

Р5014
2000/45/8
62

195

Том 45, Номер 8

ISSN 0033-8494

Август 2000



РАДИОТЕХНИКА и ЭЛЕКТРОНИКА

Главный редактор
Ю.В. Гуляев

<http://www.maik.rssi.ru>



“НАУКА”

МАИК “НАУКА/ИНТЕРПЕРИОДИКА”

395

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ПРИЕМНИКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ СЛУЧАЙНОГО
ИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2000 г. А. П. Трифонов, В. И. Парфенов

Поступила в редакцию 01.10.98 г.

Получены асимптотические выражения для характеристик алгоритма максимального правдоподобия обнаружения и оценки параметров случайного импульса с неизвестными временем прихода, математическим ожиданием и средней мощностью. Работоспособность синтезированного алгоритма и границы применимости асимптотических выражений для его характеристик установлены посредством статистического моделирования на ЭВМ.

ВВЕДЕНИЕ

Следуя [1–3], под случайным импульсом будем понимать сигнал вида

$$s(t) = f[(t - \lambda_0)/\tau] \xi(t), \quad (1)$$

где $\xi(t)$ – реализация стационарного гауссовского случайного процесса с математическим ожиданием $\langle \xi(t) \rangle = a_0$ и спектром мощности (СМ) $G(\omega) = \gamma_0/(\omega/\Omega)$. Здесь γ_0 – величина, а Ω – ширина полосы частот СМ; $I(x) = 1$ при $|x| < 1/2$ и $I(x) = 0$ при $|x| > 1/2$. Такая аппроксимация СМ широко используется в практических приложениях статистической радиофизики и радиотехники [2, 3]. В выражении (1) $f(x)$ – модулирующая непрерывная детерминированная функция, нормированная так, что

$$\max f(x) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 1, \quad (2)$$

λ_0 и τ – время прихода и длительность случайного импульса соответственно.

Полагаем, что сигнал (1) наблюдается на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . В работе [1] исследована эффективность приема сигнала (1) в предположении, что не известно только время прихода λ_0 . Однако часто могут быть не известны также математическое ожидание a_0 и величина СМ γ_0 случайного процесса $\xi(t)$ [2, 3].

Рассмотрим прием сигнала (1) с неизвестными параметрами a_0 , γ_0 , λ_0 , полагая, что неизвестное время прихода импульса принимает значения из априорного интервала $[\Lambda_1; \Lambda_2]$. Для обнаружения сигнала (1) и оценки его параметров a_0 , γ_0 , λ_0 используем метод максимального правдоподобия. Устройство, реализующее этот метод, будем называть приемником максимального правдоподобия (ПМП) [1, 4]. Для случайного импульса с из-

вестными a_0 и γ_0 структура ПМП описана в [1]. Ниже найдены новая структура ПМП и ранее неизвестные асимптотические выражения для характеристик обнаружения и оценки параметров случайного импульса с неизвестными a_0 и γ_0 . Приведены результаты статистического моделирования ПМП на ЭВМ.

1. ВЫХОДНОЙ СИГНАЛ ПРИЕМНИКА
МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Пусть на вход ПМП в течение интервала времени $[0; T]$ поступает реализация $x(t) = s(t) + n(t)$ или $x(t) = n(t)$, причем $s(t)$ и $n(t)$ статистически не зависимы. По определению [4] ПМП формирует логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) $M(\lambda, a, \gamma)$ для всех $a, \gamma, \lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$, причем $0 < \Lambda_1 < \Lambda_2 \leq T$. Будем считать, что

$$\mu = \tau\Omega/4\pi \gg 1. \quad (3)$$

Тогда в соответствии с [1, 2] логарифм ФОП можно записать в виде

$$\begin{aligned} M(\lambda, a, \gamma) &= M(\eta\tau, a, \gamma) = \\ &= \mu \{ 2\gamma L_1(\eta) + 2a\sqrt{\tau N_0/\mu} L_0(\eta) - a^2\tau/\mu - \\ &\quad - (N_0 + 2\gamma) \ln(1 + 2\gamma/N_0) \} / (N_0 + 2\gamma). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\eta = \lambda/\tau$ – нормированное время прихода,

$$L_0(\eta) = \int_0^{\eta} x(t) f(t/\tau - \eta) dt / \sqrt{\mu\tau N_0}, \quad (5)$$

$$L_1(\eta) = \int_0^{\eta} y^2(t) f^2(t/\tau - \eta) dt / \mu N_0, \quad (6)$$

$y(t)$ – отклик фильтра с передаточной функцией $H(\omega)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t)$, причем $|H(\omega)|^2 = I(\omega/\Omega)$. Как известно [5], ПМП

принимает решение о наличии полезного сигнала, сравнивая величину M абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП (4) с порогом c . Величина порога c определяется в соответствии с выбранным критерием оптимальности. Согласно (4),

$$M = \sup_{a, \gamma, \lambda \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]} M(\lambda, a, \gamma) = \sup_{\eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]} L(\eta),$$

где $L(\eta) = \sup_{a, \gamma} M(\eta, a, \gamma)$, $\tilde{\Lambda}_i = \Lambda_i/\tau$, $i = 1, 2$. Логарифм ФОП (4) достигает максимума при

$$\begin{aligned} a &= \tilde{a}(\eta) = \sqrt{\mu N_0/\tau} L_0(\eta), \\ \gamma &= \tilde{\gamma}(\eta) = N_0[L_1(\eta) - L_0^2(\eta) - 1]/2. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), имеем

$$L(\eta) = \mu \{ L_1(\eta) - \ln[L_1(\eta) - L_0^2(\eta)] - 1 \}. \quad (8)$$

Как следует из сравнения выражений (4) и (8), аппаратная или программная реализация ПМП при неизвестных параметрах a_0 и γ_0 будет более сложной, чем в [1]. Это обусловлено наличием нелинейных преобразований функционалов (5) и (6) в выражении (8).

При наличии полезного сигнала (1) функционалы (5), (6) представим в виде $L_i(\eta) = S_i(\eta) + N_i(\eta)$, $i = 0, 1$, где $S_i(\eta) = \langle L_i(\eta) \rangle$ – регулярные, $N_i(\eta) = L_i(\eta) - \langle L_i(\eta) \rangle$ – шумовые составляющие, а усреднение выполняется по реализациям $x(t)$ при фиксированных $a_0, \gamma_0, \eta_0 = \lambda_0/\tau$. Учитывая (3), получаем

$$\begin{aligned} S_0(\eta) &= \delta F_{011}(0, \eta, \eta_0)/\sqrt{2}, \\ B_0(\eta_1, \eta_2) &= \langle N_0(\eta_1) N_0(\eta_2) \rangle = \\ &= [F_{110}(\eta_1, \eta_2, 0) + q_0 F_{112}(\eta_1, \eta_2, \eta_0)]/2\mu, \\ S_1(\eta) &= 1 + (q_0 + \delta^2/2) F_{022}(0, \eta, \eta_0), \\ B_1(\eta_1, \eta_2) &= \langle N_1(\eta_1) N_1(\eta_2) \rangle = \\ &= [F_{220}(\eta_1, \eta_2, 0) + (2q_0 + \delta^2) F_{222}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) + \\ &\quad + (q_0^2 + \delta^2 q_0) F_{224}(\eta_1, \eta_2, \eta_0)]/\mu. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$q_0 = 2\gamma_0/N_0; \quad \delta^2 = z_0^2/\mu; \quad z_0^2 = 2a_0^2\tau/N_0;$$

$$\begin{aligned} F_{nmk}(\eta_1, \eta_2, \eta_0) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^n(x - \eta_1) f^m(x - \eta_2) f^k(x - \eta_0) dx; \\ n, m, k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Если полезный сигнал (1) отсутствует, то для моментов функционалов (5), (6) имеем

$$\begin{aligned} \langle L_0(\eta) \rangle &= 0, \quad \langle L_0(\eta_1) L_0(\eta_2) \rangle = F_{110}(\eta_1, \eta_2, 0)/2\mu, \\ \langle L_1(\eta) \rangle &= 1, \quad \langle [L_1(\eta_1) - \langle L_1(\eta_1) \rangle] \times \\ &\quad \times [L_1(\eta_2) - \langle L_1(\eta_2) \rangle] \rangle = F_{220}(\eta_1, \eta_2, 0)/\mu. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом функционал $L_0(\eta)$ является гауссовским случайным процессом, а $L_1(\eta)$ – асимптотически (при $\mu \rightarrow \infty$) гауссовским. Функционал (8), тем не менее, является существенно негауссовским.

2. ОБНАРУЖЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА

Определим вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги) α и 2-го рода (пропуска сигнала) β [5] при обнаружении сигнала (1). Полагаем вначале, что полезный сигнал отсутствует. Тогда вероятность ложной тревоги можно записать в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= P[M > c] = \\ &= P \left\{ \sup_{\eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]} L(\eta) > c \right\} = 1 - P_N(c), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$P_N(c) = P[L(\eta) < c], \quad \eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2]. \quad (12)$$

Введем в рассмотрение малый параметр

$$\epsilon = 1/\sqrt{\mu} \ll 1. \quad (13)$$

Учитывая (10), перепишем выражение для функционала (8) при отсутствии сигнала:

$$\begin{aligned} L(\eta) &= \mu \{ \epsilon N_{10}(\eta) - \\ &\quad - \ln[1 + \epsilon N_{10}(\eta) - \epsilon^2 N_{00}^2(\eta)/2] \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь нормированные функции $N_{10}(\eta) = [L_1(\eta) - 1]/\sqrt{\mu}$; $N_{00}(\eta) = L_0(\eta)/\sqrt{2\mu}$, причем, согласно (10), $\langle N_{10}(\eta) \rangle = \langle N_{00}(\eta) \rangle = 0$; $\langle N_{10}^2(\eta) \rangle = F_{004}(0, 0, 0) = \mu^{-2}$; $\langle N_{00}^2(\eta) \rangle = 1$; $\langle N_{10}(\eta_1) N_{10}(\eta_2) \rangle = F_{220}(\eta_1, \eta_2, 0)$; $\langle N_{00}(\eta_1) N_{00}(\eta_2) \rangle = F_{110}(\eta_1, \eta_2, 0)$. Разложим (14) в ряд Маклорена по ϵ и ограничимся первым членом разложения, зависящим от реализации наблюдаемых данных. В результате, при $\epsilon \rightarrow 0$

$$L(\eta) \approx [N_{10}^2(\eta) + N_{00}^2(\eta)]/2. \quad (15)$$

Отметим, что $N_{00}(\eta)$ – гауссовский, а $N_{10}(\eta)$ – асимптотически (при $\mu \rightarrow \infty$) гауссовский стационарный процесс. Кроме того, они не коррелированы, так что $\langle N_{10}(\eta_1) N_{00}(\eta_2) \rangle = 0$. Тогда $L(\eta)$ (15) также является стационарным, но в отличие от [1] существенно негауссовским процессом.

Корреляционные функции стационарных процессов $N_{00}(\eta)$, $N_{10}(\eta)$ и $L(\eta)$ в силу (2), (10) достаточно быстро убывают при $|\eta_1 - \eta_2| \rightarrow \infty$. Поэтому можно считать, что с увеличением c распределение числа выбросов за уровень c реализации $L(\eta)$ (15) сходится к закону Пуассона [5–7]. Следовательно, для больших, но конечных c можно записать [5]

$$P_N(c) = P[L(\eta) < c] \approx \begin{cases} \exp[-m\P(c)], & c > c_0, \\ 0, & c < c_0, \end{cases} \quad (16)$$

$\eta \in [\bar{\Lambda}_1; \bar{\Lambda}_2]$

где $m = \bar{\Lambda}_2 - \bar{\Lambda}_1$; $\Pi(c)$ – среднее число выбросов реализации $L(\eta)$ за уровень c на единичном интервале определения неизвестного параметра: c_0 – наименьшее значение порога c , для которого при любых $\delta \rightarrow 0$ выполняется неравенство $\Pi(c) > \Pi(c + \delta)$.

Среднее число выбросов $\Pi(c)$ за уровень c найдено в Приложении. Отличие от известной методики определения $\Pi(c)$ [7] обусловлено тем, что процессы $N_{00}(\eta)$ и $N_{10}(\eta)$ в (15) имеют различные корреляционные функции.

Подставляя полученное в Приложении выражение (см. П.9) в (16), находим приближенное выражение для функции распределения величины абсолютного максимума логарифма ФОП:

$$P_N(c) = \begin{cases} \exp\left[-m\sqrt{\frac{ucw^2}{\pi}} I_0(c\sqrt{v}) \exp\left[-\frac{c}{2}(1+w^2)\right]\right], \\ c > 1/(1+w^2), \\ 0, & c < 1/(1+w^2), \end{cases} \quad (17)$$

точность которого возрастает с увеличением m и c . Согласно (11), (17), приближенное выражение для вероятности ложной тревоги приобретает вид:

$$\alpha = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-m\sqrt{\frac{c(\varphi_{10} + 4\varphi_{11})}{2\pi\varphi_{02}}} I_0[c(1/\varphi_{02} - 1)/2] \times \right. \\ \left. \times \exp[-c(1 + 1/\varphi_{02})/2] \right\}, & c > \varphi_{02}/(1 + \varphi_{02}), \\ 1, & c < \varphi_{02}/(1 + \varphi_{02}), \end{cases} \quad (18)$$

где

$$m = \bar{\Lambda}_2 - \bar{\Lambda}_1 = (\Lambda_2 - \Lambda_1)/\tau,$$

$$\varphi_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty} (df(x)/dx)^{2n} f^{2k}(x) dx,$$

$I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Отметим, что точность формулы (18) возрастает с увеличением m , c и μ . При этом,

чем меньшие значения принимает вероятность ложной тревоги (18), тем больше должен быть параметр μ (3). Последнее необходимо для обеспечения достаточной точности гауссовской аппроксимации распределения функционала (6).

Полагаем теперь, что полезный сигнал (1) присутствует на входе ПМП. Тогда вероятность пропуска сигнала (1)

$$\beta = P[M < c] = P\left\{\sup_{\eta \in [\bar{\Lambda}_1; \bar{\Lambda}_2]} L(\eta) < c\right\} = P[L(\eta) < c], \quad (19)$$

$\eta \in [\bar{\Lambda}_1; \bar{\Lambda}_2]$

Разобьем весь интервал возможных значений η на две подобласти:

$\Theta_s = (\eta^-; \eta^+)$, $\Theta_N = \{[\bar{\Lambda}_1; \eta^-]; [\eta^+; \bar{\Lambda}_2]\}$, где $\eta^- = \max(\bar{\Lambda}_1; \eta_0 - 1)$, $\eta^+ = \min(\bar{\Lambda}_2; \eta_0 + 1)$. Из выражения (9) следует, что при $\eta \in \Theta_N$ характеристики функционала (8) такие же, как и при отсутствии полезного сигнала на входе приемника (10). Введем обозначения $H_N = \sup L(\eta)$, $\eta \in \Theta_N$ и $H_s = \sup L(\eta)$, $\eta \in \Theta_s$. При $m \gg 1$ аналогично [5] запишем (19) как

$$\beta \approx P_N^*(c)P_s(c), \quad P_N^*(c) = P[H_N < c], \quad (20)$$

$$P_s(c) = P[H_s < c].$$

Поскольку характеристики функционала $L(\eta)$ в “шумовой” области Θ_N такие же, как и при отсутствии сигнала, можно приближенно записать

$$P_N^*(c) \approx P_N(c) = 1 - \alpha, \quad (21)$$

где вероятность α определяется выражением (18).

Определение функции распределения величины абсолютного максимума $L(\eta)$ в “сигнальной” области Θ_s в соответствии с методикой, изложенной в [1], невозможно. Действительно, для этого требуется, чтобы функционал $L(\eta)$ в сигнальной области Θ_s являлся гауссовским процессом. Из выражения (8) этого явно не следует. Поэтому поступим следующим образом. Рассмотрим нормированные функции $\hat{N}_i(\eta) = N_i(\eta)\sqrt{\mu}$, $i = 0, 1$, первые два момента которых при $\eta \in \Theta_s$ имеют вид

$$\langle \hat{N}_1(\eta) \rangle = \langle \hat{N}_0(\eta) \rangle = 0,$$

$$\langle \hat{N}_1^2(\eta) \rangle = F_{220}(\eta, \eta, 0) + (2q_0 + \delta^2)F_{222}(\eta, \eta, \eta_0) + (q_0^2 + q_0\delta^2)F_{224}(\eta, \eta, \eta_0), \quad (22)$$

$$\langle \hat{N}_0^2(\eta) \rangle = [F_{110}(\eta, \eta, 0) + q_0F_{112}(\eta, \eta, \eta_0)]/2$$

и ограничены при любых ϵ , если величины q_0 и δ конечны. Используя введенные обозначения,

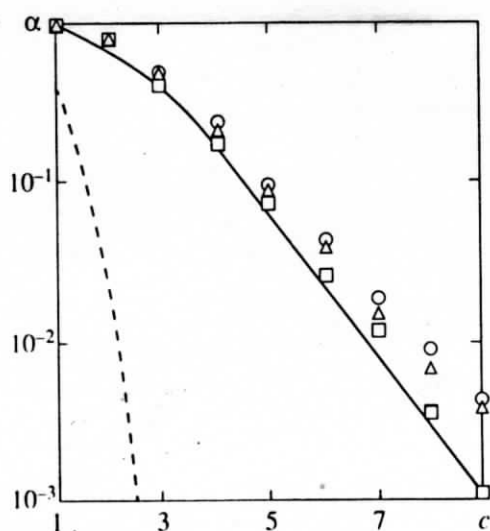


Рис. 1.

перепишем (8) в виде

$$L(\eta) = \mu \{ S_1(\eta) - 1 + \varepsilon \hat{N}_1(\eta) - \ln[S_1(\eta) + \varepsilon \hat{N}_1(\eta) - (S_0(\eta) + \varepsilon \hat{N}_0(\eta))^2] \}. \quad (23)$$

В выражении (23) сигнальные функции $S_1(\eta)$ и $S_0(\eta)$ (9) не обращаются в нуль при $\eta \in \Theta_s$. Разложим (23) в ряд Маклорена по ε и ограничимся первым членом разложения, зависящим от реализации наблюдаемых данных. Для (23) при $\eta \in \Theta_s$ получаем $L(\eta) = S(\eta) + N(\eta)$, где

$$S(\eta) = \mu \{ S_1(\eta) - 1 - \ln[S_1(\eta) - S_0^2(\eta)] \} \quad (24)$$

— сигнальная, а

$$N(\eta) = \mu \{ \hat{N}_1(\eta)[S_1(\eta) - S_0^2(\eta) - 1] + 2S_0(\eta)\hat{N}_0(\eta) \} / [S_1(\eta) - S_0^2(\eta)]$$

— шумовая функция [4]. Согласно (9), (24), функция $S(\eta)$ достигает максимума при $\eta = \eta_0$, если $\eta \in \Theta_s$. Введем в рассмотрение отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе ПМП для принятого сигнала [4]

$$\begin{aligned} z^2 = S^2(\eta_0) / \langle N^2(\eta_0) \rangle = \mu \{ [(\delta^2/2 + q_0)\Phi_{02} - \ln[1 + q_0\Phi_{02} + \delta^2(\Phi_{02} - 1)/2]] [1 + q_0\Phi_{02} + \delta^2(\Phi_{02} - 1)/2] \}^2 \{ [\Phi_{02} + \Phi_{03}(2q_0 + \delta^2) + \Phi_{04}(q_0^2 + \delta^2 q_0)] [q_0\Phi_{02} + \delta^2(\Phi_{02} - 1)/2]^2 + \delta^2(1 + q_0\Phi_{02}) + 2\delta^2(q_0\Phi_{02} + \delta^2(\Phi_{02} - 1)/2) \times \\ \times (\Phi_{02} + q_0\Phi_{03}) \}^{-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Обозначим

$$\eta_m = \operatorname{argsup} L(\eta), \quad \eta \in \Theta_s, \quad (26)$$

надежную оценку максимального правдоподобия (ОМП) параметра η_0 [4]. Тогда $H_s = L(\eta_m)$ и в (20)

$$P_s(c) = P[L(\eta_m) < c]. \quad (27)$$

Как показано в [4], $\eta_m \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом, когда $\mu \rightarrow \infty$. Следовательно, при выполнении (3), учитывая регулярность рассматриваемого сигнала, можем приближенно записать $P_s(c) = P[L(\eta_0) < c]$. Причем, учитывая разложение в ряд Маклорена по малому параметру (13), получаем, что при выполнении (3) $L(\eta_0)$ является асимптотически гауссовской случайной величиной с математическим ожиданием $\langle L(\eta_0) \rangle = S(\eta_0)$ и дисперсией $\sigma^2(\eta_0) = \langle N^2(\eta_0) \rangle$. Следовательно, приближенное значение вероятности (27)

$$P_s(c) = \Phi[c/\sigma(\eta_0) - z], \quad (28)$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности [5], а параметр z определен в (25). Подставляя (21), (28) в (20), получаем приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала:

$$\beta = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{m\sqrt{c(\Phi_{10} + 4\Phi_{11})}}{\sqrt{2\pi\Phi_{02}}} I_0[c(1/\Phi_{02} - 1)/2] \times \right. \\ \left. \times \exp[-c(1 + 1/\Phi_{02})/2] \right\} \Phi[c/\sigma(\eta_0) - z], & c > \Phi_{02}/(1 + \Phi_{02}), \\ 0, & c < \Phi_{02}/(1 + \Phi_{02}). \end{cases} \quad (29)$$

Точность формулы (29) возрастает с увеличением c , μ и z . При этом, чем меньшие значения принимает вероятность пропуска сигнала β (29), тем больше должен быть параметр μ (3).

Сравним характеристики обнаружения случайного импульса с неизвестными параметрами a_0, γ_0, λ_0 (18), (29) и импульса, у которого не известно только время прихода λ_0 [1]. На рис. 1 сплошной линией изображена зависимость $\alpha(c)$ (18), а штриховой линией — аналогичная зависимость, построенная по формуле (15) из [1] при условии, что $z_0 = 0, \mu = 100, q_0 = 0.1$ и $m = 10$. На рис. 2 приведена теоретическая зависимость вероятности пропуска сигнала β от параметра q_0 для различных значений μ и z_0^2 . Сплошные линии построены по формуле (29), а штриховые — по формуле (23) из [1]. На рис. 2а при $z_0^2 = 0$ кривые 1 построены для $\mu = 50$, кривые 2 — для $\mu = 100$. На рис. 2б при $\mu = 100$ кривые 1 построены для $z_0^2 = 0$, кривые 2 —

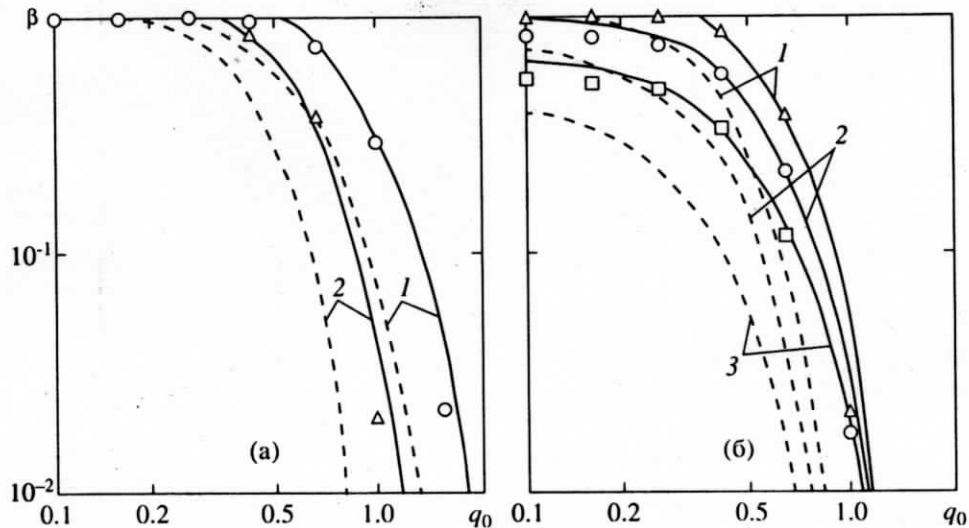


Рис. 2.

для $z_0^2 = 5$, кривые 3 – для $z_0^2 = 10$. Порог обнаружения с определяли по заданному уровню вероятности ложной тревоги $\alpha = 0.015$ из формулы (18) и соответственно из формулы (15) из [1]. Сравнение сплошных и штриховых кривых на рис. 1 и 2 свидетельствует о том, что априорное незнание параметров импульса (1) a_0, γ_0 приводит к существенному проигрышу в эффективности обнаружения. Очевидно, что этот проигрыш в эффективности обнаружения является платой за более адекватную модель сигнала, отвечающую реальным условиям наблюдения.

3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНОГО ИМПУЛЬСА

Рассмотрим характеристики ОМП параметров a_0, γ_0 и λ_0 случайного импульса (1). При этом будем полагать, что сигнал (1) присутствует с вероятностью 1. Согласно [4], оценка $\hat{\eta}$ нормированного параметра η_0 определяется как

$$\hat{\eta} = \operatorname{argsup} L(\eta), \quad \eta \in [\tilde{\Lambda}_1; \tilde{\Lambda}_2], \quad (30)$$

а оценки $\hat{a}$ и $\hat{\gamma}$ параметров a_0 и γ_0 – соответственно как

$$\hat{a} = \tilde{a}(\hat{\eta}), \quad \hat{\gamma} = \tilde{\gamma}(\hat{\eta}). \quad (31)$$

Найдем вначале характеристики ОМП $\hat{\eta}$ (30). Учтем, что в шумовой области Θ_N логарифм ФОР является стационарным процессом, и поэтому распределение аномальной оценки $\hat{\eta}$ является приближенно равномерным. Тогда, согласно [4], при $m = \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{\Lambda}_1 \gg 1$ условные смещение (систематическая ошибка) $d_\eta = \langle \hat{\eta} - \eta_0 | \eta_0 \rangle$ и рассея-

ние (средний квадрат ошибки) $V_\eta = \langle (\hat{\eta} - \eta_0)^2 | \eta_0 \rangle$ оценки $\hat{\eta}$ запишем в виде

$$d_\eta = P_0 d_0 + (1 - P_0) [(\tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2)/2 - \eta_0],$$

$$V_\eta = P_0 V_0 + (1 - P_0) [(\tilde{\Lambda}_1^2 + \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\Lambda}_2 + \tilde{\Lambda}_2^2)/3 - \eta_0(\tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2) + \eta_0^2]. \quad (32)$$

Здесь $d_0 = \langle \eta_m - \eta_0 | \eta_0 \rangle$ – условное смещение; $V_0 = \langle (\eta_m - \eta_0)^2 | \eta_0 \rangle$ – условное рассеяние надежной оценки η_m (26); P_0 – вероятность надежной оценки [4]. Полагаем, что выполняется условие (3) и $z \gg 1$.

При $\eta \in \Theta$, абсолютный максимум $L(\eta)$ расположен вблизи истинного значения параметра η_0 [4]. Тогда надежную ОМП η_m (26) параметра η_0 с учетом лишь первого приближения можно представить в виде [4]

$$\eta_m = \eta_0 + \varepsilon \eta_1, \quad (33)$$

где параметр ε определен в (13), а $\eta_1 = -dN(\eta)/d\eta/d^2S(\eta)/d\eta^2$ при $\eta = \eta_0$. Согласно [4], смещение и рассеяние надежной оценки η_m определяются выражениями

$$\begin{aligned} d_0 &= 0, \quad V_0 = \left\{ \frac{\partial^2 \langle N(\eta_1) N(\eta_2) \rangle}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \left[\frac{d^2 S(\eta)}{d\eta^2} \right]^{-2} \right\}_{\eta_0} = \\ &= \{ [\varphi_{11} + (2q_0 + \delta^2)\varphi_{12} + (q_0^2 + q_0\delta^2)\varphi_{13}] \times \\ &\times [\varphi_{02}(2q_0 + \delta^2) - \delta^2]^2 + \delta^2(\varphi_{10} + q_0\varphi_{11}) + \\ &+ 2\delta^2[(2q_0 + \delta^2)\varphi_{02} - \delta^2](\varphi_{11} + q_0\varphi_{12}) \} \{ \delta^2[(2q_0 + \\ &+ \delta^2)\varphi_{11} - \varphi_{10}] - (2q_0 + \delta^2)^2 \varphi_{11} \varphi_{02} \}^{-2} / \mu. \end{aligned} \quad (34)$$

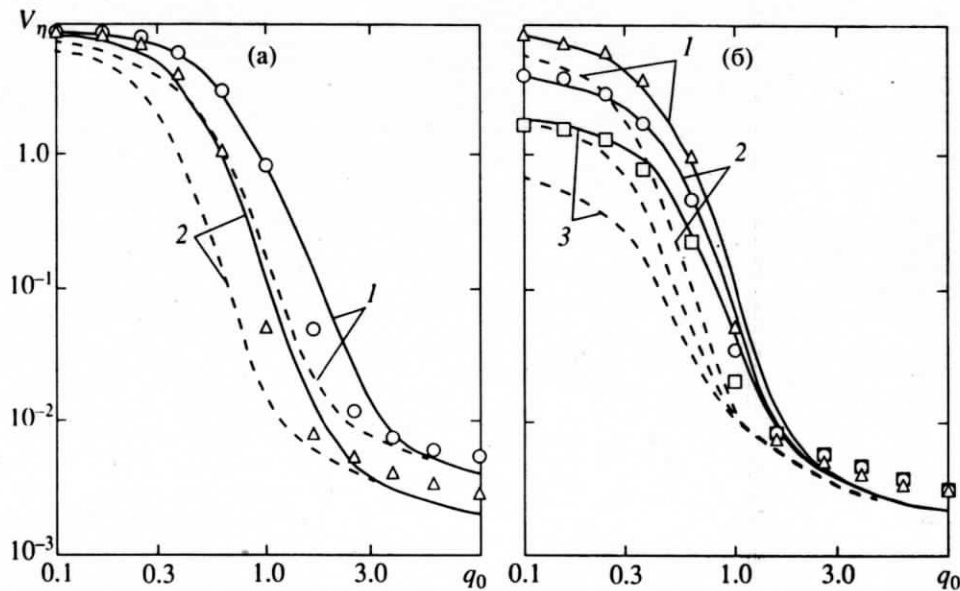


Рис. 3.

Аналогично [4, 5] при $m \gg 1$ можем записать вероятность надежной оценки $P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} P_N^*(x) dP_s(x)$. Отметим, что аппроксимация функции $P_N^*(x)$ (18), (21) в рассматриваемой задаче (21) существенно отличается от аналогичной аппроксимации, полученной в [1]. Воспользовавшись аппроксимациями (21), (28) функций $P_N^*(x)$ и $P_s(x)$ соответственно, имеем

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\eta_0)} \int_{\Phi_{02}/(1+\Phi_{02})}^{\infty} \exp\left\{-m \sqrt{\frac{x(\Phi_{10} + 4\Phi_{11})}{2\pi\Phi_{02}}} \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-\frac{x}{2}(1 + 1/\Phi_{02})\right] I_0[x(1/\Phi_{02} - 1)/2] - \right. \\ \left. - (x/\sigma(\eta_0) - z)^2/2\right\} dx. \quad (35)$$

Точность последней формулы возрастает с ростом μ (3) и z (25).

Рассмотрим, как влияет априорное незнание параметров a_0 и γ_0 на точность оценки нормированного времени прихода η_0 . С этой целью сравним условные рассеяния оценки $\hat{\eta}$ для известных и неизвестных значений параметров a_0 , γ_0 . На рис. 3 приведена теоретическая зависимость рассеяния оценки нормированного времени прихода V_η от параметра q_0 для разных значений μ , z_0^2 и $\eta_0 = (\tilde{\Lambda}_2 - \tilde{\Lambda}_1)/2$. Сплошными линиями показана зависимость (32), а штриховыми – аналогичная за-

висимость, построенная по формуле (29) из [1] при априори известных параметрах a_0 , γ_0 . На рис. 3а при $z_0^2 = 0$ кривые 1 построены для $\mu = 50$, кривые 2 – для $\mu = 100$. На рис. 3б при $\mu = 100$ кривые 1 построены для $z_0^2 = 0$, кривые 2 – для $z_0^2 = 5$, кривые 3 – для $z_0^2 = 10$. На рис. 4 представлена теоретическая зависимость вероятности аномальных ошибок $P_a = 1 - P_0$ от параметра q_0 . Сплошные линии построены по формуле (35), а штриховые – по формуле (30) из [1]. Кривые 1 и 2 соответствуют приведенным на рис. 3а. Из сравнения сплошных и штриховых кривых на рис. 3 и 4 следует, что априорное незнание параметров a_0 и γ_0 приводит к снижению точности оценки нормированного времени прихода, особенно при слабом сигнале ($q_0 < 1 \dots 3$), когда существенно влияние аномальных ошибок.

Исследуем характеристики ОМП $\hat{a}$ и $\hat{\gamma}$ (31). При больших z (25) аномальными ошибками можно пренебречь и ограничиться рассмотрением надежных оценок $\hat{\eta} \in \Theta_s$. В этом случае $\hat{\eta} = \eta_m$ можно представить в виде (33). Оценку математического ожидания a_0 случайного импульса в соответствии с (31) запишем как

$$\hat{a} = \tilde{a}(\hat{\eta}) = L_0(\hat{\eta}) \sqrt{\mu N_0 / \tau}. \quad (36)$$

Подставим (33) в (36) и разложим полученное выражение в ряд Маклорена по ϵ :

$$\hat{a} = \tilde{a}(\hat{\eta}) = \tilde{a}(\eta_0 + \epsilon \eta_1) = \\ = \tilde{a}(\eta_0) + \epsilon \eta_1 [d\tilde{a}(\eta)/d\eta]_{\eta_0} + \dots$$

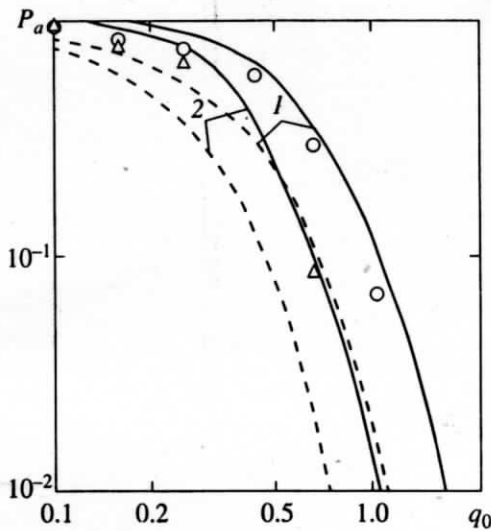


Рис. 4.

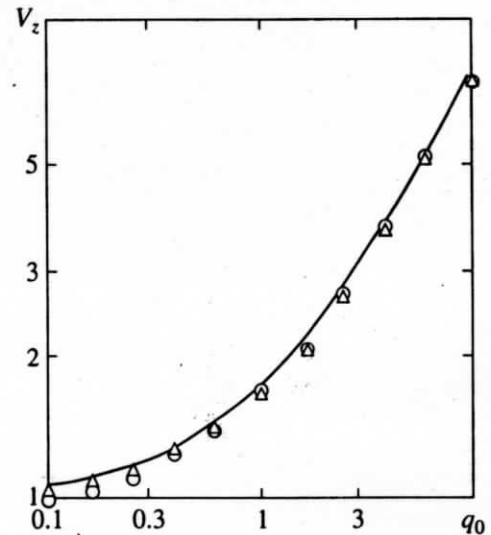


Рис. 5.

Учитывая лишь первое приближение, имеем для смещения и рассеяния ОМП параметра a_0 выражения

$$\begin{aligned} d_{a_0} &= \langle \hat{a} - a_0 \rangle \approx 0, \\ V_{a_0} &= \langle (\hat{a} - a_0)^2 \rangle \approx N_0(1 + q_0\Phi_{02})/2\tau. \end{aligned} \quad (37)$$

Аналогично в соответствии с (7) запишем $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}(\hat{\eta}) = N_0[L_1(\hat{\eta}) - L_0^2(\hat{\eta}) - 1]/2$, подставим сюда (33), разложим найденное выражение в ряд Маклорена по ϵ и ограничимся первым приближением. В результате усреднения получаем для смещения и рассеяния ОМП параметра γ_0 выражения

$$\begin{aligned} d_{\gamma_0} &= \langle \hat{\gamma} - \gamma_0 \rangle = (\Phi_{02} - 1)(q_0 + \delta^2/2) - \\ &- (1 + q_0\Phi_{02})/2\mu, \quad V_{\gamma_0} = \langle (\hat{\gamma} - \gamma_0)^2 \rangle = \\ &= q_0^2(1 - \Phi_{02})^2 + \delta^2 \left[q_0\Phi_{02}^2 - q_0\Phi_{02} + q_0 - 1 - \right. \\ &- \left. \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^3(x) dx \right)^2 (1 + q_0\Phi_{02}) \right] + \{ 1 + q_0^2(\Phi_{04} - \\ &- \Phi_{02}\Phi_{03} + \Phi_{02}) + q_0(1 + \Phi_{02} + \Phi_{03} - \Phi_{02}^2) \} / \mu. \end{aligned} \quad (38)$$

На рис. 5, 6 при $\mu = 100$ приведены теоретические зависимости нормированных рассеяний $V_z(q_0) = 2\tau V_{a_0}/N_0$ и $V_q(q_0) = 4V_{\gamma_0}/N_0$ оценок $\hat{a}$ и $\hat{\gamma}$ (31) соответственно, рассчитанные по формулам (37) и (38). Сплошная кривая на рис. 6 построена

для $z_0^2 = 0$, штриховая – для $z_0^2 = 5$, штрихпунктирная – для $z_0^2 = 10$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью проверки работоспособности синтезированного алгоритма и установления границ применимости найденных асимптотических формул для характеристик обнаружения и оценок выполнено статистическое моделирование ПМП на ЭВМ. При моделировании алгоритмов предполагали, что в (1) $\xi(t)$ – стационарный гауссовский случайный процесс с прямоугольным СМ $\gamma_0 J(\omega/\Omega)$, а модулирующая функция $f(x) = \exp(-\pi x^2/2)$.

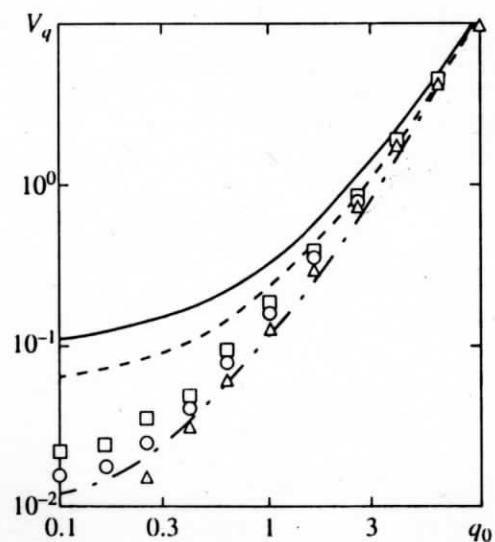


Рис. 6.

В процессе моделирования на интервале $[\bar{\Lambda}_1; \bar{\Lambda}_2]$ с шагом $\Delta\eta = 0.1$ формировались отсчеты реализаций случайного процесса $L(\eta)$ (8) как при отсутствии, так и при наличии сигнала (1) в реализации наблюдаемых данных $x(t)$. В рассматриваемых условиях относительная среднеквадратическая погрешность аппроксимации [8] реализации процесса $L(\eta)$ ступенчатыми функциями не превышала 10%. Для каждой реализации $x(t)$ находили величину наибольшего отсчета процесса (8) и сравнивали с порогом c . Если при отсутствии сигнала порог был превышен, фиксировалась ошибка ложной тревоги. Если при наличии сигнала наибольший отсчет процесса (8) оказывался меньше порога c , фиксировалась ошибка пропуска сигнала. В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала использовали относительные частоты появления соответствующих ошибок. Кроме того, в процессе моделирования вырабатывались отсчеты реализаций случайных процессов (7) при наличии сигнала в реализации $x(t)$. Далее, согласно (30), (31) определяли оценки $\hat{\eta}$, $\hat{a}$ и $\hat{\gamma}$ и находили рассеяния этих оценок.

Некоторые результаты статистического моделирования приведены на рис. 1–6. На рис. 1 нанесены экспериментальные значения вероятности ложной тревоги α для разных значений μ . Кружочками показаны экспериментальные значения для $\mu = 50$, треугольниками – для $\mu = 100$, квадратами – для $\mu = 200$. Отметим, что теоретическая зависимость (18) $\alpha(c)$ (сплошная линия на рис. 1) удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные значения вероятности ложной тревоги лишь для достаточно больших μ . На рис. 2а кружочками нанесены экспериментальные значения вероятности пропуска сигнала при $\mu = 50$, треугольниками – при $\mu = 100$. На рис. 2б экспериментальные значения вероятности пропуска сигнала обозначены треугольниками при $z_0^2 = 0$, кружочками при $z_0^2 = 5$, квадратами при $z_0^2 = 10$. Экспериментальная зависимость рассеяния оценки V_η от параметра q_0 приведена на рис. 3. Обозначения на рис. 3а соответствуют обозначениям на рис. 2а, а обозначения на рис. 3б – обозначениям на рис. 2б. На рис. 4 нанесены экспериментальные значения вероятности аномальных ошибок $P_a = 1 - P_0$ при изменении параметра q_0 . Обозначения на этом рисунке соответствуют обозначениям, приведенным на рис. 2а, 3а. На рис. 5 экспериментальные значения нормированных рассеяний $V_z(q_0)$ обозначены треугольниками для $z_0^2 = 0$ и кружочками для $z_0^2 = 5$. Экспериментальные значения для $z_0^2 = 5$ и $z_0^2 = 10$ совпадают в пределах погрешности эксперимента. На рис. 6 экспериментальная

зависимость $V_z(q_0)$ изображена треугольниками при $z_0^2 = 0$, кружочками при $z_0^2 = 5$ и квадратами при $z_0^2 = 10$.

Как следует из рис. 1–6, априорное незнание параметров a_0 и γ_0 случайного импульса приводит к заметному снижению эффективности обнаружения и оценки времени прихода. Теоретические формулы для вероятностей ошибок (18), (29) и рассеяний оценок (32), (34), (37), (38) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные, что позволяет обоснованно использовать полученные теоретические формулы при анализе ПМП случайного импульса с неизвестными параметрами.

Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Среднее число выбросов $\Pi(c)$ за уровень c для стационарного случайного процесса определяется выражением [7]

$$\Pi(c) = \int_0^\infty y W_2(c, y) dy, \quad (\text{П.1})$$

где $W_2(x, y)$ – совместная плотность вероятности значений $x = L(\eta)$ процесса (8) и его производной $y = dL(\eta)/d\eta$. Вычислим вначале характеристическую функцию для случайных величин x и y :

$$\Psi_2(u_1, u_2) = \langle \exp[ju_1 x + ju_2 y] \rangle.$$

Представим x и y в виде квадратичных форм $x = \vec{N}^+ \mathbf{Q}^{-1} \vec{N}/2$, $y = \vec{N}_1^+ \mathbf{Q}^{-1} \vec{N}$, где $\vec{N}^+$ – вектор-строка с компонентами $\|N_{00}(\eta), N_{10}(\eta)\|$; $\vec{N}_1^+$ – производная этой вектор-строки: $\mathbf{Q}$ – единичная матрица. Тогда выражение для характеристической функции перепишем в виде

$$\Psi_2(u_1, u_2) = \langle \exp\{ju_1 \vec{N}^+ \mathbf{Q}^{-1} \vec{N}/2 + ju_2 \vec{N}_1^+ \mathbf{Q}^{-1} \vec{N}\} \rangle. \quad (\text{П.2})$$

Для выполнения усреднения в этой формуле найдем совместную плотность вероятности векторов $\vec{N}$ и $\vec{N}_1$:

$$W_2(\vec{N}, \vec{N}_1) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\det \mathbf{A}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \vec{N} \\ \vec{N}_1 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbf{A}}^2 \right\}, \quad (\text{П.3})$$

где A – блочная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w^{-2} \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} u-v & 0 \\ 0 & u+v \end{bmatrix}.$$

Осуществляя усреднение в выражении (П.2) при помощи совместной плотности вероятности (П.3), получаем окончательное выражение для характеристической функции:

$$\Psi_2(u_1, u_2) = \{[1 - ju_1 + (u-v)u_2^2] \times$$

$$\times [1 - ju_1 w^{-2} + (u+v)w^{-2}u_2^2]\}^{-1/2}. \quad (\text{П.4})$$

Преобразование Фурье характеристической функции (П.4) дает совместную плотность вероятности процесса (15) и его производной:

$$W_2(x, y) = \frac{w}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-jzy - x[1 + w^2 + 2uz^2]/2\} \times$$

$$\times I_0[xv + xvz^2] dz. \quad (\text{П.5})$$

В выражениях (П.4) и (П.5) $u = \int_{-\infty}^{\infty} (df(x)/dx)^2 [1 + 4f^2(x)] dx/2$; $v = (w^2 - 1)/2$; $v = \int_{-\infty}^{\infty} (df(x)/dx)^2 [4f^2(x) - 1] dx/2$.

Подставляя (П.5) в (П.1), получаем выражение для среднего числа выбросов:

$$\Pi(c) = \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{w}{2\pi} y \times$$

$$\times \exp[-jzy - c(1 + w^2 + 2uz^2)/2] I_0(c v + c v z^2). \quad (\text{П.6})$$

Выполним вначале интегрирование в (П.6) по y . В соответствии с [9] $\int_0^{\infty} dy y \exp(-jzy) = -1/z^2 + j\pi\delta'(z)$, где $\delta'(z)$ – производная дельта-функция. Тогда выражение (П.6) примет вид

$$\Pi(c) = \frac{w}{2\pi} \exp[-c(1 + w^2)/2] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dz (-1/z^2 + j\pi\delta'(z)) \times$$

$$\times \exp(-cuz^2) I_0(c v + c v z^2) =$$

$$= -w \exp[-c(1 + w^2)/2] J/2\pi,$$

где

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-cuz^2) (I_0(c v + c v z^2)/z^2) dz. \quad (\text{П.8})$$

Анализ подынтегральной функции свидетельствует о том, что основной вклад в интеграл (П.8) вносит часть области интегрирования вблизи точки $z = 0$. Поэтому можно считать $I_0(c v + c v z^2) \approx I_0(c v)$ и выражение (П.8) приближенно переписать в виде $J \approx I_0(c v) \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(-cuz^2)/z^2) dz$. В соответствии с [10] главным значением (v. p.) по Коши интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} (f(z)/z^2) dz$ называется предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) \frac{f(z)}{z^2} dz = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z^2} dz.$$

Так как функция $f(z) = \exp(-cuz^2)$ дифференцируемая, то v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} (f(z)/z^2) dz = \int_{-\infty}^{\infty} ([f(z) - f(0)]/z^2) dz$. В данном случае

$$\text{v. p.} J = 2I_0(c v) \int_0^{\infty} ((\exp(-cuz^2) - 1)/z^2) dz =$$

$$= -2I_0(c v) \sqrt{\pi/c}.$$

С учетом последнего выражения и формулы (П.7) получаем, что при достаточно больших значениях порога c среднее число выбросов за этот порог определяется выражением

$$\Pi(c) = \sqrt{ucw^2/\pi} I_0(c v) \exp[-c(1 + w^2)/2]. \quad (\text{П.9})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трифонов А.П., Парфенов В.И. // РЭ. 1998. Т. 43. № 7. С. 828.
2. Бакут П.А., Большаков И.А., Герасимов Б.М. и др. Вопросы статистической теории радиолокации. Под ред. Тартаковского Г.П. Т. 1. М.: Сов. радио, 1963.
3. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 3. М.: Сов. радио, 1977.
4. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
5. Трифонов А.П. // Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984. С. 12–89.
6. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.
7. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1976.
8. Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1991.
9. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958.
10. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.