ISSN 0320-7102

4

АВТОМЕТРИЯ

2000

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 2000

УДК 621.391

А. П. Трифонов, Ю. Н. Прибытков

(Воронеж)

ОБНАРУЖЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННО ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ, ЗАТЕНЯЮЩИХ ФОН*

С учетом корреляционно-спектральных различий изображения и фона выполнены синтез и анализ алгоритмов обнаружения гауссовского изображения, основанных на аддитивной и аппликативной моделях взаимодействия изображения и фона.

В последние годы активно развиваются методы дистанционного наблюдения, при которых должна учитываться пространственная протяженность реальных объектов. Это объясняется существенно возросшей разрешающей способностью систем дистанционного наблюдения. Вопросы обнаружения пространственно протяженных объектов (ППО) рассматриваются в [1–6] и других работах. В [1–4] предполагается, что полезные и мешающие сигналы взаимодействуют аддитивно так, что поля, рассеянные ППО и подстилающей поверхностью, просто суммируются. Такая модель не учитывает проявляющихся на практике эффектов затенения фона. Результаты, полученные на основе ее использования, не в полной мере соответствуют экспериментальным данным. Это особенно заметно в коротковолновом диапазоне, где пространственная протяженность объектов имеет существенное значение. Лишь в [5, 6] учтено, что при наличии объекта он экранирует фон, т. е. используется аппликативная модель взаимодействия полезного изображения и фона. В [6] предполагается, что изображение представляет собой пуассоновское поле точек, что соответствует оптической локации. Изображения реальных объектов, полученные в результате активной или пассивной радиолокации, хорошо описываются гауссовскими полями [7]. Работа [5] посвящена задаче обнаружения гауссовского изображения на гауссовском фоне, но синтез и анализ алгоритма обнаружения выполнены в предположении статистической независимости отсчетов изображения в зоне анализа. Это не позволяет использовать корреляционно-спектральные различия полезного изображения и фона для повышения эффективности обнаружения.

Цель данной работы – синтез и анализ оптимального алгоритма обнаружения гауссовских случайных изображений ППО с учетом затенения фона и корреляционно-спектральных различий изображения и фона.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00090).

Пусть в двумерной области Ω доступна наблюдению реализация гауссовского случайного поля $x(\mathbf{r})$. Здесь $\mathbf{r}=(r_1, r_2)$ – радиус-вектор точки на плоскости, принадлежащей Ω. Положим, что при гипотезе H_i, $i=0,1$, поле $x(\mathbf{r})$ представляет собой сумму гауссовского двумерного случайного сигнала $\xi_i(\mathbf{r})$ с математическим ожиданием $a_i(\mathbf{r})$ и корреляционной функцией $B_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и гауссовского белого шума $n(\mathbf{r})$ с нулевым математическим ожиданием и односторонней спектральной плотностью N_0. Поля $\xi_i(\mathbf{r})$ и $n(\mathbf{r})$ считаем статистически независимыми. Таким образом, при гипотезе H_i

$$x(\mathbf{r})=\xi_i(\mathbf{r})+n(\mathbf{r}),$$
$$a_{xi}(\mathbf{r})=a_i(\mathbf{r}), \qquad B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=B_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)+N_0\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)/2, \tag{1}$$

где $a_{xi}(\mathbf{r})$ и $B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ – соответственно математическое ожидание и корреляционная функция наблюдаемого поля $x(\mathbf{r})$; $\delta(\mathbf{r})$ – дельта-функция.

Как известно [8, 9], для решения задач проверки простых гипотез H_0 и H_1 необходимо формировать функционал отношения правдоподобия (ФОП). В известной литературе приведены выражения для ФОП, когда при одной из гипотез $x(\mathbf{r})$ является реализацией гауссовского белого шума или при обеих гипотезах имеет нулевое математическое ожидание. Для реализации оптимальной обработки изображений необходимо получить ФОП в случае (1), когда наблюдаемое поле является коррелированным и обладает ненулевым математическим ожиданием при обеих гипотезах. Это можно сделать, если ввести в рассмотрение вспомогательную гипотезу H, при которой наблюдаемые данные являются реализацией гауссовского белого шума $n(\mathbf{r})$, т. е. $x(\mathbf{r})=n(\mathbf{r})$, $a_x(\mathbf{r})=0$, $B_x(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=N_0\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)/2$. Выражение для ФОП при проверке гипотезы H_i против альтернативы H для одномерного случая приведено в [8]. Обобщая этот результат на случай двумерного поля, получаем

$$\Lambda[H_i \mid H]=\exp\left\{\frac{1}{N_0}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}x(\mathbf{r}_1)x(\mathbf{r}_2)Q_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2+\int\limits_{\Omega}x(\mathbf{r})V_i(\mathbf{r})d\mathbf{r}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}a_i(\mathbf{r})V_i(\mathbf{r})d\mathbf{r}-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 d\lambda\int\limits_{\Omega}\theta_i(\mathbf{r},\mathbf{r},\lambda)d\mathbf{r}\right\}, \quad i=0,1. \tag{2}$$

Здесь $Q_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=\theta_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 1)$, а функция $\theta_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \lambda)$ – решение интегрального уравнения

$$\frac{N_0}{2}\theta_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \lambda)+\lambda\int\limits_{\Omega}\theta_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, \lambda)B_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)d\mathbf{r}=B_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tag{3}$$

$$V_i(\mathbf{r})=2\left[a_i(\mathbf{r})-\int\limits_{\Omega}a_i(\mathbf{r}_1)Q_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1\right]\Big/N_0. \tag{4}$$

Нетрудно показать, что ФОП при проверке гипотезы H_1 против H_0 может быть получен как отношение функционалов $\Lambda[H_1 \mid H]$ и $\Lambda[H_0 \mid H]$, т. е.

$$\Lambda[H_1 \mid H_0]=\Lambda[H_1 \mid H]/\Lambda[H_0 \mid H]. \tag{5}$$

При решении задач, связанных с обработкой случайных полей, часто вместо ФОП используют его логарифм:

$$L = \ln \Lambda[H_1 \mid H_0]. \tag{6}$$

Подставляя (2) при $i = 0,1$ в (5), а (5) в (6), получаем необходимое выражение для логарифма ФОП при проверке гипотезы H_1 против альтернативы H_0:

$$L = \frac{1}{N_0} \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} x(\mathbf{r}_1)x(\mathbf{r}_2)[Q_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - Q_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \int\limits_{\Omega} x(\mathbf{r})[V_1(\mathbf{r}) - V_0(\mathbf{r})]d\mathbf{r} -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[a_1(\mathbf{r})V_1(\mathbf{r}) - a_0(\mathbf{r})V_0(\mathbf{r})]d\mathbf{r} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 d\lambda \int\limits_{\Omega}[\theta_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \lambda) - \theta_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \lambda)]d\mathbf{r}. \tag{7}$$

При анализе эффективности обнаружения может оказаться полезной другая форма записи логарифма ФОП:

$$L = \frac{1}{N_0}\left\{ \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}[x(\mathbf{r}_1) - a_1(\mathbf{r}_1)][x(\mathbf{r}_2) - a_1(\mathbf{r}_2)]Q_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 - \right.$$

$$- \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}[x(\mathbf{r}_1) - a_0(\mathbf{r}_1)][x(\mathbf{r}_2) - a_0(\mathbf{r}_2)]Q_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 -$$

$$\left. - \int\limits_{\Omega}[x(\mathbf{r}) - a_1(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r} + \int\limits_{\Omega}[x(\mathbf{r}) - a_0(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r} \right\} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 d\lambda \int\limits_{\Omega}[\theta_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \lambda) - \theta_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \lambda)]d\mathbf{r}. \tag{8}$$

Положим далее, что при гипотезе H_1 поле $\xi_1(\mathbf{r})$ представляет собой смесь полезного случайного гауссовского сигнала $s(\mathbf{r})$ с гауссовской помехой $\nu(\mathbf{r})$, а при гипотезе H_0 поле $\xi_0(\mathbf{r})$ является только помехой $\nu(\mathbf{r})$, т. е.

$$H_1 : x(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) \oplus \nu(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}), \qquad H_0 : x(\mathbf{r}) = \nu(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}). \tag{9}$$

Здесь $\oplus$ – некоторая операция, описывающая взаимодействие сигнала и фона и не нарушающая гауссовости поля $\xi_1(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) \oplus \nu(\mathbf{r})$. Решение о наличии полезного сигнала $s(\mathbf{r})$ в наблюдаемой реализации $x(\mathbf{r})$ выносится на основе сравнения ФОП или его логарифма (7) с некоторым порогом h [8–11]. При превышении порога

$$L > h \tag{10}$$

принимают решение в пользу гипотезы H_1 (полезный сигнал есть), в противном случае

$$L < h \tag{11}$$

считают справедливой гипотезу H_0 (полезного сигнала нет).

Обычно [9, 10] при решении задач обнаружения эффективность алгоритма обнаружения характеризуют величинами вероятностей ошибки ложной тревоги α и ошибки пропуска сигнала β. Согласно определению [8, 9], можно записать:

$$\alpha = P[H_1 \mid H_0] = P[L > h \mid H_0], \tag{12}$$

$$\beta = P[H_0 \mid H_1] = P[L < h \mid H_1]. \tag{13}$$

Здесь $P[H_i \mid H_j]$, $i, j = 0, 1$, – вероятность принятия решения о справедливости гипотезы H_i, в то время как верна гипотеза H_j. Таким образом, для нахождения α и β необходимо определить вероятности превышения логарифмом ФОП (7) порога h (12) и непревышения (13) соответственно. Для этого необходимо располагать законом распределения случайной величины L при обеих гипотезах H_i, $i = 0, 1$.

Если площадь области наблюдения Ω существенно больше площади корреляции флуктуаций случайного изображения $s(\mathbf{r})$ и помехи $\nu(\mathbf{r})$, то распределение логарифма ФОП асимптотически сходится к гауссовскому [8, 10] и логарифм ФОП можно приближенно считать гауссовской случайной величиной.

Поскольку L является асимптотически гауссовской величиной, то достаточно найти его математическое ожидание m_i и дисперсию σ_i^2 при каждой из гипотез H_i, $i = 0, 1$. Вычисление первых двух моментов логарифма ФОП (8) приводит к выражениям

$$m_i = \langle L \mid H_i \rangle = \frac{1}{N_0} \Bigg\{ \iint_{\Omega\Omega} B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)[Q_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - Q_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 +$$

$$+ \iint_{\Omega\Omega} [a_{xi}(\mathbf{r}_1) - a_1(\mathbf{r}_1)][a_{xi}(\mathbf{r}_2) - a_1(\mathbf{r}_2)] Q_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 -$$

$$- \iint_{\Omega\Omega} [a_{xi}(\mathbf{r}_1) - a_0(\mathbf{r}_1)][a_{xi}(\mathbf{r}_2) - a_0(\mathbf{r}_2)] Q_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 - \int_{\Omega} [a_{xi}(\mathbf{r}) - a_1(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r} +$$

$$+ \int_{\Omega} [a_{xi}(\mathbf{r}) - a_0(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r} \Bigg\} - \frac{1}{2} \int_0^1 d\lambda \int_{\Omega} [\theta_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \lambda) - \theta_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \lambda)] d\mathbf{r}, \tag{14}$$

$$\sigma_i^2 = \langle (L - \langle L \rangle)^2 \mid H_i \rangle =$$

$$= \frac{4}{N_0^2} \Bigg[\frac{1}{2} \iiiint_{\Omega\Omega\Omega\Omega} B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) B_{xi}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)[Q_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - Q_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \times$$

$$\times [Q_1(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) - Q_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 + \iiiint_{\Omega\Omega\Omega\Omega} B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)[a_{xi}(\mathbf{r}_2) - a_1(\mathbf{r}_2)] \times$$

$$\times [a_{xi}(\mathbf{r}_4) - a_1(\mathbf{r}_4)] Q_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) Q_1(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 +$$

$$+ \iiiint_{\Omega\Omega\Omega\Omega} B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)[a_{xi}(\mathbf{r}_2) - a_0(\mathbf{r}_2)][a_{xi}(\mathbf{r}_4) - a_0(\mathbf{r}_4)] \times$$

$$\times Q_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)Q_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 -$$

$$-2\iiiint\limits_{\Omega\Omega\Omega\Omega} B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)[a_{xi}(\mathbf{r}_2) - a_1(\mathbf{r}_2)][a_{xi}(\mathbf{r}_4) - a_0(\mathbf{r}_4)]\times$$

$$\times Q_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)Q_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 +$$

$$+2\iiint\limits_{\Omega\Omega\Omega} B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)[a_{xi}(\mathbf{r}_2) - a_1(\mathbf{r}_2)][a_1(\mathbf{r}_3) - a_0(\mathbf{r}_3)]Q_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 -$$

$$-2\iiint\limits_{\Omega\Omega\Omega} B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)[a_{xi}(\mathbf{r}_2) - a_0(\mathbf{r}_2)][a_1(\mathbf{r}_3) - a_0(\mathbf{r}_3)]Q_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 +$$

$$\left. + \iint\limits_{\Omega\Omega} B_{xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)[a_1(\mathbf{r}_2) - a_0(\mathbf{r}_2)][a_1(\mathbf{r}_2) - a_0(\mathbf{r}_2)]d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \right]. \qquad (15)$$

Используя (14), (15) и гауссовскую аппроксимацию закона распределения величины L, можно найти асимптотические значения вероятности ложной тревоги (12) и вероятность пропуска сигнала (13):

$$\alpha = 1 - \Phi((h - m_0)/\sigma_0), \qquad (16)$$

$$\beta = \Phi((h - m_1)/\sigma_1). \qquad (17)$$

Здесь

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} \exp(-v^2/2)dv \qquad (18)$$

– интеграл вероятности.

Для обнаружения воспользуемся критерием Неймана – Пирсона [10], согласно которому порог h в формулах (10), (11) определяется по заданной вероятности ложной тревоги α. Найдем порог h из выражения (16) и подставим его в (17). В результате получаем

$$\beta = \Phi(\eta \operatorname{arc}\Phi(1 - \alpha) - z), \qquad (19)$$

где $\operatorname{arc}\Phi(y)$ – функция, обратная интегралу вероятности (18), а

$$\eta^2 = \sigma_0^2/\sigma_1^2, \qquad z = \Delta m/\sigma_1, \qquad \Delta m = m_1 - m_0. \qquad (20)$$

Обычно при решении задач обнаружения используют математическую модель аддитивного взаимодействия полезного сигнала $s(\mathbf{r})$ и фона [1–4]. Пусть реализация случайного поля $x(\mathbf{r})$ получена в результате дистанционного (активного или пассивного) наблюдения. Она включает в себя реализации случайного сигнала $s(\mathbf{r})$, рассеянного объектом (если он есть), пространственный шум $n(\mathbf{r})$ и фоновое излучение. Это излучение обусловлено рассеянием зондирующего сигнала подстилающей поверхностью, на которой находится обнаруживаемый объект [5, 6].

Пусть Ω_s – часть области Ω, занимаемая полезным изображением $s(\mathbf{r})$. Сигнал $s(\mathbf{r})$, фон $\nu(\mathbf{r})$ и белый шум $n(\mathbf{r})$ по-прежнему считаем статистически независимыми. Тогда (9) можно переписать в виде

$$H_1\colon x(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}, \Omega_s)s(\mathbf{r}) + \nu(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}), \tag{21}$$

$$H_0\colon x(\mathbf{r}) = \nu(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}). \tag{22}$$

Здесь

$$I(\mathbf{r}, \Omega) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Omega; \\ 0, & \mathbf{r} \overline{\in} \Omega. \end{cases} \tag{23}$$

Учитывая статистическую независимость всех рассматриваемых полей, запишем математическое ожидание и корреляционную функцию наблюдаемых данных $x(\mathbf{r})$ при обеих гипотезах (21), (22):

$$\begin{aligned} &H_1\colon a_{x1}(\mathbf{r}) = a_s(\mathbf{r})I(\mathbf{r}, \Omega_s) + a_\nu(\mathbf{r}), \\ &\quad B_{x1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = I(\mathbf{r}_1, \Omega_s)I(\mathbf{r}_2, \Omega_s)B_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + B_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + N_0\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2, \\ &H_0\colon a_{x0}(\mathbf{r}) = a_\nu(\mathbf{r}), \\ &\quad B_{x0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + N_0\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2, \end{aligned} \tag{24}$$

где $a_s(\mathbf{r})$, $a_\nu(\mathbf{r})$ – математические ожидания; $B_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и $B_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ – корреляционные функции сигнала и фона соответственно.

Далее будем считать, что флуктуации сигнала $s_0(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) - a_s(\mathbf{r})$ и фона $\nu_0(\mathbf{r}) = \nu(\mathbf{r}) - a_\nu(\mathbf{r})$ однородны на всей плоскости, частью которой является область наблюдения Ω. Поскольку области Ω_s и Ω ограничены, то флуктуации случайных полей, наблюдаемых в пределах этих областей, нельзя считать однородными. Предположим, что площади S_{Ω_s} и S_Ω областей Ω_s и Ω соответственно много больше площадей областей пространственной корреляции сигнала $s(\mathbf{r})$ и фона $\nu(\mathbf{r})$. Это позволяет приближенно полагать флуктуации сигнала $s_0(\mathbf{r})$ и фона $\nu_0(\mathbf{r})$ однородными в областях Ω_s и Ω, т. е. считаем, что внутри каждой из них справедливы выражения

$$B_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \qquad B_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_\nu(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{25}$$

Для того чтобы найти явный вид логарифма ФОП (7) или (8), необходимо решить уравнения (3), (4). Подставим (24) с учетом (25) в (3). Записывая (3) для областей Ω_s и Ω_F,

$$\Omega_s \cup \Omega_F = \Omega, \tag{26}$$

и заменяя пределы интегрирования на бесконечные, так как площади областей, занимаемые сигналом и фоном, много больше площадей областей корреляции сигнала и фона, можно приближенно решить уравнение с помощью преобразования Фурье [8]. В результате получаем

$$\theta_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \lambda) \approx$$

$$\approx \frac{1}{4\pi^2}\left\{ I(\mathbf{r}_1, \Omega_s)I(\mathbf{r}_2, \Omega_s)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s\rho_s(\omega) + q_\nu\rho_\nu(\omega)}{1 + \lambda[q_s\rho_s(\omega) + q_\nu\rho_\nu(\omega)]}\exp(j\omega(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))d\omega + \right.$$

$$+I(\mathbf{r}_1,\Omega_s)I(\mathbf{r}_2,\Omega_F)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{q_\nu\rho_\nu(\omega)}{1+\lambda[q_s\rho_s(\omega)+q_\nu\rho_\nu(\omega)]}\exp(j\omega(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2))d\omega+$$

$$+I(\mathbf{r}_1,\Omega_F)I(\mathbf{r}_2,\Omega_s)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{q_\nu\rho_\nu(\omega)}{1+\lambda q_\nu\rho_\nu(\omega)}\exp(j\omega(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2))d\omega+$$

$$\left.+I(\mathbf{r}_1,\Omega_F)I(\mathbf{r}_2,\Omega_F)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{q_\nu\rho_\nu(\omega)}{1+\lambda q_\nu\rho_\nu(\omega)}\exp(j\omega(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2))d\omega\right\}, \qquad (27)$$

$$\theta_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\lambda)\approx\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{q_\nu\rho_\nu(\omega)}{1+\lambda q_\nu\rho_\nu(\omega)}\exp(j\omega(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2))d\omega. \qquad (28)$$

Здесь

$$q_s=\frac{2G_s(0)}{N_0},\quad q_\nu=\frac{2G_\nu(0)}{N_0},\quad \rho_s(\omega)=\frac{G_s(\omega)}{G_s(0)},\quad \rho_\nu(\omega)=\frac{G_\nu(\omega)}{G_\nu(0)}, \qquad (29)$$

$G_s(\omega)$ и $G_\nu(\omega)$ – спектральные плотности флуктуаций сигнала и фона соответственно:

$$G_s(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_s(\mathbf{r})\exp(-j\omega\mathbf{r})d\mathbf{r},\qquad G_\nu(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_\nu(\mathbf{r})\exp(-j\omega\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

$\omega=(\omega_1,\omega_2)$ – вектор пространственных частот. Если подставить решения (27) и (28) в (4) и (7), то получим следующее выражение для логарифма ФОП:

$$L=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_s}y_a^2(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{2}{N_0}\int\limits_{\Omega_s}x(\mathbf{r})V_a(\mathbf{r})d\mathbf{r}-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\left\{\frac{1}{N_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{|a_s(\omega)-a_\nu(\omega)|^2}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)+q_s\rho_s(\omega)}-\frac{|a_\nu(\omega)|^2}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)}\right]d\omega+\right.$$

$$\left.+\frac{S_{\Omega_s}}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\left[1+\frac{q_s\rho_s(\omega)}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)}\right]d\omega\right\}, \qquad (30)$$

где

$$V_a(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{a_s(\omega)-a_\nu(\omega)}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)+q_s\rho_s(\omega)}-\frac{a_\nu(\omega)}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)}\right]\exp(j\omega\mathbf{r})d\omega,$$

$a_s(\omega)$ и $a_\nu(\omega)$ – пространственные спектры математических ожиданий сигнала и фона соответственно; $y_a(\mathbf{r})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(\mathbf{r}_1)H_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1$ – сигнал на выходе пространственного фильтра с импульсной характеристикой $H_a(\mathbf{r})$, на вход которого подается реализация случайного поля $x(\mathbf{r})$. Передаточная функция этого фильтра должна удовлетворять условию

$$|H_a(\omega)|^2 = 2q_s\rho_s(\omega)\big/[N_0(1+q_s\rho_s(\omega)+q_\nu\rho_\nu(\omega))(1+q_\nu\rho_\nu(\omega))].$$

Таким образом, для аддитивной модели взаимодействия сигнала и фона (21) найдено выражение для логарифма ФОП в случае, когда флуктуации сигнала и фона можно считать однородными гауссовскими случайными полями. Как уже отмечалось, аддитивная модель взаимодействия имеет существенный недостаток, состоящий в том, что она не учитывает эффект затенения фона объектом. Этот недостаток очевидным образом проявляется, если яркость полезного изображения меньше яркости фона. В этом случае яркость изображения в области Ω_s при наличии объекта должна быть меньше, чем при его отсутствии. Аддитивная же модель предполагает, что яркость изображения в области Ω_s при наличии объекта всегда больше, чем при его отсутствии, независимо от соотношения яркостей сигнала и фона.

Рассмотрим аппликативную модель взаимодействия сигнала и фона, которая учитывает эффект затенения фона ППО. Тогда фоновое излучение формируется только частью Ω_F области Ω, определяемой выражением (26), и (9) можно переписать в виде

$$H_1\colon x(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}, \Omega_s)s(\mathbf{r}) + I(\mathbf{r}, \Omega_F)\nu(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}), \tag{31}$$

$$H_0\colon x(\mathbf{r}) = \nu(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}). \tag{32}$$

Здесь $I(\mathbf{r}, \Omega)$ определяется согласно (23). Формула (31) является математическим выражением того факта, что в пределах части Ω_s области Ω поле $x(\mathbf{r})$ есть сумма сигнала и шума, а в пределах Ω_F является суммой фона и шума. Таким образом, в области, занимаемой полезным изображением (если оно есть), фон отсутствует.

Описанное аппликативное взаимодействие сигнала и фона не является ни линейным, ни аддитивным, однако оно не нарушает гауссовского характера распределения наблюдаемого поля $x(\mathbf{r})$.

Учитывая статистическую независимость всех рассматриваемых полей, запишем математическое ожидание и корреляционную функцию наблюдаемых данных $x(\mathbf{r})$ при обеих гипотезах (31), (32):

$$\begin{aligned}
H_1\colon\ & a_{x1}(\mathbf{r}) = a_s(\mathbf{r})I(\mathbf{r}, \Omega_s) + a_\nu(\mathbf{r})I(\mathbf{r}, \Omega_F),\\
& B_{x1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = I(\mathbf{r}_1, \Omega_s)I(\mathbf{r}_2, \Omega_s)B_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) +\\
& + I(\mathbf{r}_1, \Omega_F)I(\mathbf{r}_2, \Omega_F)B_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + N_0\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2,\\
H_0\colon\ & a_{x0}(\mathbf{r}) = a_\nu(\mathbf{r}),\\
& B_{x0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + N_0\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2.
\end{aligned} \tag{33}$$

Согласно (33), как и для аддитивной модели (21), флуктуации сигнала и фона в общем случае нельзя считать однородными, поскольку область Ω_s, занимаемая сигналом, ограничена и статистические характеристики фона зависят от области, в которой они рассматриваются (Ω_s или Ω_F). Предположим, что площади S_{Ω_s} и S_{Ω_F} областей Ω_s и Ω_F много больше площадей областей пространственной корреляции сигнала $s(\mathbf{r})$ и фона $\nu(\mathbf{r})$ соответственно. Это позволяет приближенно считать флуктуации случайных полей $s(\mathbf{r})$ и $\nu(\mathbf{r})$ однородными в областях Ω_s и Ω_F, т. е. полагаем, что внутри каждой из них выражения (25) справедливы.

Подставим (33) с учетом (25) в (3). Записывая (3) для областей Ω_s и Ω_F и заменяя пределы интегрирования на бесконечные, можно приближенно решить уравнение с помощью преобразования Фурье [8]. Находим

$$\theta_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \lambda) \approx \frac{1}{4\pi^2}\left\{ I(\mathbf{r}_1, \Omega_s) I(\mathbf{r}_2, \Omega_s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s \rho_s(\omega)}{1+\lambda q_s \rho_s(\omega)} \exp(j\omega(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) d\omega + \right.$$

$$\left. + I(\mathbf{r}_1, \Omega_F) I(\mathbf{r}_2, \Omega_F) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_\nu \rho_\nu(\omega)}{1+\lambda q_\nu \rho_\nu(\omega)} \exp(j\omega(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) d\omega \right\}, \qquad (34)$$

$$\theta_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \lambda) \approx \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_\nu \rho_\nu(\omega)}{1+\lambda q_\nu \rho_\nu(\omega)} \exp(j\omega(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) d\omega. \qquad (35)$$

Подставляя (34) и (35) в (7), получаем логарифм ФОП

$$L = \frac{1}{2}\int_{\Omega_s} y_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \frac{1}{2}\int_{\Omega_s} y_0^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{2}{N_0}\int_{\Omega_s} x(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d\mathbf{r} -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2}\left\{ \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|a_s(\omega)|^2}{1+q_s\rho_s(\omega)} - \frac{|a_\nu(\omega)|^2}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)} \right] d\omega + \frac{S_{\Omega_s}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[\frac{1+q_s\rho_s(\omega)}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)} \right] d\omega \right\}, \qquad (36)$$

где

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{a_s(\omega)}{1+q_s\rho_s(\omega)} - \frac{a_\nu(\omega)}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)} \right] \exp(j\omega\mathbf{r}) d\omega;$$

$y_i(\mathbf{r})$ – сигналы на выходах пространственных фильтров с импульсными характеристиками $H_i(\mathbf{r})$, на вход которых подается реализация случайного поля $x(\mathbf{r})$. Передаточные функции этих фильтров должны удовлетворять условиям

$$|H_1(\omega)|^2 = 2q_s\rho_s(\omega) / [N_0(1+q_s\rho_s(\omega))], \quad |H_0(\omega)|^2 = 2q_\nu\rho_\nu(\omega) / N_0(1+q_\nu\rho_\nu(\omega)).$$

Сравнивая выражения (36) и (30), видим, что для реализации алгоритма обнаружения, основанного на аппликативной модели взаимодействия сигнала и фона (аппликативный обнаружитель), необходимо применять два пространственных фильтра, а обнаружитель, основанный на аддитивной модели взаимодействия сигнала и фона (аддитивный обнаружитель), требует применения лишь одного пространственного фильтра. Первое слагаемое в (30) с точностью до постоянного коэффициента представляет собой энергию реализации профильтрованного поля. Увеличение энергии реализации наблюдаемого поля приводит к увеличению энергии реализации профильтрованного поля и, следовательно, к возрастанию логарифма ФОП в аддитивном обнаружителе. Это является неприемлемым в случае, когда энергия реализации наблюдаемого поля при наличии объекта меньше, чем при его отсутствии. Из формулы (36) видно, что учет эффектов затенения приводит к тому, что для формирования логарифма ФОП в аппликативном обнаружителе необходимо находить разность энергий реализации наблюдаемого поля на выходах двух фильтров. Эта разность в зависимости от энергетических и корреляционно-спектральных свойств наблюдаемых полей, определяющих передаточные функции фильтров, может как увеличиваться, так и уменьшаться с ростом энергии реализации наблюдаемого поля. Благодаря этому аппликативный обнаружитель работает адекватно в случае, если энергия наблюдаемого поля при наличии объекта меньше, чем при его отсутствии.

Обозначим $\mu_s = S_\Omega S_{\omega s}/4\pi^2$, $\mu_\nu = S_\Omega S_{\omega\nu}/4\pi^2$, где $S_{\omega s}$ и $S_{\omega\nu}$ – площади областей на плоскости частот, занимаемые спектральными плотностями сигнала $G_s(\omega)$ и помехи $G_\nu(\omega)$ соответственно; S_Ω – площадь области наблюдения.

При $\mu_s \to \infty, \mu_\nu \to \infty$ распределение логарифма ФОП сходится к гауссовскому [8, 10]. В дальнейшем будем полагать, что площадь области наблюдения S_Ω велика настолько, что $\mu_s \gg 1, \mu_\nu \gg 1$. Тогда логарифм ФОП можно приближенно считать гауссовской случайной величиной.

Сравним характеристики обнаружителей, основанных на аппликативной (36) и аддитивной (30) моделях взаимодействия, для случая, когда входная реализация представляет собой аппликативную смесь сигнала и фона (31), (32). Подставляя (34) и (35) в (14) и (15), получаем выражения для моментов логарифма ФОП, который синтезирован в предположении аппликативного взаимодействия сигнала и фона:

$$\Delta m = m_1 - m_0 = \frac{1}{4\pi^2}\left\{\frac{S_{\Omega s}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[q_s\rho_s(\omega) - q_\nu\rho_\nu(\omega)]^2}{(1+q_s\rho_s(\omega))(1+q_\nu\rho_\nu(\omega))}d\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}|a_s(\omega) - a_\nu(\omega)|^2\left[\frac{1}{1+q_s\rho_s(\omega)} + \frac{1}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)}\right]d\omega\right\},$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\frac{S_{\Omega s}}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{q_s\rho_s(\omega) - q_\nu\rho_\nu(\omega)}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)}\right]^2 d\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}|a_s(\omega) - a_\nu(\omega)|^2\frac{1+q_s\rho_s(\omega)}{[1+q_\nu\rho_\nu(\omega)]^2}d\omega\right\}, \tag{37}$$

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\frac{S_{\Omega s}}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{q_s\rho_s(\omega) - q_\nu\rho_\nu(\omega)}{1+q_s\rho_s(\omega)}\right]^2 d\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}|a_s(\omega) - a_\nu(\omega)|^2\frac{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)}{[1+q_s\rho_s(\omega)]^2}d\omega\right\}.$$

Для того чтобы получить моменты логарифма ФОП, синтезированного в предположении аддитивного взаимодействия сигнала и фона, подставим (27), (28) в (14), (15). Находим, что

$$\Delta m_a = m_{1a} - m_{0a} = \frac{1}{4\pi^2}\left\{\frac{S_{\Omega S}}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{q_s\rho_s(\omega)(q_s\rho_s(\omega) - q_\nu\rho_\nu(\omega))}{(1+q_\nu\rho_\nu(\omega)+q_s\rho_s(\omega))(1+q_\nu\rho_\nu(\omega))}d\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{N_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{|a_s(\omega)-a_\nu(\omega)|^2}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)} + \frac{|a_\nu(\omega)|^2 - |a_\nu(\omega)|^2}{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)+q_s\rho_s(\omega)}\right]d\omega\right\},$$

$$\sigma_{1a}^2 = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\frac{S_{\Omega S}}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{q_s^2\rho_s^2(\omega)(q_s\rho_s(\omega)+1)^2}{(1+q_\nu\rho_\nu(\omega)+q_s\rho_s(\omega))^2(1+q_\nu\rho_\nu(\omega))^2}d\omega + \right.$$

$$+ \frac{1}{N_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+q_s\rho_s(\omega))}{(1+q_\nu\rho_\nu(\omega)+q_s\rho_s(\omega))^2(1+q_\nu\rho_\nu(\omega))^2}\times \tag{38}$$

$$\left.\times|a_s(\omega)[1+q_\nu\rho_\nu(\omega)+q_s\rho_s(\omega)] - a_\nu(\omega)q_s\rho_s(\omega)|^2\,d\omega\right\},$$

$$\sigma_{0a}^2 = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\frac{S_{\Omega S}}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{q_s^2\rho_s^2(\omega)}{(1+q_\nu\rho_\nu(\omega)+q_s\rho_s(\omega))^2}d\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{N_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+q_\nu\rho_\nu(\omega)}{(1+q_\nu\rho_\nu(\omega)+q_s\rho_s(\omega))^2}|a_s(\omega)|^2\,d\omega\right\}.$$

Из формулы (37) видно, что разность Δm для аппликативного обнаружителя (36) принимает только неотрицательные значения. Следовательно, неограниченное увеличение отношения сигнал/шум z^2 (20) приводит к убыванию вероятности пропуска сигнала, т. е., согласно (19), $\beta \to 0$ при $z^2 \to \infty$. Для аддитивного обнаружителя (30) возможна ситуация, когда математическое ожидание логарифма ФОП при наличии объекта меньше, чем при его отсутствии. Это следует из формулы (38). Действительно, если, например, $a_s(\omega) \equiv a_\nu(\omega), \rho_s(\omega) \equiv \rho_\nu(\omega), q_\nu > q_s$, то в (38) $\Delta m_a < 0$. Если $\Delta m_a < 0$, то увеличение абсолютного значения разности математических ожиданий логарифма ФОП при наличии и отсутствии объекта и уменьшение дисперсии σ_{1a}^2 приводят к увеличению вероятности пропуска сигнала β. Действительно, если $\Delta m_a < 0$, то, согласно (19), $\beta \to 1$ при $z^2 \to \infty$. Поэтому алгоритм обнаружения, синтезированный для аддитивной модели при воздействии аппликативной смеси сигнала и фона, оказывается несостоятельным, если $\Delta m_a < 0$.

Таким образом, найдена структура оптимальных обнаружителей случайных изображений ППО, затеняющих фон, как для аддитивной, так и для аппликативной модели. Сформулированы условия состоятельности аддитивного обнаружителя. Полученные выражения позволяют найти выигрыш в эффективности обнаружения при использовании аппликативного обнаружителя, даже если аддитивный обнаружитель состоятелен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Островитянов Р. В., Басалов В. Ф.** Статистическая теория радиолокации протяженных объектов. М.: Радио и связь, 1982.
2. **Красильников Н. Н.** Теория передачи и восприятия изображений. М.: Радио и связь, 1986.
3. **Шелухин О. И.** Радиосистемы ближнего действия. М.: Радио и связь, 1989.
4. **Кондратенков Г. С., Потехин В. А., Реутов А. П., Феоктистов Ю. А.** Радиолокационные станции обзора Земли. М.: Радио и связь, 1983.
5. **Бычков А. А., Понькин В. А.** Обнаружение изображений пространственно протяженных затеняющих фон объектов // Автометрия. 1992. № 4. С. 33.
6. **Осецкая Г. А.** Обнаружение оптического изображения с неизвестными интенсивностью и площадью при наличии фона с неизвестной интенсивностью // Там же. С. 40.
7. **Перетягин Г. И.** Представление изображений гауссовыми случайными полями // Автометрия. 1984. № 6. С. 42.
8. **Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфенов В. И.** Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами /Под ред. А. П. Трифонова. Воронеж: ВГУ, 1991.
9. **Трифонов А. П.** Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами // Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984. С. 12.
10. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966.
11. **Васильев К. К., Драган Я. П., Казаков В. А. и др.** Прикладная теория случайных процессов и полей. Ульяновск: УлГТУ, 1995.

Воронежский государственный университет,
E-mail: trif@rf.main.vsu.ru

Поступила в редакцию
5 апреля 1999 г.