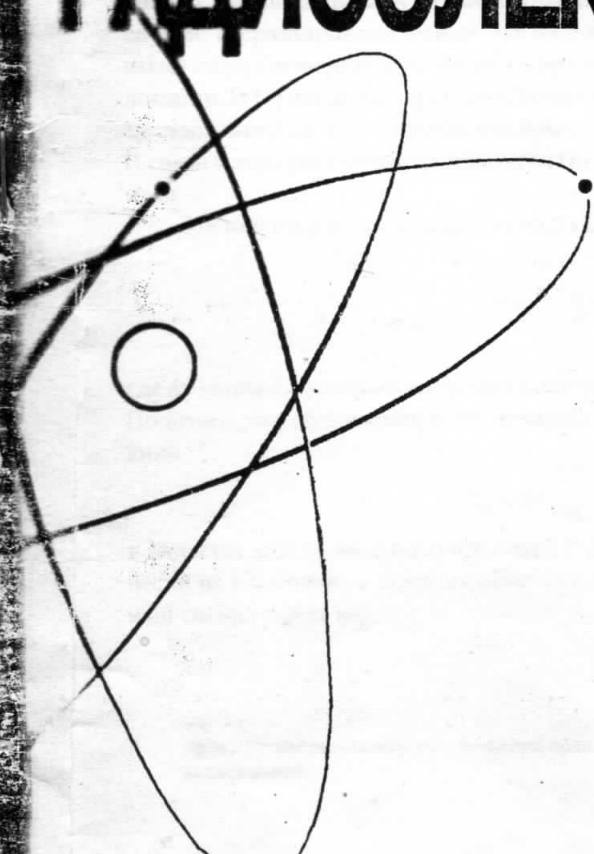
197

197

ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА



ТОМ 43

9-10

ИЗДАНИЕ НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА УКРАИНЫ «КИЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

2000

УДК 621.396

ТРИФОНОВ А. П., БЕСПАЛОВА М. Б.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОЙ ОЦЕНКИ ДАЛЬНОСТИ ФЛУКТУИРУЮЩЙ ЦЕЛИ*

Найдены асимптотические выражения для характеристик оценки максимального правдоподобия дальности с учетом аномальных ошибок. Определены потери в точности оценки вследствие быстрых флуктуаций цели.

В [1—4] и др. рассмотрены возможности применения сверхкоротких (субнаносекундных) импульсов и их последовательностей в радиолокации. Короткоимпульсные сигналы и их последовательности представляют собой частный случай сверхширокополосных сигналов (СШПС), использование которых имеет свою специфику и позволяет в принципе расширить возможности радиолокации. В [4] найдены характеристики сверширокополосной оценки дальности стабильной цели, но многие реальные цели являются флуктуирающими [5]. В связи с этим рассмотрим характеристики оценки дальности флуктуирующей цели.

Зондирующую последовательность СШПС запишем как

$$\tilde{s}_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}(t - k\theta), \tag{1}$$

где функция $\tilde{s}(\cdot)$ описывает форму одного импульса, а θ — период следования. Положим, что облучаемая последовательностью (1) цель находится на расстоянии

$$R_0 \in [R_{\min};\ R_{\max}] \tag{2}$$

и является медленно флуктуирующей [5]. Тогда характеристики цели практически не изменяются за время облучения последовательностью (1) и рассеянный сигнал имеет вид

---

* **Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.**

$$s_N(t, R_0, a_0) = a_0 \sum_{k=0}^{N-1} s(t - k\theta - 2R_0/c). \tag{3}$$

Здесь a_0 — неизвестная амплитуда принимаемого сигнала, c — скорость распространения сигнала. Функция $s(\cdot)$ описывает форму одного рассеянного СШПС с единичной амплитудой и в общем случае отличается по форме от $\tilde{s}(\cdot)$ в (1).

Пусть последовательность (3) наблюдается на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 и интервал наблюдения $[0, T]$ больше длительности всей последовательности, т. е. $T > N\theta$. Скважность последовательности (3) полагаем не слишком малой, так что отдельные СШПС не перекрываются. Тогда логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) для последовательности (3) определяется выражением [6]

$$L(R, a) = a \sum_{k=0}^{N-1} L_k(R) - a^2 N \tilde{z}^2 / 2, \tag{4}$$

где $L_k(R) = 2 \int_0^T x(t)\, s(t - k\theta - 2R/c)\, dt / N_0$, $x(t) = s_N(t, R_0, a_0) + n(t)$ — реализация наблюдаемых данных, а $\tilde{z}^2 = 2 \int_0^T s^2(t)\, dt / N_0$ — отношение сигнал/шум (ОСШ) для одного СШПС последовательности с единичной амплитудой. Для того, чтобы исключить влияние неизвестной амплитуды, заменим ее значение на оценку максимального правдоподобия (ОМП) [6]. Максимизируя с этой целью (4) по a, имеем

$$L(R) = \sup_a L(R, a) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} L_k(R) \right]^2 / 2\tilde{z}^2 N. \tag{5}$$

Согласно определению, ОМП дальности медленно флуктуирующей цели запишется как [6]

$$\hat{R} = \arg\sup L(R),\; R \in [R_{\min};\; R_{\max}]. \tag{6}$$

Для расчета характеристик ОМП, подставим в (5) реализацию наблюдаемых данных и преобразуем к виду

$$L(R) = [z\, S(R, R_0) + N(R)]^2 / 2. \tag{7}$$

Здесь

$$S(R, R_0) = \frac{2}{N_0 \tilde{z}^2} \int_0^T s(t - 2R/c)\, s(t - 2R_0/c)\, dt, \tag{8}$$

$$z^2 = a_0^2 N \tilde{z}^2 \tag{9}$$

— суммарное ОСШ для всей принимаемой последовательности (3),

$$N(R) = \sum_{k=0}^{N-1} N_k(R) / \sqrt{N}, \tag{10}$$

$$N_k(R) = \frac{2}{N_0 \tilde{z}} \int_0^T n(t)\, s(t - k\theta - 2R/c)\, dt$$

— реализации стационарных гауссовских процессов, первые два момента которых

$$\langle N_k(R) \rangle = 0, \ \langle N_k(R_1) N_i(R_2) \rangle = 0, \ k \neq i,$$
$$\langle N_k(R_1) N_k(R_2) \rangle = S(R_1, R_2). \tag{11}$$

Используя (11) для (10), находим

$$\langle N(R) \rangle = 0, \ B(R_1, R_2) = \langle N(R_1) N(R_2) \rangle = S(R_1, R_2). \tag{12}$$

Формулы (8), (11), (12) получены в предположении, что $R_{max} - R_{min} < c\,\theta/2$, т. е. априорный интервал возможных значений дальности (2) не превосходит интервала однозначного измерения дальности [4]. Обозначим ΔR — длительность сигнальной функции (8), так что $S(R_0 \pm \Delta R, R_0) \cong 0$. Тогда в (7) сигнальная функция (8) отлична от нуля лишь, когда

$$R \in R_s = [R_0 - \Delta R;\ R_0 + \Delta R]. \tag{13}$$

При выполнении (13) ОМП (6) будем называть надежной [6].

Для расчета характеристик надежной ОМП, аналогично [6], представим (7) в виде суммы сигнальной и шумовой функций

$$L(R) = \hat{S}(R, R_0) + \hat{N}(R) + 1/2, \tag{14}$$

где сигнальная функция

$$\hat{S}(R, R_0) = z^2 S^2(R, R_0)/2, \tag{15}$$

а шумовая функция $\hat{N}(R) = L(R) - \langle L(R) \rangle$ центрирована и обладает корреляционной функцией

$$\hat{B}(R_1, R_2) = \langle \hat{N}(R_1) \hat{N}(R_2) \rangle = N [z^2 S(R_1, R_2) S(R_1, R_2) \times \times S(R_2, R_0) + S^2(R_1, R_2) / 2]. \tag{16}$$

Сигнальные функции (8) и (15) достигают максимума при $R = R_0$. Следовательно, выходное ОСШ для всей последовательности (3) будет равно [6]

$$z_N^2 = \hat{S}^2(R_0, R_0) / \hat{B}(R_0, R_0) = z^4 / 2(2z^2 + 1). \tag{17}$$

Полагаем далее, что выходное ОСШ (17) для последовательности (3) достаточно велико, так что надежная оценка (13) обладает высокой апостериорной точностью. Тогда решение уравнения правдоподобия можно найти методом малого параметра [6], в качестве которого используем величину $1 / z_N$. Ограничиваясь рассмотрением первого приближения, получаем, что надежная ОМП дальности (13) условно несмещенная и обладает дисперсией [6]

$$\sigma^2 = \left\{ \frac{\partial^2 \hat{B}(R_1, R_2)}{\partial R_1 \partial R_2} \Big/ \left[\frac{d^2 \hat{S}(R, R_0)}{dR^2} \right]^2 \right\}_{R_0}. \tag{18}$$

Подставляя в (18) $\hat{S}(R, R_0)$ из (15), $\hat{B}(R_1, R_2)$ из (16) и выполняя дифференцирование, имеем

$$\sigma^2 = c^2 / 4\alpha^2 z^2, \tag{19}$$

где $\alpha^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [ds(t)/dt]^2 dt \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt$.

Положим теперь, что ОМП (6) является аномальной [6], т. е.

$$\hat{R} \in R_N = \{[R_{\min}; R_0 - \Delta R]; [R_0 + \Delta R; R_{\max}]\}. \tag{20}$$

При $R \in R_N$, $S(R, R_0) \cong 0$ и (7) принимает вид

$$L(R) = N^2(R) / 2. \tag{21}$$

Согласно (8), (12) шумовая функция $N(R)$ является реализацией стационарного случайного процесса. Положим кроме того, что априорный интервал возможных значений дальности (2) достаточно велик, так что

$$R_{\max} - R_{\min} >> \Delta R. \tag{22}$$

Тогда, используя [6], для смещения и рассеяния ОМП дальности (6) с учетом аномальных ошибок получаем выражение

$$b(\hat{R} \mid R_0) = \langle \hat{R} - R_0 \rangle = (1 - P_0)\,[(R_{\max} + R_{\min})/2 - R_0], \tag{23}$$

$$V(\hat{R} \mid R_0) = \langle (\hat{R} - R_0)^2 \rangle = \sigma^2 P_0 + (1 - P_0)\,[(R_{\max}^2 + R_{\max} R_{\min} + R_{\min}^2)/3 - (R_{\max} + R_{\min}) R_0 + R_0^2].$$

Здесь

$$P_0 = P\,[\hat{R} \in R_s] \tag{24}$$

— вероятность надежной оценки [6]. В силу определения ОМП (6) можно переписать (24) как

$$P_0 = P\,[H_s > H_N], \tag{25}$$

где

$$H_s = \sup L(R),\ R \in R_s,\ H_N = \sup L(R),\ R \in R_N. \tag{26}$$

При выполнении (22) случайные величины H_s и H_N приближенно статистически независимы, а (25) принимает вид

$$P_0 = \int F_N(H)\, W_s(H)\, dH, \tag{27}$$

где $F_N(H)$ — функция распределения случайной величины H_N, а $W_s(H)$ — плотность вероятности случайной величины H_s. Согласно (6), (26) $H_s = L(\hat{R})$, когда $\hat{R} \in R_s$. При достаточно большом ОСШ (17) можно приближенно положить $H_s = L(\hat{R}) \cong L(R_0) = [z + N(R_0)]^2/2$. Здесь, как следует из (8), (12), $N(R_0)$ — гауссовская случайная величина с параметрами (0; 1). Используя известные правила преобразования плотностей вероятности [7] находим, что

$$W_s(H) = \exp(-H - z^2/2)\,\mathrm{ch}(z\sqrt{2H})/\sqrt{\pi H}. \tag{28}$$

Если же $R \in R_N$, то (7) перепишется в виде (21) и $H_N = \sup [N^2(R)/2]$, $R \in R_N$. Следовательно, $F_N(H)$ является функцией распределения величины наибольшего максимума стационарного случайного процесса (21). Так как длительность каждого СШПС последовательности (3) ограничена, то корреляционная функция (12) $S(R_1, R_2) \to 0$ при $|R_1 - R_2| \to \infty$. Поэтому можно считать, что с увеличением H распределение числа выбросов за уровень H реализации $L(R)$

(21) на интервале R_N (24) сходится к закону Пуассона [8]. Следовательно, для больших, но конечных H можно записать [9]

$$F_N(H) \cong \exp[-\Pi(H)]. \tag{29}$$

Здесь $\Pi(H)$ — среднее число выбросов реализации процессов (21) за уровень H на интервале R_N (20). Если же выполняется (22), то приближенно $\Pi(H)$ — среднее число выбросов на всем априорном интервале возможных значений дальности (2).

Используя [8], для среднего числа выбросов процесса (21), получаем выражение

$$\Pi(H) = \zeta \exp(-H)/\pi, \tag{30}$$

где $\zeta = 2(R_{\max} - R_{\min})\alpha/c$ — приведенная длина априорного интервала возможных значений дальности (2). В общем случае функция в правой части (29) не является неубывающей функцией H, поэтому вместо (29) будем использовать аппроксимацию

$$F_N(H) \cong \begin{cases} \exp[-\zeta \exp(-H)/\pi], & H \geq 0 \\ 0 & , H < 0. \end{cases} \tag{31}$$

Подставляя (28) и (31) в (27) находим приближенное выражение для вероятности надежной оценки дальности медленно флуктуирующей цели

$$P_0 \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2+z^2}{2} - \frac{\zeta}{\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \operatorname{ch}(xz)\, dx. \tag{32}$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением ОСШ z (9) и приведенной длины ζ (30).

Найдем далее характеристики ОМП дальности при зондировании последовательностью (1) быстро флуктуирующей цели. Тогда характеристики цели практически не изменяются за время, равное длительности одного СШПС последовательности (1), но могут существенно изменяться от одного к другому СШПС, т. е. за период повторения зондирующей последовательности. В результате, неизвестные амплимтуды имеют разные значения для различных СШПС последовательности, рассеянной быстро флуктуирующей целью. Соответственно, рассеянный быстро флуктуирующей целью сигнал имеет вид

$$s_N(t, R_0, a_{0k}) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{0k}\, s(t - k\theta - 2R_0/c), \tag{33}$$

где a_{0k}, $k = \overline{0, N-1}$ — неизвестные амплимтуды отдельных СШПС. Аналогично (4), логарифм ФОП для последовательности (33) определяется выражением [6]

$$L(R, a_k) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \left[L_k(R) - a_k \tilde{z}^2 / 2 \right]. \tag{34}$$

Здесь $x(t) = s_N(t, R_0, a_{0k}) + n(t)$ — реализация наблюдаемых данных. Для того, чтобы исключить влияние неизвестных аплитуд последовательности (33), заменим их значения на ОМП [6, 9]. Максимизируя с этой целью (34) по всем a_k, $k = \overline{0, N-1}$ имеем

$$L_a(R) = \sup_{a_k} L(R, a_k) = \sum_{k=0}^{N-1} L_k^2(R) / 2\, \tilde{z}^2. \tag{35}$$

В результате, аналогично (6), ОМП дальности определяется по положению наибольшего максимума функционала (35).

Для расчета характеристики ОМП подставим в (35) реализацию наблюдаемых данных и преобразуем к виду

$$L_a(R) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[z_k S(R, R_0) + N_k(R) \right]^2 / 2, \tag{36}$$

где $z_k^2 = a_{0k}^2 \tilde{z}^2$ — ОСШ для k-го СШПС последовательности (33), а остальные обозначения соответствуют (7), (8), (10). Полагая, что выполняется (13), аналогично (14) представим (36) в виде суммы сигнальной и шумовой функций: $L_a(R) = \tilde{S}(R, R_0) + \tilde{N}(R) + N/2$. Здесь сигнальная функция

$$\tilde{S}(R, R_0) = z_\Sigma^2 S^2(R, R_0) / 2, \tag{37}$$

а шумовая функция $\tilde{N}(R)$ центрирована и обладает корреляционной функцией

$$\tilde{B}(R_1, R_2) = z_\Sigma^2 S(R_1, R_2) S(R_1, R_0) S(R_2, R_0) + N S^2(R_1, R_2) / 2. \tag{38}$$

В (37), (38) обозначено $z_\Sigma^2 = \sum_{k=0}^{N-1} z_k^2$ — суммарное ОСШ для последовательности (33). Сигнальная функция (37) достигает максимума при $R = R_0$. Следовательно, выходное ОСШ для всей последовательности (33) будет равно [6]

$$z_N^2 = \widetilde{S}^2 (R_0, R_0) / \widetilde{B} (R_0, R_0) = z_\Sigma^4 / 2 (N + 2 z_\Sigma^2) =$$

$$= z_\Sigma^2 z_m^2 / 2 (1 + 2 z_m^2). \qquad (39)$$

$$z_m^2 = z_\Sigma^2 / N \qquad (40)$$

— среднее ОСШ для одного СШПС последовательности (33).

Полагаем далее, что выходное ОСШ (39) для последовательности (33) достаточно велико при любых z_m^2 (40) и надежная ОМП дальности (13) быстро флуктуирующей цели обладает высокой апостериорной точностью. Тогда, ограничиваясь первым приближением решения уравнения правдоподобия методом малого параметра, получаем, что ОМП условно несмещенная. Она обладает дисперсией (18), куда надо подставить сигнальную функцию из (37) и корреляционную функцию из (38). Выполняя подстановку и дифференцирование, находим дисперсию надежной ОМП дальности быстро флуктуирующей цели

$$\sigma_a^2 = c^2 (1 + z_m^{-2}) / 4 \alpha^2 z_\Sigma^2 . \qquad (41)$$

Из сравнения (19) и (41) следует, что в первом приближение наличие быстрых флуктуаций цели приводит (при равных суммарных ОСШ) к увеличению дисперсии надежной ОМП дальности в $(1 + z_m^2) / z_m^2$ раз. Когда $z_m^2 << 1$ этот проигрыш может быть значительным. Очевидно, (41) при $z_m^2 << 1$ можно использовать только если $z_\Sigma^2 = N z_m^2 >> 1$, т. е. когда число СШПС в последовательности велико. При небольшом числе СШПС (в частности при $N = 1$) в силу условия $z_\Sigma^2 >> 1$ имеем, что $z_m^2 >> 1$. В этом случае (41) совпадает с (19) и потери в точности надежной оценки дальности за счет быстрых флуктуаций цели отсутствуют.

Положим теперь, что ОМП является аномальной (20). Тогда (36) принимает вид

$$L_a (R) = \sum_{k=0}^{N-1} N_k^2 (R) / 2. \qquad (42)$$

Согласно (8), (11) функции $N_k (R)$ являются реализациями независимых стационарных гауссовских процессов. Следовательно, (42) также является реализацией стационарного случайного процесса. Поэтому, при выполнении (22) смещение и рассеяние ОМП дальности быстро флуктуирующей цели с учетом аномальных ошибок получаем опять в виде (23). Надо лишь в эти формулы подставить соответствующие значения дисперсии (41) и вероятности надежной оценки.

Согласно определению (26), теперь $H_s = L_a(\hat{R}), \hat{R} \in R_s$. При достаточно большом ОСШ (39) можно приближенно положить

$$H_s = L_a(\hat{R}) \cong L_a(R_0) = \sum_{k=0}^{N-1} [z_k + N_k(R_0)]^2 / 2. \tag{43}$$

Как следует из (8), (11) $N_k(R_0)$ — статистически независимые гауссовские случайные величины с параметрами (0; 1). Используя аппарат характеристических функций [7], получаем плотность вероятности для (43) в виде

$$W_s(H) = \left(\frac{2H}{z_\Sigma^2}\right)^{\frac{N}{4}-\frac{1}{2}} \exp\left(-H - \frac{z_\Sigma^2}{2}\right) I_{\frac{N}{2}-1}(z_\Sigma \sqrt{2H}), \tag{44}$$

где $I_\nu(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, порядка ν.

Положим далее, что $\hat{R} \in R_N$. Тогда для (36) справедливо (42) и

$$H_N = \sup\left[\sum_{k=0}^{N-1} N_k^2(R)/2\right], R \in R_N.$$

Распределение случайной величины H_N будем аппроксимировать аналогично (29). Используя [8], для среднего числа выбросов случайного процесса (42) получаем выражение $\Pi_a(H) = \zeta H^{(N-1)/2} \exp(-H) / \Gamma(N/2) \sqrt{\pi}$, где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Теперь, аналогично (31), можем записать приближенное выражение для функции распределения случайной величины H_N

$$F_N(H) \cong \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{\zeta H^{(N-1)/2} \exp(-H)}{\Gamma(N/2)\sqrt{\pi}}\right], & H > N-1, \\ 0 & , H < N-1. \end{cases} \tag{45}$$

Подставляя (44) и (45) в (27), находим приближенное выражение для вероятности надежной оценки дальности быстро флуктуирующей цели

$$P_{0a} \cong \int_{\sqrt{N-1}}^{\infty} \frac{x^{N/2}}{z_\Sigma^{N/2-1}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{x^2 + z_\Sigma^2}{2} - \frac{\zeta x^{N-1}}{2^{(N-1)/2}\Gamma(N/2)\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] I_{N/2-1}(x z_\Sigma)\, dx. \tag{46}$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением ОСШ (39) и приведенной длины априорного интервала возможных значений дальности ζ (30). Смещение и рассеяние ОМП дальности быстро флуктуирующей цели, получаем подставляя (41) и (46) в (23).

Найденные формулы для вероятности надежной оценки медленно (32) и быстро (46) флуктуирующих целей довольно громоздки и расчет по ним возможен только численными методами. Поэтому определим простую верхнюю границу для вероятности $P_a = 1 - P_0$ аномальных ошибок [6]. Воспользовавшись неравенством $1 - \exp(-x) \le x$ при $x > 0$ из (32) и (46) имеем, полагая $z >> 1$ и $z_\Sigma >> 1$

$$P_a = 1 - P_0 \le P_a^* = \zeta \exp(-z^2 / 4) / \pi \sqrt{2},$$

$$\widetilde{P}_a = 1 - P_{0a} \le \widetilde{P}_a^* = \frac{\zeta z_\Sigma^{N-1} \exp(-z_\Sigma^2 / 4)}{2^{2N-3/2}\, \Gamma(N/2) \sqrt{\pi}}.$$

Откуда при $z = z_\Sigma$ получаем

$$\widetilde{P}_a^* / P_a^* = z^{N-1} \sqrt{\pi} / \Gamma(N/2)\, 2^{2(N-1)}.$$

Следовательно, быстрые флуктуации цели могут привести к существенному увеличению вероятности аномальных ошибок сверхширокополосной оценки дальности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Астанин Л. Ю., Костылев А. А.* Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений.— М. : Радио исвязь, 1989.— 192 с.
2. *Хармут Х. Ф.* Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи.— М. : Радио исвязь, 1985.— 376 с.
3. *Бункин Б. В., Кашин В. А.* Особенности, проблемы и перспективы субнаносекундных видеоимпульсных РЛС // Радиотехника.— 1995.— № 4—5.— С. 128—133.
4. *Трифонов А. П., Беспалова М. Б.* Эффективность сверхширокополосного обнаружения и измерения дальности и скорости // Радиотехника и электроника.— 1997.— Т. 42.— № 4.— С. 451—456.
5. *Сосулин Ю. Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации.— М. : Радио и связь, 1992.— 304 с.
6. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М. : Сов. радио, 1976.— 296 с.
7. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника.— М. : Радио исвязь, 1982.— 624 с.
8. *Тихонов В. И., Хименко В. И.* Выбросы траекторий случайных процессов. М. : Наука, 1987.— 304 с.
9. *Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех.— М. : Радио и связь, 1986.— 264 с.

Воронежский госуниверситет.

Поступила в редакцию 20.07.99.