ISSN 0033-8486

РАДИОТЕХНИКА

9 2000

www.glasnet.ru/~zaoiprzhr/

В НОМЕРЕ:

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

РАДИОСИСТЕМЫ

Выпуск 47 Радиотехнические и информационные системы охраны и безопасности

ИПРЖР

Тел./факс: (095) 925-9241
E-mail: zaoiprzh@glasnet.ru
http: //www.glasnet.ru/~zaoiprzhr/

УДК621.391

Обработка рандомизированной импульсной несущей при наличии неинформативных параметров

А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова

Выполнен синтез максимально правдоподобной оценки периода следования; методом локально-марковской аппроксимации найдены характеристики оценки.

Maximum likelihood estimation of repetition period are synthesized. Characteristics of this estimation are found by method of local-Marcov approximation.

В системах передачи информации в качестве несущего колебания часто используются периодические последовательности вида [1]

$$s_0(t,\theta) = a\sum_{k=0}^{N-1} I[(t-k\theta)/\tau], \tag{1}$$

где θ – период следования, посредством модуляции которого передается информация; a и τ – амплитуда и длительность k- го импульса, $I(x)=1$ при $|x|<\frac{1}{2}$ и $I(x)=0$ при $|x|>\frac{1}{2}$.

В [2] для повышения скрытности передачи информации предложено рандомизировать импульсную несущую (1) введением мультипликативных стохастических гауссовских искажений. Тогда полезный сигнал представляет собой последовательность из N прямоугольных импульсов, искаженных модулирующей помехой,

$$s(t,\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(t) I[(t-k\theta)/\tau], \tag{2}$$

где $\xi_k(t)$ – стационарный гауссовский случайный процесс, обладающий моментами

$$\langle \xi_k(t)\rangle = a, \quad \langle \xi(t)\xi(t+\lambda)\rangle - a^2 = K(\lambda). \tag{3}$$

Кроме информативного параметра θ, подлежащего оценке, рандомизированная импульсная несущая может содержать неизвестные параметры, в оценке которых нет необходимости. Такие параметры называют неинформативными. В [3] рассмотрена обработка рандомизированной импульсной несущей, когда для синтеза алгоритма оценки периода следования используются некоторые ожидаемые (прогнозируемые) значения неинформативных параметров. Повысить эффективность обработки можно, заменяя неизвестные значения неинформативных параметров на их оценки максимального правдоподобия (ОМП) [4].

Ц е л ь р а б о т ы – *синтез и анализ максимально правдоподобных алгоритмов обработки рандомизированной импульсной несущей при наличии неинформативных параметров.*

Рассмотрим вначале случай, когда неинформативным параметром является математическое ожидание a (3) рандомизирующего случайного процесса $\xi_k(t)$. В соответствии с методом максимального правдоподобия [4], для получения оценки периода следования необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП). Положим, что рандомизированная импульсная несущая (2) наблюдается в течение интервала времени $[0, T]$ на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0; интервал наблюдения больше длительности всей последовательности, т.е. $T>N\theta$; скважность последовательности не слишком мала и длительность τ импульсов последовательности значительно больше времени корреляции процессов $\xi_k(t)$, так что

$$\mu = \frac{\tau\Omega}{4\pi} >> 1, \tag{4}$$

где $\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega)d\omega / \sup G^2(\omega)$ – эквивалентная полоса частот стохастической модуляции, $G(\omega)$ – ее спектральная плотность.

При выполнении (4) и перечисленных условий, повторяя выкладки [5], логарифм ФОП можем записать в виде

$$L(\theta,a)=\frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}\left[Y_k(\theta)+\frac{2a}{1+q}X_k(\theta)\right]-\frac{Na^2\tau}{N_0(1+q)}, \tag{5}$$

где

$$Y_k(\theta)=\int\limits_{k\theta-\tau/2}^{k\theta+\tau/2}y^2(t)dt,\quad X_k(\theta)=\int\limits_{k\theta-\tau/2}^{k\theta+\tau/2}x(t)dt; \tag{6}$$

$$q=2G(0)/N_0,\quad y(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t')h(t-t')dt'$$

– отклик фильтра с передаточной функцией $H(\mathrm{i}\omega)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t)=s(t,\theta_0,a_0)+n(t)$. Передаточная функция фильтра выбирается из условия

$$|H(\mathrm{i}\omega)|^2=2G(\omega)/[N_0+2G(\omega)].$$

Для того, чтобы исключить влияние неинформативного параметра a, заменим его неизвестное значение на ОМП. Максимизируя с этой целью (5) по a, имеем

$$L_a(\theta)=\sup_a L(\theta,a)=\frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}Y_k(\theta)+\frac{1}{NN_0\tau(1+q)}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X_k(\theta)\right]^2. \tag{7}$$

В результате ОМП $\hat{\theta}_a$ периода следования последовательности (2) с неизвестным математическим ожиданием a определяется по положению абсолютного (наибольшего) максимума функционала (7). Для расчета характеристик ОМП представим (7) в виде суммы сигнальной и шумовой функций [4]

$$L_a(\theta)=S(\theta)+N(\theta)+C_0, \tag{8}$$

где C_0 – несущественная постоянная. Учитывая (4), пренебрегая ошибками измерения периода следования порядка времени корреляции стохастической модуляции и полагая, что ОМП обладает высокой апостериорной точностью, получаем для сигнальной функции в (8)

$$S(\theta)=\langle L(\theta)\rangle-C_0\cong A_s-B_s|\theta-\theta_0|. \tag{9}$$

Шумовая функция $N(\theta)=L(\theta)-\langle L(\theta)\rangle$ является реализацией случайного процесса, для которого $\langle N(\theta)\rangle=0$,

$$B(\theta_1,\theta_2)=\langle N(\theta_1)N(\theta_2)\rangle\cong A_N-B_N|\theta_1-\theta_2|-C_N[\max(\theta_0,\theta_1,\theta_2)-\min(\theta_0,\theta_1,\theta_2)], \tag{10}$$

где

$$A_s=N\left[\frac{\tau}{\pi N_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G^2(\omega)}{N_0+2G(\omega)}d\omega+z_0^2\frac{2+q}{2(1+q)}\right],\ B_s=(N-1)A_s/2\tau,\quad A_N=N\left[\mu q^2+z_0^2(1+q)\right],$$

$$B_N=\frac{N(N-1)}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G^2(\omega)}{[N_0+2G(\omega)]^2}d\omega+\frac{z_0{}^2}{\tau(1+q)^2}\right], \tag{11}$$

$$C_N=N(N-1)\left\{\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G^3(\omega)[1+G(\omega)/N_0]}{[N_0+2G(\omega)]^3}d\omega+\frac{z_0{}^2q(3+3q+q^2)}{\tau(1+q)^2}\right\};$$

$z_0{}^2=2a_0{}^2\tau/N_0$ – отношение сигнал-шум (ОСШ) для регулярной (неискаженной) составляющей одного импульса [4]; a_0 – истинное значение математического ожидания. При выводе сигнальной (9) и корреляционной (10) функций шумовой функции предполагалось, что

$$\max(|\theta-\theta_0|,|\theta_1-\theta_0|,|\theta_2-\theta_0|,|\theta_1-\theta_2|)<<\tau, \tag{12}$$

поэтому (9), (10) описывают центральные пики соответствующих функций [4]. Согласно (9), (10) у сигнальной и корреляционной функций не существует второй производной по оцениваемому параметру при $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_0$. Найти дисперсию ОМП периода следования в этом случае можно с помощью метода локально-марковской аппроксимации [6]

$$D = 13(2B_N + C_N)^2 / 8B_s^{\;4}. \tag{13}$$

Подставляя (11) в (13), для дисперсии ОМП периода следования при неизвестном математическом ожидании стохастической модуляции получаем выражение

$$D(\hat{\theta}_a|\ a_0) = \frac{13\tau^2}{2}\left\{\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G^2(\omega)d\omega}{\left[N_0 + 2G(\omega)\right]^2} + \mu q^2 + z_0^{\;2}\,\frac{1+(1+q)^3}{(1+q)^2}\right\}^2 \times$$
$$\times\left\{\frac{\tau}{\pi N_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G^2(\omega)d\omega}{N_0 + 2G(\omega)} + z_0^{\;2}\,\frac{2+q}{2(1+q)^2}\right\}^{-4}\left[N(N-1)\right]^{-2}, \tag{14}$$

точность которого улучшается с ростом μ, z_0 и N.

Положим далее, что спектральная плотность $G(\omega)$ стохастической модуляции описывается выражением

$$G(\omega) = \gamma I(\omega / \Omega), \tag{15}$$

где γ – интенсивность спектральной плотности.

Пусть кроме математического ожидания a неинформативным параметром также является интенсивность спектральной плотности стохастической модуляции γ. Подставляя (15) в (5), для логарифма ФОП получаем выражение

$$L(\theta, a, \gamma) = \frac{1}{N_0(1+q)}\sum_{k=0}^{N-1}\left[qY_{1k}(\theta) + aX_k(\theta)\right] - N\left[\frac{a^2\tau}{1+q} + \mu\ln(1+q)\right]. \tag{16}$$

Здесь $q = 2\gamma / N_0$, $Y_{1k}(\theta)$ определяется из (6) при замене в ней $y(t)$ на $y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h_1(t-t')dt'$ – отклик фильтра с передаточной функцией $H_1(i\omega)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t) = s(t, \theta_0, a_0, \gamma_0) + n(t)$. Передаточная функция фильтра теперь выбирается из условия $\left|H_1(\mathrm{i}\omega)\right|^2 = I(\omega / \Omega)$.

Для того, чтобы исключить влияние неинформативных параметров a и γ, заменим их значения в (16) на ОМП. Максимизируя с этой целью (16) по a и γ, имеем

$$L_\gamma(\theta) = \sup_{a,\gamma} L(\theta, a, \gamma) = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}Y_{1k}(\theta) - \mu N\left[1 + \ln\left\{\frac{1}{\mu N N_0}\sum_{k=0}^{N-1}Y_{1k}(\theta) - \frac{1}{\mu N^2\tau N_0}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X_k(\theta)\right]^2\right\}\right]. \tag{17}$$

В результате ОМП $\hat{\theta}_\gamma$ периода следования последовательности (2) определяется по положению абсолютного максимума функционала (17).

Для расчета характеристик ОМП $\hat{\theta}_\gamma$ введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$S_1(\theta) = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}\left\langle Y_{1k}(\theta)\right\rangle, \quad N_1(\theta) = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}Y_{1k}(\theta) - S_1(\theta),$$
$$S_2(\theta) = \frac{S_1(\theta)}{\mu N} - \frac{1}{\mu N^2\tau N_0}\left\langle\left[\sum_{k=0}^{N-1}X_k(\theta)\right]^2\right\rangle, N_2(\theta) = \frac{1}{\mu N N_0}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}Y_{1k}(\theta) - \frac{1}{N\tau}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X_k(\theta)\right]^2\right\} - S_2(\theta). \tag{18}$$

Используя функции (18), преобразуем (17) к виду

$$L_\gamma(\theta) = S_1(\theta) + N_1(\theta) - \mu\left\{1 + \ln\left[S_2(\theta) + N_2(\theta)\right]\right\} =$$
$$= S_1(\theta) + N_1(\theta) - \mu\left\{1 + \ln S_2(\theta) + \ln\left[1 + N_2(\theta)/S_2(\theta)\right]\right\}. \tag{19}$$

Положим, что ОМП $\hat{\theta}_\gamma$ обладает высокой апостериорной точностью. Тогда достаточно исследовать поведение функционала (19) в малой окрестности истинного значения периода следования θ_0, где при выполнении (4) функционал (19) можно приближенно записать в виде

$$L_\gamma(\theta) \cong S_1(\theta) + N_1(\theta) - \mu\left[1 + \ln S_2(\theta) + N_2(\theta)/S_2(\theta)\right]. \tag{20}$$

Точность этого приближенного выражения возрастает с увеличением μ и N, так как при выполнении (4) $\langle N_2^{\,2}(\theta_0)\rangle S_2^{\,-2}(\theta_0) = 1/\mu N << 1$. Представим (20) в виде суммы сигнальной и шумовой функций [4]

$$L_\gamma(\theta) = S_\gamma(\theta) + N_\gamma(\theta), \tag{21}$$

где $S_\gamma(\theta) = S_1(\theta) - \mu\left[1 + \ln S_2(\theta)\right]$, $N_\gamma(\theta) = N_1(\theta) - \mu N_2(\theta)/S_2(\theta)$. В условиях высокой апостериорной точности оценки $\hat{\theta}_\gamma$, когда выполняется (12), сигнальную $S_\gamma(\theta)$ и корреляционную $B_\gamma(\theta_1, \theta_2) = \langle N_\gamma(\theta_1) N_\gamma(\theta_2)\rangle$ функции шумовой функции $N_\gamma(\theta)$ в (21) можем записать аналогично (9) и (10) соответственно. Необходимо лишь в (9) и (10) вместо (11) подставить следующие выражения:

$$\begin{aligned} A_s &= N\left\{\mu\left[q_0 - \ln(1+q_0)\right] + z_0^{\,2}/2\right\},\ B_s = N(N-1)\left[\mu q_0^{\,2} + z_0^{\,2}(1+q_0/2)\right]\left[2\tau(1+q_0)\right]^{-1}, \\ A_N &= N\left[\mu q_0^{\,2} + z_0^{\,2}(1+q_0)\right],\quad B_N = N(N-1)(\mu q_0^{\,2} + z_0^{\,2})\left[2\tau(1+q_0)^2\right]^{-1}, \\ C_N &= N(N-1)\left[\mu q_0^{\,3}(2+q_0) + z_0^{\,2} q_0(3+3q_0+q_0^{\,2})\right]\left[2\tau(1+q_0)^2\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $q_0 = 2\gamma_0/N_0$; γ_0 – истинное значение величины спектральной плотности стохастической модуляции.

Подставляя (22) в (13), для дисперсии ОМП периода следования при неизвестных математическом ожидании и величине спектральной плотности стохастической модуляции запишем выражение

$$D(\hat{\theta}_\gamma \mid a_0, \gamma_0) = \frac{13\tau^2\left\{\mu q_0^{\,2}\left[1+(1+q_0)^2\right] + z_0^{\,2}\left[1+(1+q_0)^3\right]\right\}^2}{2N^2(N-1)^2\left[\mu q_0^{\,2} + z_0^{\,2}(1+q_0/2)\right]^4}, \tag{23}$$

точность которого улучшается с ростом μ, z_0 и N. Подставляя (15) в (14), получаем, что для частного случая прямоугольной спектральной плотности стохастической модуляции, дисперсии ОМП $\hat{\theta}_a$ (14) и $\hat{\theta}_\gamma$ (23) совпадают. Следовательно, в условиях высокой апостериорной точности незнание интенсивности спектральной плотности стохастической модуляции асимптотически (с увеличением μ и N) не влияет на точность ОМП периода следования. Незнание величины спектральной плотности лишь приводит к более сложной структуре измерителя (17) по сравнению с измерителем (7) в случае незнания только математического ожидания. К аналогичным выводам приходим, сопоставляя (14) с результатом [5], найденным при отсутствии неинформативных параметров.

- Показано, что незнание математического ожидания и интенсивности спектральной плотности асимптотически не влияет на эффективность оценки периода следования, однако приводит к заметному усложнению структуры алгоритмов обработки.

Приведенные результаты получены при поддержке гранта Минобразования РФ.

Литература

1. *Трифонов А.П., Беспалова М.Б.* Эффективность оценки периода следования прямоугольных импульсов. – Радиотехника, 1992, № 10/11.
2. *Трифонов А.П., Беспалова М.Б.* Влияние рандомизации импульсной несущей на скрытность передачи информации. – Прикладные вопросы защиты информации. – Воронеж, ВВШ МВД РФ, 1996.
3. *Трифонов А.П., Беспалова М.Б.* Оценка скрытности передачи информации при использовании рандомизированной импульсной несущей. – Радиотехника, 1999, №6.
4. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. – М.: Сов. радио, 1978.
5. *Трифонов А.П., Беспалова М.Б.* Эффективность оценок периода следования прямоугольных импульсов при наличии модулирующих помех. – Радиотехника, 1998, №1.
6. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1986.

Поступила 2 июня 2000 г.