$L_m > h \quad (6)$$

и решение об ее отсутствии, если $L_m < h$. Здесь порог h выбирается в зависимости от используемого критерия оптимальности обнаружения [5], а

$$L_m = \sup L(R),\ R \in [R_{min}; R_{max}], \quad (7)$$

$$L(R) = L(R, V_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \pi_k(R), \tag{8}$$

$$\pi_k(R) = \pi_k(R, V_0). \tag{9}$$

При отсутствии цели представим слагаемые (9) суммы (8) в виде

$$\pi_k(R) = \mu_\nu + x_k(R)\sqrt{\mu_\nu}. \tag{10}$$

Здесь $\mu_\nu = \nu\,\tau$ — среднее число шумовых точек за длительность импульса, а $x_k(R) = [\pi_k(R) - \langle \pi_k(R) \rangle] / \sqrt{\mu_\nu}$ — нормальная и центрированная шумовая функция в k-м периоде следования, причем

$$K_{xk}(R_1, R_2) = \langle x_k(R_1)\, x_k(R_2) \rangle = K_{x0}(R_1, R_2) =$$
$$= S(R_1, R_2) = \max\,[1 - 2\,|R_1 - R_2| / c\,\tau, 0\,]. \tag{11}$$

Используя представление (10) перепишем (8) в виде

$$L(R) = x(R)\sqrt{\mu_N} + \mu_N, \tag{12}$$

где

$$x(R) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(R) / \sqrt{N}, \tag{13}$$

$$\mu_N = N\,\mu_\nu. \tag{14}$$

Функция (13) является реализацией случайного процесса, первые два момента которого определяются выражением

$$\langle x(R) \rangle = 0,$$
$$K_x(R_1, R_2) = \langle x(R_1)\, x(R_2) \rangle = K_{x0}(R_1, R_2). \tag{15}$$

Эта формула получена в предположении, что априорный интервал возможных значений дальности (2) не превосходит интервал однозначного измерения дальности [6] так, что

$$R_{\max} - R_{\min} < c\,\theta / 2. \tag{16}$$

Согласно определению [5] вероятность ошибки 1-го рода (ложной тревоги) α_R имеет вид

$$\alpha_R = P\,[\sup L(R) > h\,] = 1 - P_{NR}(h / \sqrt{\mu_N} - \sqrt{\mu_N}),$$

$$R \in [R_{\min}, R_{\max}]. \tag{17}$$

Здесь $P_{NR}(H) = P[\sup x(R) < H]$ при $R \in [R_{\min}; R_{\max}]$ — функция распределения абсолютного (наибольшего) максимума стационарного случайного процесса (13). Если $\mu_N >> 1$ (14), то процесс (13) является приближенно гауссовским [1, 2]. Для стационарного гауссовского процесса, обладающего корреляционной функцией (11), (15) в [5] найдена аппроксимация функции распределения абсолютного максимума

$$P_{NR}(H) \cong \begin{cases} \exp[-m_R H \exp(-H^2/2)/\sqrt{2\pi}], & H \geq 1 \\ 0, & H < 1. \end{cases} \tag{18}$$

Здесь

$$m_R = 2(R_{\max} - R_{\min})/c\tau \tag{19}$$

и характеризует число элементов разрешения по дальности в априорном интервале (2). Подставляя (18) в (17), получаем приближенное выражение для вероятности ложной тревоги при обнаружении цели с неизвестной дальностью

$$\alpha_R \cong \alpha(m_R, u) = \begin{cases} 1 - \exp[-m_R u \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}], & u \geq 1 \\ 1, & u < 1. \end{cases} \tag{20}$$

Точность формулы (20) возрастает с увеличением нормированного порога

$$u = h/\sqrt{\mu_N} - \sqrt{\mu_N} \tag{21}$$

и величина m_R (19) и μ_N (14).

Для расчета вероятности ошибки 2-го рода (пропуска цели) с неизвестной дальностью β_R представим слагаемые (9) суммы (8) при наличии цели в виде

$$\pi_K(R) = \mu_\nu + \mu_\nu q S(R, R_0) + N_k(R)\sqrt{\mu_\nu}. \tag{22}$$

Здесь $q = a/\nu$ — отношение интенсивностей сигнала и фона, а $N_k(R) = [\pi_k(R) - \langle \pi_k(R) \rangle]/\sqrt{\mu_\nu}$ — нормированная и центрированная шумовая функция для одного импульса принимаемой последовательности с интенсивностью (4), причем

$$K_k(R_1, R_2) = \langle N_k(R_1) N_k(R_2) \rangle = K_0(R_1, R_2) =$$
$$= S(R_1, R_2) + q I[2(R_1 - R_2)/c\tau] I[2(R_1 - R_0)/c\tau] \times$$
$$\times I[2(R_2 - R_0)/c\tau] \{1 - 2[\max(R_0, R_1, R_2) - \min(R_0, R_1, R_2)]/c\tau\}. \tag{23}$$

В (22), (23) функция $S(R_1, R_2)$ определяется из (11). Используя представление (22), перепишем (8) при наличии цели в виде суммы сигнальной и шумовой функций [5]

$$L(R) = S(R) + N(R) + \mu_N, \tag{24}$$

$$S(R) = q\,\mu_N\,S(R, R_0), \tag{25}$$

$$N(R) = \sum_{k=0}^{N-1} N_k(R)\,\sqrt{\mu_\nu}. \tag{26}$$

Шумовая функция (26) является реализацией случайного процесса, первые два момента которого определяются выражениями

$$\langle N(R) \rangle = 0, \tag{27}$$

$$K(R_1, R_2) = \langle N(R_1)\,N(R_2) \rangle = \mu_N\,K_0(R_1, R_2).$$

Формулы (24) ... (27) получены в предположении, что априорный интервал возможных значений дальности (2) не превосходит интервала однозначного измерения дальности (16). Согласно (11), (25) сигнальная функция в (24) достигает максимума при $R = R_0$. Следовательно, выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для последовательности оптических импульсов с интенсивностью (4) будет равно [5]

$$z_N^2 = S^2(R_0) / K(R_0, R_0) = z^2\,N, \tag{28}$$

где

$$z^2 = \mu_s\,q / (1 + q) \tag{29}$$

— ОСШ для одного импульса последовательности, а $\mu_s = a\,\tau$ — среднее число сигнальных точек.

Согласно (11), длительность сигнальной функции (25) имеет величину $\Delta R = c\,\tau / 2$. Следовательно, в (24) сигнальная функция отлична от нуля лишь при $R \in R_s = [R_0 - \Delta R; R_0 + \Delta R]$. Соответственно, при

$$R \in R_N = \left\{[R_{\min}; R_0 - \Delta R]; [R_0 + \Delta R; R_{\max}]\right\}, S(R) = 0$$

и корреляционная функция (27) совпадает с (15). Поэтому если $R \in R_N$, то логарифм ФОП (24) при наличии цели совпадает с логарифмом ФОП (12) при отсутствии цели.

По определению [5], выражение для вероятности пропуска цели имеет вид

$$\beta_R = P\,[\sup L\,(R) < h\,],\ R \in [R_{\min};\ R_{\max}\,]. \tag{30}$$

Пусть $H_s = \sup L\,(R)$, $R \in R_s$ и $H_N = \sup L\,(R)$, $R \in R_N$. Положим далее, что априорный интервал возможных значений дальности (2) достаточно велик, так что

$$R_{\max} - R_{\min} >> \Delta\, R. \tag{31}$$

Тогда случайные величины H_s и H_N приближенно статистически независимы и (30) перепишется как

$$\beta_R \cong P\,(H_N < h)\,P\,(H_s < h). \tag{32}$$

Вероятность $P\,(H_N < h)$ можно вычислить аналогично [5]. При этом $P\,(H_N < h) \cong 1 - \alpha_R$ если выполняется (31) и, соответственно, $m_R >> 1$ (19).

Из (11), (25) и (23), (27) следует, что у сигнальной и корреляционной функций не существует второй производной по неизвестному параметру при $R = R_1 = R_2 = R_0$. Следовательно, оптический сигнал с интенсивностью (4) является разрывным по параметру R [5]. Если при не слишком малых ОСШ (28), $\mu_N >> 1$ (14), то найти вероятность $P\,(H_s < h)$ можно с помощью метода локально-марковской аппроксимации [5]. Применяя этот метод и используя результаты [4, 5], получаем

$$P\,(H_s < h) \cong \Phi\,(u\,/\,\sqrt{1+q} - z_N) - 2\exp\,[\kappa^2\,/\,2 - \kappa\,(u\,/\,\sqrt{1+q} - z_N)\,] \times$$
$$\times\,\Phi\,(u\,/\,\sqrt{1+q} - z_N - \kappa) + \exp\,[2\,\kappa^2 - 2\,\kappa\,(u\,/\,\sqrt{1+q} - z_N)\,] \times$$
$$\times\,\Phi\,(u\,/\,\sqrt{1+q} - z_N - 2\,\kappa). \tag{33}$$

Здесь $\kappa = 2\,z_N\,(1+q)\,/\,(2+q)$, $\Phi\,(\cdot)$ — интеграл вероятности [5], u — нормированный порог (21). Используя (20) и (33) для вероятности пропуска цели (30), (32) с неизвестной дальностью, получаем приближенное выражение

$$\beta_R \cong \beta\,(m_R,\,u) = \exp\,[-m_R\,u\,\exp\,(-u^2\,/\,2)\,/\,\sqrt{2\pi}\;] \times$$
$$\times\{\,\Phi\,(u\,/\,\sqrt{1+q} - z_N) - 2\exp\,[\kappa^2\,/\,2 - \kappa\,(u\,/\,\sqrt{1+q} - z_n)\,] \times$$
$$\times\,\Phi\,(u\,/\,\sqrt{1+q} - z_N - \kappa) + \exp\,[2\,\kappa^2 - 2\,\kappa\,(u\,/\,\sqrt{1+q} - z_N)\,] \times$$
$$\times\,\Phi\,(u\,/\,\sqrt{1+q} - z_N - 2\,\kappa)\,\} \tag{34}$$

при $u \geq 1$ и $\beta_R = 0$ при $u < 1$. Точность приближенного выражения (34) улучшается с ростом порога h, ОСШ z_N^2 (28) и параметров μ_N (14), m_R (19).

Рассмотрим далее характеристики обнаружения цели с неизвестной скоростью V_0 при априори известной дальности цели R_0. Решение о наличии цели с неизвестной скоростью принимается согласно (6), где L_m (7) надо заменить на $L_m = \sup L(V)$, $V \in [-V_{\max}/2; V_{\max}/2]$. Здесь

$$L(V) = L(R_0, V) = \sum_{k=0}^{N-1} \pi_k(V), \qquad (35)$$

$$\pi_k(V) = \pi_k(R_0, V). \qquad (36)$$

При отсутствии цели представим слагаемые (36) суммы (35) в виде

$$\pi_k(V) = \mu_\nu + x_k(V)\sqrt{\mu_\nu}. \qquad (37)$$

Здесь $x_k(V) = [\pi_k(V) - \langle \pi_k(V) \rangle] / \sqrt{\mu_\nu}$ — нормированная и центрированная шумовая функция в k-м периоде следования, причем

$$K_{xk}(V_1, V_2) = \langle x_k(V_1)\, x_k(V_2) \rangle = S_k(V_1, V_2) =$$
$$= \max [1 - 2\,|(V_1 - V_2)(k - \mu)|\,\theta / c\,\tau, 0]. \qquad (38)$$

Используя представление (37) перепишем (35) в виде

$$L(V) = x(V)\sqrt{\mu_N} + \mu_N, \qquad (39)$$

где

$$x(V) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(V) / \sqrt{N}. \qquad (40)$$

Шумовая функция (40) является реализацией случайного процесса, для которого $\langle x(V) \rangle = 0$,

$$K_x(V_1, V_2) = \langle x(V_1)\, x(V_2) \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} K_{xk}(V_1, V_2) / N. \qquad (41)$$

Если $|V_1 - V_2| < c\,\tau / 2\,\theta\,(N-1)$, то выполняя суммирование в (41), получаем для корреляционной функции логарифм ФОП (35) при отсутствии цели выражения

$$K_x(V_1, V_2) = 1 - 2\,|V_1 - V_2|\,\theta A / N c\,\tau. \qquad (42)$$

Здесь

$$A = \sum_{k=0}^{N-1} | k - \mu | = [(N-1)/2 - \mu]^2 + (N^2 - 1)/4 + \{|\mu|\} (1 - \{|\mu|\}), \quad (4$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x. Сопоставляя (11), (15) и (42), приближенно выражение для вероятности ложной тревоги α_V при обнаружении цели с неизвестной скоростью можно записать в виде

$$\alpha_V \cong \alpha (m_V, u). \quad (44$$

Здесь $\alpha (m, u)$ определяется из (20), а

$$m_V = 2 V_{\max} \theta A / c \tau N \quad (45$$

и характеризует число элементов разрешения по скорости в априорном интервале (3). Точность формулы (44) возрастает с увеличением номированного порога u (21) и величин μ_N (14), m_V (45).

Для расчета вероятности ошибки 2-го рода (пропуска цели с неизвестной скоростью) β_V представим слагаемые (36) суммы (35) при наличии цели в вид

$$\pi_k (V) = \mu_\nu + \mu_\nu q S_k (V, V_0) + N_k (V) \sqrt{\mu_\nu}. \quad (46$$

Здесь $S_k (V, V_0)$ определяется из (38), а $N_k (V) = [\pi_k (V) - \langle \pi_k (V) \rangle] / \sqrt{\mu_\nu}$ — нормированная и центрированная шумовая функция для одного импульс принимаемой последовательности с интенсивностью (4), причем

$$K_k (V_1, V_2) = \langle N_k (V_1) N_k (V_2) \rangle = S_k (V_1, V_2) +$$
$$+ q I [2 (k - \mu) \theta (V_1 - V_2) / c \tau] I [2 (k - \mu) \theta (V_1 - V_0) / c \tau] \times$$
$$\times I [2 (k - \mu) \theta (V_2 - V_0) / c \tau] \{ 1 - 2 [\max (V_0, V_1, V_2) -$$
$$- \min (V_0, V_1, V_2)] | k - \mu | \theta / c \tau.$$

Используя представление (46), перепишем (35) при наличии цели в виде суммы сигнальной и шумовой функций [5]

$$L (V) = S (V) + N (V) + \mu_N, \quad (47$$

$$S (V) = \mu_\nu q \sum_{k=0}^{N-1} S_k (V, V_0), \quad (48)$$

$$N (V) = \sum_{k=0}^{N-1} N_k (V) \sqrt{\mu_\nu}. \quad (49)$$

Шумовая функция (49) является реализацией центрированного случайного процесса, корреляционная функция которого определяется выражением

$$K(V_1, V_2) = \langle N(V_1)\, N(V_2) \rangle = \mu_\nu \sum_{k=0}^{N-1} K_k(V_1, V_2). \tag{50}$$

Согласно (38), (48) сигнальная функция в (47) достигает максимума при $V = V_0$. Следовательно, выходное ОСШ для последовательности оптических импульсов с интенсивностью (4) будет равно z_N^2 (28).

Обозначим ΔV — длительность сигнальной функции $S(V)$, так что $S(V_0 \pm \Delta V) \cong 0$. Тогда в (47) сигнальная функция отлична от нуля лишь при $V \in V_s = [V_0 - \Delta V;\, V_0 + \Delta V]$. Соответственно, при

$$V \in V_N = \left\{[-V_{max}/2;\, V_0 - \Delta V],\, [V_0 + \Delta V;\, V_{max}/2]\right\},$$

$S(V) \cong 0$ и корреляционная функция (47) совпадает с (41), (42). Поэтому, если $V \in V_N$, то логарифм ФОП (47) при наличии цели, совпадает с логарифмом ФОП (39) при отсутствии цели.

По определению [5], выражение для вероятности пропуска цели с неизвестной скоростью имеет вид

$$\beta_V = P\,[\sup L(V) < h\,],\; V \in [-V_{max}/2;\, V_{max}/2\,]. \tag{51}$$

Пусть $H_s = \sup L(V)$, $V \in V_s$ и $H_N = \sup L(V)$, $V \in V_N$.

Положим, что априорный интервал возможных значений скорости (3) достаточно велик, так что

$$V_{max} >> \Delta V. \tag{52}$$

Тогда случайные величины H_s и H_N приближенно статистически независимы и (51) можно переписать как

$$\beta_V \cong P\,(H_N < h)\, P\,(H_s < h). \tag{53}$$

Вероятность $P(H_N < h)$ можно найти аналогично [5]. При этом, $P(H_N < h) \cong 1 - \alpha_V$, если выполняется (52) и, соответственно, $m_V >> 1$ (45).

Когда ОСШ (28) не слишком мало, вероятность $P(H_s < h)$ определяется поведением функций (48) и (50) в окрестности истинного значения скорости V_0. Если $\max\left\{|V_1 - V_2|, |V_1 - V_0|, |V_2 - V_0|, |V - V_0|\right\} < c\,\tau / 2\,\theta\,(N - 1)$, то выражения для сигнальной функции (48) и корреляционной функции (50) принимают вид

$$S(V) = q\,\mu_N (1 - 2\,|\,V - V_0\,|\,\theta A / N c \tau), \tag{54}$$

$$K(V_1, V_2) = \mu_N \{ 1 + q - 2\,|\,V_1 - V_2\,|\,\theta A / N c \tau -$$

$$-2q\,[\max (V_0, V_1, V_2) - \min (V_0, V_1, V_2)\,]\,\theta A / N c \tau\}, \tag{55}$$

где A определяется из (43). Из (54), (55) следует, что у сигнальной и корреляционной функций не существует второй производной по неизвестному параметру при $V = V_1 = V_2 = V_0$. Поэтому, оптический сигнал с интенсивностью (4) является разрывным по параметру V [5]. Если при не слишком малых ОСШ (28), $\mu_N >> 1$, то найти вероятность $P\,(H_s < h)$ можно с помощью метода локально-марковской аппроксимации [5]. Применяя этот метод и используя результаты [4, 5], приходим к выражению (33). Используя (33) и (44) для вероятности пропуска цели (51), (53) с неизвестной скоростью, получаем приближенное выражение

$$\beta_V \cong \beta\,(m_V, u), \tag{56}$$

где $\beta\,(m, u)$ определяется из (34), а m_V — из (45). Точность приближенной формулы (56) улучшается с ростом порога h, ОСШ z_N (28) и параметров μ_N (14), m_V (45).

Найденные асимптотически (с ростом ОСШ и числа элементов разрешения по дальности или скорости) точные выражения для характеристик обнаружения цели позволяют определить потери в эффективности обнаружения цели вследствие незнания ее дальности или скорости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Долинин Н. А., Терпугов А. Ф.* Статистические методы в оптической локации.— Томск : ТГУ, 1982.— 256 с.

2. *Воробьев В. И.* Оптическая локация для радиоинженеров.— М. : Радио и связь, 1983.— 176 с.

3. *Трифонов А. П., Беспалова М. Б.* Характеристики обнаружения цели при зондировании последовательностью оптических импульсов // Радиоэлектроника.— 1997.— Т. 40.— № 4.— С. 46—52. (Изв. высш. учеб. заведений).

4. *Трифонов А. П., Овчинникова Т. М.* Прием оптического сигнала с неизвестной задержкой // Радиоэлектроника.— 1989.— Т. 32.— № 8.— С. 24—29. (Изв. высш. учеб. заведений).

5. *Трифонов А. П.* Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами // Теория обнаружения сигналов.— М. : Радио и связь, 1984.— С. 12—89.

6. *Трифонов А. П., Беспалова М. Б.* Эффективность сверхширокополосного обнаружения и измерения дальности и скорости цели // Радиотехника и электроника.— 1997.— Т. 42.— № 4.— С. 451—456.

Воронежский госуниверситет.

Поступила в редакцию 20.07.99.