

198

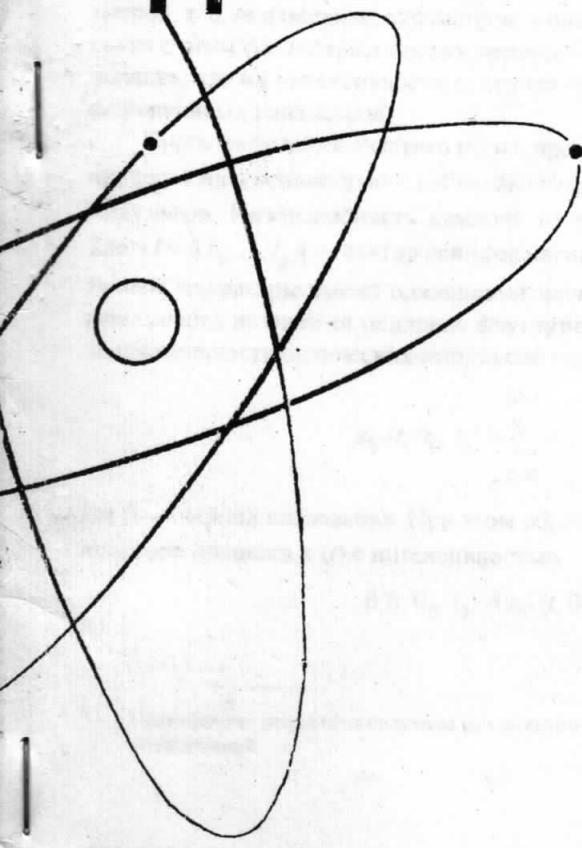
198



ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА



ТОМ 43

11-12

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2000

ТРИФОНОВ А. П., БЕСПАЛОВА М. Б.

ОЦЕНКА ПЕРИОДА СЛЕДОВАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ
ПРИ НАЛИЧИИ НЕИНФОРМАТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ*

Получены характеристики оценки максимального правдоподобия периода следования оптических импульсов медленно и быстро флуктуирующих последовательностей, содержащих конечное число произвольных неинформативных параметров.

В системах оптической связи и локации широко применяются последовательности оптических импульсов [1, 2]. Необходимость в оценке их периода следования возникает при измерении скорости цели в оптической локации, при обеспечении синхронизации в подвижных системах связи и т. п. Физические эффекты, сопровождающие рассеяние и распространение света в различных средах, приводят к тому, что интенсивность принимаемых оптических импульсов может зависеть от произвольного конечного числа неинформативных параметров, т. е. неизвестных параметров, в оценке которых нет необходимости. В связи с этим рассмотрим оценку периода следования оптических импульсов, полагая, что их интенсивности содержат произвольное конечное число неинформативных параметров.

Пусть на фоне оптического шума, представляющего собой пуассоновский процесс с интенсивностью v , наблюдается последовательность из N оптических импульсов. Интенсивность каждого из них описывается функцией $s(t, l)$. Здесь $l = \|l_1, \dots, l_p\|$ — вектор неинформативных параметров. Если неинформативные параметры имеют одинаковые значения для всех импульсов последовательности назовем ее медленно флуктуирующей. Интенсивность такой последовательности оптических импульсов может быть записана в виде

$$s_N(t, \theta_0, l_0) = \sum_{k=0}^{N-1} s(t - k\theta_0, l_0), \quad (1)$$

где θ — период следования. При этом обработке доступна реализация пуассоновского процесса $\pi(t)$ с интенсивностью

$$\beta(t, \theta_0, l_0) = s_N(t, \theta_0, l_0) + v. \quad (2)$$

* Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Полагаем, что интервал наблюдения $[0, T]$ больше длительности всей последовательности, так что $T > N\theta$ и скважность последовательности с интенсивностью (1) не слишком мала, так что отдельные импульсы не перекрываются. В этом случае логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) имеет вид [3]

$$M(\theta, I) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \ln [1 + s(t - k\theta, I) / v] d\pi(t) - N \int_{-\infty}^{\infty} s(t, I) dt.$$

Согласно [4], оценка максимального правдоподобия (ОМП) периода следования оптических импульсов с интенсивностью (1) определяется выражением $\theta = \operatorname{argsup}_I M(\theta, I)$, где $M(\theta) = \sup_I M(\theta, I)$, но в условиях высокой апостериорной точности ее можно найти [4] из решения системы $p + 1$ уравнения правдоподобия

$$\left[\frac{\partial M(\theta, I)}{\partial \theta} \right]_{\bar{\theta}, \bar{I}} = 0, \quad \left[\frac{\partial M(\theta, I)}{\partial I_i} \right]_{\bar{\theta}, \bar{I}} = 0, \quad (3)$$

где $i = \overline{1, p}$, $(\bar{\theta}, \bar{I}) = \operatorname{argsup}_{\theta, I} M(\theta, I)$ — совместные ОМП всех неизвестных параметров последовательности оптических импульсов.

Определим выходное отношение сигнал/шум [4] для всей последовательности как

$$\begin{aligned} z^2 &= \langle M(\theta_0, I_0) \rangle^2 / \langle [M(\theta_0, I_0) - \langle M(\theta_0, I_0) \rangle]^2 \rangle = \\ &= N \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [v + s(t, I_0)] \ln [1 + s(t, I_0) / v] dt - \int_{-\infty}^{\infty} s(t, I_0) dt \right\}^2 \times \\ &\quad \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [v + s(t, I_0)] \ln^2 [1 + s(t, I_0) / v] dt \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем полагать, что выходное отношение сигнал/шум достаточно велико, так что совместные ОМП всех неизвестных параметров последовательности с интенсивностью (1) обладают высокой апостериорной точностью. Решение системы уравнений (3) будем искать методом малого параметра [4], в качестве которого используем величину $\epsilon = 1/z \ll 1$.

Ограничиваясь первым приближением, получаем, что совместные ОМП асимптотически (при $z \rightarrow \infty$) несмещенные и совместно эффективные. Следо-

вательно, корреляционную матрицу K совместных ОМП всех неизвестных параметров можно записать в виде $K = \Gamma^{-1}$, где Γ — информационная матрица Фишера, которую представим в виде блочной матрицы

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A_\theta & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A_\theta = \int_0^T \frac{1}{\beta(t, \theta, l)} \left[\frac{\partial \beta(t, \theta, l)}{\partial \theta} \right]^2 dt,$$

$$D = \left[\int_0^T \frac{1}{\beta(t, \theta, l)} \frac{\partial \beta(t, \theta, l)}{\partial l_i} \frac{\partial \beta(t, \theta, l)}{\partial l_j} dt \right],$$

$$B = \left[\int_0^T \frac{1}{\beta(t, \theta, l)} \frac{\partial \beta(t, \theta, l)}{\partial \theta} \frac{\partial \beta(t, \theta, l)}{\partial l_i} dt \right]$$

— вектор-строка, $i, j = 1, p$, индекс «Т» — транспонирование.

Все производные от интенсивности (2) наблюдаемого процесса в (4) вычисляются при $\theta = \theta_0$, $l = l_0$. Выполняя дифференцирование, находим

$$A_\theta = N_2 A, \quad B = -N_1 [B_i], \quad D = N [D_{ij}], \quad (5)$$

$$N_2 = \sum_{k=0}^{N-1} k^2 = N(N-1)(2N-1)/6, \quad N_1 = \sum_{k=0}^{N-1} k = N(N-1)/2,$$

$$A \equiv A(l_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial s(t, l_0)}{\partial t} \right]^2 [v + s(t, l_0)]^{-1} dt,$$

$$B_i \equiv B_i(l_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial s(t, l)}{\partial t} \frac{\partial s(t, l)}{\partial l_i} \right] [v + s(t, l_0)]^{-1} dt, \quad (6)$$

$$D_{ij} \equiv D_{ij}(l_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial s(t, l)}{\partial l_i} \frac{\partial s(t, l)}{\partial l_j} \right] [v + s(t, l_0)]^{-1} dt.$$

Параметры l — неинформативны, поэтому нет необходимости определять все элементы корреляционной матрицы. Достаточно найти элемент, расположенный на пересечении первой строки и первого столбца, который представляет

собой дисперсию ОМП периода следования оптических импульсов с интенсивностью (1). Используя формулу Фробениуса [5] для этой дисперсии, получаем

$$D(\theta | I_0) = [A_\theta - B D^{-1} B^T]^{-1}. \quad (7)$$

Подставляя (5) в (7), имеем

$$D(\theta | I_0) = [A(N_2 - \rho_p N_1^2 / N)]^{-1}, \quad (8)$$

$$\rho_p \equiv \rho_p(I_0) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p B_i B_j \Delta_{ij} / A,$$

где Δ_{ij} — элементы матрицы $[\Delta_{ij}] = [D_{ij}]^{-1}$, $i, j = \overline{1, p}$.

Можно записать:

$$\rho_p \equiv \rho_p(I_0) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p R_{ii} R_{jj} \tilde{R}_{ij} \kappa_i \kappa_j, \quad (9)$$

где $R_{ii} \equiv R_{ii}(I_0) = B_i / \sqrt{A D_{ii}}$ — коэффициент корреляции между совместно-эффективными оценками времени прихода и параметра I_i одного оптического импульса, когда значения остальных $p-1$ параметров $I_1, \dots, I_{i-1}, I_{i+1}, \dots, I_p$ этого импульса априори известны, $\tilde{R}_{ij} \equiv \tilde{R}_{ij}(I_0) = \Delta_{ij} / \sqrt{\Delta_{ii} \Delta_{jj}}$ — коэффициент корреляции совместно эффективных оценок параметров I_i и I_j при оценке всех p неинформативных параметров одного импульса

$$\kappa_i^2 \equiv \kappa_i^2(I_0) = \tilde{\sigma}_i^2(I_0) / \sigma_i^2 = \Delta_{ii} / D_{ii}$$

— отношение дисперсии $\tilde{\sigma}_i^2(I_0)$ совместно-эффективной оценки параметра I_i при совместной оценке всех p неинформативных параметров одного импульса к дисперсии σ_i^2 эффективной оценки параметра I_i одного импульса, когда значения остальных $p-1$ неинформативных параметров априори известны. В сущности величина κ_i^2 определяет проигрыш в точности совместно-эффективной оценки параметра I_i вследствие незнания $p-1$ параметров $I_1, \dots, I_{i-1}, I_{i+1}, \dots, I_p$.

Обозначим $\sigma_i^2 \equiv \sigma_i^2(I_0) = 1/A$ дисперсию эффективной оценки времени прихода одного оптического импульса при априори известных всех его параметрах (отсутствии неинформативных параметров). В результате, дисперсию ОМП периода следования (8) можно переписать как

$$D(\theta | l_0) = 12 \sigma_l^2 / N(N-1) [2(2N-1) - 3(N-1)\rho_p]. \quad (10)$$

Рассмотрим влияние наличия неинформативных параметров на точность ОМП периода следования. С этой целью определим дисперсию ОМП при отсутствии неинформативных параметров. Полагая в (10) $\rho_p \equiv 0$, получаем $D(\theta) = 6 \sigma_l^2 / N(N-1)(2N-1)$. Сопоставляя с (10), находим проигрыш в точности ОМП вследствие наличия неинформативных параметров:

$$\chi = D(\theta | l_0) / D(\theta) = [1 - 3\rho_p(N-1)/2(2N-1)]^{-1} \geq 1. \quad (11)$$

Таким образом, наличие в медленно флуктуирующей последовательности оптических импульсов с интенсивностью (1) конечного числа p произвольных неинформативных параметров приводит в общем случае к увеличению дисперсии ОМП периода следования. Однако, если совместные ОМП всех неинформативных параметров некоррелированных с ОМП времени прихода одного импульса, т. е. в (9) $R_{ii} \equiv 0, i = \overline{1, p}$, то наличие неинформативных параметров не вызывает увеличения дисперсии ОМП периода следования.

Если неинформативные параметры l имеют различные значения в различных импульсах принимаемой последовательности, назовем ее быстро флуктуирующей. Интенсивность такой последовательности оптических импульсов может быть представлена в виде

$$s_N(t, \theta_0, L_0) = \sum_{k=0}^{N-1} s(t - k\theta_0, l_{0k}), \quad (12)$$

где $L = \|l_0, l_1, \dots, l_{N-1}\|$ — блочный (составной) вектор неинформативных параметров, объединяющий все неинформативные параметры последовательности. Согласно (1), (12) медленно флуктуирующая последовательность содержит p , а быстро флуктуирующая — Np неинформативных параметров.

Для последовательности оптических импульсов с интенсивностью (12) логарифм ФОП определяется выражением

$$M(\theta, L) = \sum_{k=0}^{N-1} M_k(\theta, l_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \int_0^T \ln [1 + s(t - k\theta, l_k) / v] d\pi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} s(t, l_k) dt \right\}.$$

Согласно [4], ОМП периода следования теперь запишется как

$$\hat{\theta} = \operatorname{argsup} M(\theta),$$

$$M(\theta) = \sup_L M(\theta, L) = \sum_{k=0}^{N-1} M_k(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \sup_{l_k} M_k(\theta, l_k).$$

Эту оценку можно найти из решения системы $Np + 1$ уравнения правдоподобия [4]

$$\left[\frac{\partial M(\theta, \hat{L})}{\partial \theta} \right]_{\hat{\theta}, \hat{L}} = 0, \left[\frac{\partial M_k(\theta, l_k)}{\partial l_{ik}} \right]_{\hat{\theta}, \hat{l}_k} = 0, \quad (13)$$

где $\hat{L} = \|\hat{l}_0, \hat{l}_1, \dots, \hat{l}_{N-1}\|$, $i = \overline{1, p}$; $k = \overline{0, N-1}$.

Из (13) следует, что для обеспечения высокой апостериорной точности ОМП $(\theta, \hat{L}) = \operatorname{argsup} M(\theta, L)$ всех неизвестных параметров последовательности оптических импульсов с интенсивностью (12), необходимо, чтобы было велико выходное отношение сигнал/шум для каждого импульса. Согласно [4], отношение сигнал/шум равно

$$z_k^2 = \langle M_k(\theta_0, l_{0k}) \rangle^2 / \langle [M_k(\theta_0, l_{0k}) - \langle M_k(\theta_0, l_{0k}) \rangle]^2 \rangle =$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [v + s(t, l_{0k})] \ln [1 + s(t, l_{0k}) / v] dt - \int_{-\infty}^{\infty} s(t, l_{0k}) dt \right\}^2 \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [v + s(t, l_{0k})] \ln^2 [1 + s(t, l_{0k}) / v] dt \right\}^{-1}.$$

Полагая далее, что это отношение для каждого импульса достаточно велико, обозначим $z_m^2 = \min_k z_k^2$, $k = \overline{0, N-1}$.

Решение системы уравнений (13) будем искать методом малого параметра [4], в качестве которого используем величину $\epsilon = 1/z_m \ll 1$. Ограничиваясь первым приближением, получаем, что совместные ОМП асимптотически несмещенные и совместно эффективные (при $z_m \rightarrow \infty$). Следовательно, точность ОМП всех неизвестных параметров быстро флуктуирующей последовательности оптических импульсов с интенсивностью (12) также характеризуется корреляционной матрицей совместно эффективных оценок. Отличие этой матрицы от рассмотренной ранее состоит лишь в ее размерах и структуре. Если для медленно флуктуирующей последовательности корреляционная матрица K и информационная матрица Фишера (4) имели размер $(1+p) \times (1+p)$, то для

быстро флуктуирующей последовательности эти матрицы имеют размер $(1 + Np) \times (1 + Np)$.

Подставляя в (4) интенсивность наблюдаемого процесса

$$\beta(t, \theta_0, L_0) = s_N(t, \theta_0, L_0) + v$$

для блоков матрицы (4), получаем

$$A_\theta = \sum_{k=0}^{N-1} k^2 A(l_{0k}), \quad B = -\|k B_i(l_{0k})\|, \quad (14)$$

$$D = \|D_k \delta_{kn}\|, \quad D_k = \|D_{ij}(l_{0k})\|, \quad \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k=n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

$$k, n = 0, N-1, \quad i, j = 1, p,$$

где $A(l_{0k})$, $B_i(l_{0k})$, $D_{ij}(l_{0k})$ определяются формулами (6) при замене в них l_0 на l_{0k} , т. е. на истинные значения неинформативных параметров k -го импульса.

Таким образом, для быстро флуктуирующей последовательности вектор B в (14) содержит N блоков, каждый из которых содержит p элементов, т. е. B — вектор-строка размером $1 \times pN$. Матрица D в (14) теперь является диагональной блочной матрицей размером $N \times N$, каждый блок которой, расположенный на главной диагонали, представляет собой матрицу размером $p \times p$, т. е. матрица D размером $pN \times pN$. Аналогично (7) дисперсия ОМП периода следования оптических импульсов с интенсивностью (12) равна элементу, лежащему на пересечении первой строки и первого столбца корреляционной матрицы K . Используя формулу Фробениуса [5] для этой дисперсии, получаем

$$D(\theta | L) = \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} k^2 A(l_{0k}) - B D^{-1} B^+ \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} k^2 A(l_{0k}) [1 - \rho_p(l_{0k})] \right\}^{-1}, \quad (15)$$

где $A(l_{0k})$ и $\rho_p(l_{0k})$ определяются из (6) и соответственно, при замене в этих формулах l_0 на l_{0k} .

Если значения неинформативных параметров у быстро флуктуирующей последовательности априори известны, то в (15) следует положить $\rho_p(l_{0k}) \equiv 0$. Тогда дисперсия ОМП периода следования будет равна

$$D_N(\theta) = 1 / \sum_{k=0}^{N-1} k^2 A(l_{0k}). \quad (16)$$

К такому же результату приходим, если ОМП всех неинформативных параметров k -го импульса последовательности некоррелированных с ОМП его времени прихода, так что в (9) величина $R_{ii}(l_{0k}) = 0, i = \overline{1, p}, k = \overline{0, N-1}$.

Выражение (15) существенно упрощается, если все неинформативные параметры быстро флуктуирующей последовательности являются незнергетическими [4] или истинные значения неинформативных параметров одинаковы для всех импульсов последовательности с интенсивностью (12). Последнее предположение соответствует случаю, когда последовательность в действительности медленно флуктуирующая, но обрабатывается как быстро флуктуирующая. Итак, полагаем в (15)

$$A(l_{00}) = A(l_{01} = \dots = A(l_{0p})) = \sigma_i^2; \rho_p(l_{00}) = \rho_p(l_{01}) = \dots = \rho_p(l_{0p}) = \rho_p,$$

где σ_i^2 определяется из (16). Тогда (15) принимает вид

$$D(\theta | L) = D_N(\theta) / (1 - \rho_p),$$

и сравнивая его с (16), находим

$$\chi_p = D(\theta | L) / D_N(\theta) = (1 - \rho_p)^{-1}. \quad (17)$$

Эта величина определяет проигрыш в точности ОМП периода следования быстро флуктуирующей последовательности по сравнению с ОМП периода следования последовательности, не содержащей неинформативных параметров.

Сравним теперь проигрыш в точности ОМП периода следования при медленных и быстрых флуктуациях последовательности. Обозначим $\alpha = 3(N-1) / 2(2N-1)$. Очевидно, всегда $\alpha < 1$ и изменяется от значения $\alpha = 1/2$ при $N = 2$ до значения $\alpha = 3/4$ при $N \rightarrow \infty$. Переписав (11) как $\chi = (1 - \alpha \rho_p)^{-1}$ и учитывая, что $\alpha < 1$ получаем, сопоставляя с (17), $\chi \leq \chi_p = (1 - \rho_p)^{-1}$. Таким образом, проигрыш в точности ОМП периода следования быстро флуктуирующей последовательности всегда больше, чем для медленно флуктуирующей последовательности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Воробьев В. М. Оптическая локация для радиоинженеров.— М.: Радио и связь. 1983.— 176 с.
2. Гальярди Р. М., Карп Ш. Оптическая связь.— М.: Связь, 1978.— 424 с.
3. Большаков И. А., Ракошиц В. С. Прикладная теория случайных потоков.— М.: Сов. радио, 1978.— 248 с.
4. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М.: Сов. радио, 1978.— 296 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1968.— 576 с.

Воронежский госуниверситет.

Поступила в редакцию 02.11.99.