

p-3908  
SWO/5/6  
62

5

ISSN 1560-4128

**ЭВ  
&  
ЭС**

# **ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ**

**6'2000**

[www.webcenter.ru/~iprzhr/](http://www.webcenter.ru/~iprzhr/)

**т. 5**

**В НОМЕРЕ :**

**Новый метод вычисления  
собственных чисел  
спектральной задачи Орра-Зоммерфельда**

**Оценка времени прихода  
и длительности сигнала**

**Модели надежных  
телекоммуникационных сетей**



Тел./факс: (095) 925-9241  
E-mail: [iprzhr@online.ru](mailto:iprzhr@online.ru)  
<http://www.webcenter.ru/~iprzhr/>

Журнал переводится на английский язык  
и издается компанией Begell House, Inc. под названием  
TELECOMMUNICATIONS AND RADIO ENGINEERING

**ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС 71961 В КАТАЛОГЕ АГЕНТСТВА "РОСПЕЧАТЬ": ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ**

# Информационно-измерительные системы

УДК 391.621.01

## Оценка времени прихода и длительности сигнала\*

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин

Установлена структура максимально правдоподобного измерителя; найдены асимптотические характеристики совместных оценок максимального правдоподобия времени прихода и длительности разрывного сигнала произвольной формы; на примере прямоугольного импульса со скошенной вершиной показано, что проигрыш в эффективности оценивания одного параметра вследствие незнания другого может быть существенно выше, чем для прямоугольного импульса; приведены результаты статистического моделирования оценок.

The structure of a maximum likelihood gauge is established. The asymptotic characteristics of joint maximum likelihood estimations of arrival time and duration of discontinued arbitrary signal waveform are found. On an example of a rectangular pulse with oblique top it is shown, that the precision loss of one parameter estimation because of ignorance another parameter can be much higher, than for a rectangular pulse. The statistical modeling results of estimations are presented.

**Введение.** В [1] исследована совместная оценка максимального правдоподобия (ОМП) времени прихода и длительности прямоугольного импульса. Однако реальные условия генерации и распространения приводят к необходимости оценивания времени прихода и длительности сигнала, форма которого отличается от прямоугольной.

Пусть наблюдается реализация случайного процесса

$$x(t) = s(t, \lambda_0, \tau_0) + n(t). \quad (1)$$

Здесь  $n(t)$  — белый гауссовский шум с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ , а полезный сигнал

$$s(t, \lambda, \tau) = f(t) I[(t - \lambda)/\tau], \quad (2)$$

где  $f(t)$  — непрерывная функция, описывающая форму сигнала;  $I(x) = 1$  при  $|x| \leq 1/2$  и  $I(x) = 0$  при  $|x| > 1/2$ ;  $\lambda_0, \tau_0$  — истинные значения времени прихода и длительности. Полагаем, что в моменты появления  $t = \theta_{01} = \lambda_0 - \tau_0/2$  и исчезновения  $t = \theta_{02} = \lambda_0 + \tau_0/2$  сигнала (2) функция  $f(t)$  не обращается в нуль,  $f(\lambda_0 \pm \tau_0/2) \neq 0$ , т. е. сигнал (2) является разрывным [2–4].

Обозначим

$$L(\lambda, \tau) = \frac{2}{N_0} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} f(t) x(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} f^2(t) dt \quad (3)$$

— логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР). Тогда ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  определяются как координаты абсолютного (наибольшего) максимума случайного поля (3) при  $(\lambda, \tau) \in \Lambda$ . Полагаем, что область  $\Lambda$  задана неравенствами  $|\lambda| \leq \Lambda_0/2$ ;  $T_1 \leq \tau \leq T_2$ . Ограничимся аналогично [1] рассмотрением надежных ОМП. Нетрудно убедиться [5], что аномальные ошибки отсутствуют, если

$$\Lambda_0 \leq T_1. \quad (4)$$

Действительно, подставляя в (3) реализацию наблюдаемых данных (1), получаем

\* Приведенные результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

$$L(\lambda, \tau) = S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) - \frac{1}{2} Q(\lambda, \tau) + N(\lambda, \tau).$$

Здесь сигнальная функция [5]

$$S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) = \frac{\tilde{z}^2}{\tau_0} \int_{\max(\lambda_0 - \tau_0/2, \lambda - \tau/2)}^{\min(\lambda_0 + \tau_0/2, \lambda + \tau/2)} f^2(t) dt, \quad |\lambda - \lambda_0| \leq (\tau + \tau_0)/2; \quad (5)$$

$$S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) = 0, \quad |\lambda - \lambda_0| > (\tau + \tau_0)/2;$$

$Q(\lambda, \tau) = S(\lambda, \lambda, \tau, \tau)$ ;  $\tilde{z}^2 = 2\tau_0/N_0$  — отношение сигнал-шум (ОСШ) для прямоугольного импульса с длительностью  $\tau_0$  и единичной амплитудой.

Шумовая составляющая  $N(\lambda, \tau)$  является центрированным гауссовским случайным полем, корреляционная функция которого  $K_N(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2) = S(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)$ . Согласно (5)  $S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) \neq 0$  для всех  $(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) \in \Lambda$ , когда выполняется (4).

**Асимптотическая совместная плотность вероятности оценок.** Для определения ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  перейдем аналогично [1] к новым параметрам

$$\theta_1 = \lambda - \tau/2, \quad \theta_2 = \lambda + \tau/2 \quad (6)$$

— положениям переднего и заднего фронтов сигнала (2). Обозначим область их возможных значений  $\Theta$ . Очевидно, что линейные преобразования (6) взаимно однозначны, поэтому определив характеристики ОМП положений фронтов  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$ , можно затем найти характеристики ОМП  $\hat{\lambda} = (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)/2$  и  $\hat{\tau} = \hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$  времени прихода и длительности. Для параметров  $\theta_1, \theta_2$  логарифм ФОП (3) принимает вид

$$L(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2),$$

где

$$L_1(\theta_1) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f(t) x(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt; \quad (7)$$

$$L_2(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f(t) x(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt; \quad (8)$$

$\theta$  — фиксированная точка из интервала  $[-(T_1 - \Lambda_0)/2, (T_1 - \Lambda_0)/2]$ . Поскольку (7) и (8) содержат интегралы от гауссовского белого шума на неперекрывающихся интервалах, то  $L_1(\theta_1)$  и  $L_2(\theta_2)$  — статистически независимые гауссовские случайные процессы. Следовательно, положение максимума случайного поля  $L(\theta_1, \theta_2)$  по переменным  $\theta_1$  и  $\theta_2$  можно искать отдельно как положения максимумов случайных процессов (7) и (8), соответственно  $\hat{\theta}_i = \arg \sup L_i(\theta_i)$ ,  $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_a$ . Здесь область  $\Theta_a$  — квадрат минимальной площади со сторонами параллельными осям  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , включающий в себя  $\Theta$  [1]. Область  $\Theta_a$  задается неравенствами

$$-\beta \leq \theta_1 \leq -\alpha; \quad \alpha \leq \theta_2 \leq \beta; \quad (9)$$

$$\alpha = (T_1 - \Lambda_0)/2; \quad \beta = (T_2 + \Lambda_0)/2.$$

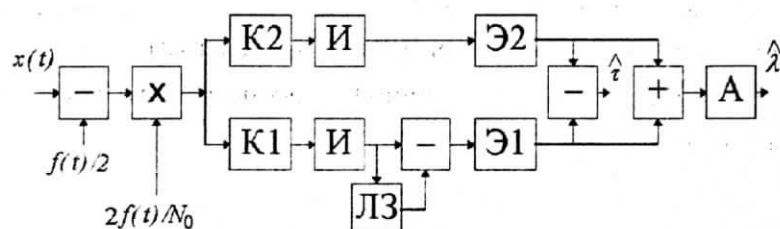


Рис. 1

Возможная структурная схема максимально правдоподобного измерителя времени прихода и длительности представлена на рис. 1, где К1 и К2 — ключи, замкнутые на отрезках времени  $[-\beta, \theta]$  и  $[\theta, \beta]$ ; И — интеграторы; ЛЗ — линия задержки на время

$\theta + \beta$ ; Э1 и Э2 — экстрематоры, определяющие положения абсолютных максимумов сигналов на отрезках времени  $[\theta, \theta + \beta - \alpha]$  и  $[\alpha, \beta]$  соответственно; А — аттенюатор с коэффициентом передачи 1/2.

Определим аппроксимацию плотности вероятности ОМП  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  для области  $\Theta_a$ . Аналогично [1] искомую аппроксимацию плотности вероятности представим в виде

$$W_a(\theta_1, \theta_2) = W_{1\theta}(\theta_1)W_{2\theta}(\theta_2), \quad (10)$$

где  $W_{1\theta}(\theta_1)$  и  $W_{2\theta}(\theta_2)$  — плотности вероятностей положений абсолютных максимумов реализаций случайных процессов  $L_1(\theta_1)$  (7) и  $L_2(\theta_2)$  (8) на интервалах  $[-\beta, -\alpha]$  и  $[\alpha, \beta]$  соответственно.

Рассмотрим статистические характеристики процессов  $L_1(\theta_1)$  и  $L_2(\theta_2)$ , которые согласно (7) и (8) представляют собой линейные преобразования гауссовского случайного процесса  $x(t)$  и, следовательно, сами являются гауссовскими. Поэтому для их полного статистического описания достаточно найти математические ожидания и корреляционные функции. Выполняя усреднение, получаем

$$S_1(\theta_1) = \langle L_1(\theta_1) \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_1, \theta_{01})}^{\theta} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt; \quad (11)$$

$$S_2(\theta_2) = \langle L_2(\theta_2) \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt; \quad (12)$$

$$K_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = \langle [L_1(\theta_{11}) - \langle L_1(\theta_{11}) \rangle][L_1(\theta_{21}) - \langle L_1(\theta_{21}) \rangle] \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_{11}, \theta_{21})}^{\theta} f^2(t) dt; \quad (13)$$

$$K_2(\theta_{12}, \theta_{22}) = \langle [L_2(\theta_{12}) - \langle L_2(\theta_{12}) \rangle][L_2(\theta_{22}) - \langle L_2(\theta_{22}) \rangle] \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} f^2(t) dt. \quad (14)$$

Далее будем полагать, что выходное ОСШ для принятого сигнала достаточно велико

$$z_0^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt \gg 1. \quad (15)$$

В этом случае положения максимумов случайных процессов  $L_1(\theta_1)$  и  $L_2(\theta_2)$  располагаются в малых окрестностях истинных значений  $\theta_{01}, \theta_{02}$  параметров  $\theta_1, \theta_2$  [5]. Следовательно, при достаточно больших ОСШ необходимо исследовать поведение случайных процессов (7) и (8) в малых окрестностях точек  $\theta_{01}$  и  $\theta_{02}$ . Полагая  $\Delta = \max\{|\theta_i - \theta_{0i}|, |\theta_{ij} - \theta_{0j}|\} \rightarrow 0$ ,  $i, j = 1, 2$ , для средних значений (11), (12) и корреляционных функций (13), (14) находим асимптотические разложения

$$S_i(\theta_i) = \frac{\sigma_i^2}{2} - \frac{z_i^2}{2\tau_0} |\theta_i - \theta_{0i}| + o(\Delta); \quad (16)$$

$$K_i(\theta_{1i}, \theta_{2i}) = \sigma_i^2 + z_i^2 \min[(-1)^i(\theta_{1i} - \theta_{0i}), (-1)^i(\theta_{2i} - \theta_{0i})] / \tau_0 + o(\Delta), \quad (17)$$

$$\text{где } \sigma_1^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta} f^2(t) dt; \sigma_2^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_{02}} f^2(t) dt; z_i^2 = \tilde{z}^2 f^2(\theta_{0i}), i = 1, 2.$$

Величину  $z_i^2$  можно интерпретировать как ОСШ для прямоугольного импульса длительностью  $\tau_0$  с амплитудой  $f(\theta_{0i})$ .



Поскольку положения максимумов процессов (7) и (8) располагаются в малой окрестности истинных значений  $\theta_{01}, \theta_{02}$ , будем аппроксимировать математические ожидания (11), (12) и корреляционные функции (13), (14) главными членами асимптотических разложений (16), (17) на интервалах  $[-\beta, -\alpha]$  и  $[\alpha, \beta]$  при  $i=1$  и  $i=2$  соответственно.

Рассмотрим случайный процесс  $L_2(\theta_2)$  (8). Используя теорему Дуба [6], а также (16) и (17), можно показать, что в малой окрестности точки  $\theta_{02}$  процесс  $L_2(\theta_2)$  является асимптотически марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{z_2^2}{2\tau_0} \begin{cases} 1, & \alpha \leq \theta_2 \leq \theta_{02}; \\ -1, & \theta_{02} < \theta_2 \leq \beta; \end{cases} \quad k_2 = \frac{z_2^2}{\tau_0}.$$

Используя марковские свойства [6] процесса (8), получаем аналогично [1] асимптотическую плотность вероятности положения абсолютного максимума процесса  $L_2(\theta_2)$

$$W_{2\theta}(\theta_2) = \frac{z_2^2}{2\tau_0} \begin{cases} \Psi\left[\frac{z_2^2}{2\tau_0}(\theta_{02} - \theta_2), \frac{z_2^2}{2\tau_0}(\theta_{02} - \alpha), \frac{z_2^2}{2\tau_0}(\beta - \theta_{02})\right], & \alpha \leq \theta_2 \leq \theta_{02}; \\ \Psi\left[\frac{z_2^2}{2\tau_0}(\theta_2 - \theta_{02}), \frac{z_2^2}{2\tau_0}(\beta - \theta_{02}), \frac{z_2^2}{2\tau_0}(\theta_{02} - \alpha)\right], & \theta_{02} < \theta_2 \leq \beta, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\Psi(y, y_1, y_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}y^{3/2}} \left[ \Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - y}{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi(y_1 - y)}} \exp\left(-\frac{y_1 - y}{4}\right) \right] \times \\ \times \int_0^\infty \xi \exp\left[-\frac{(\xi + y)^2}{4y}\right] \left[ \Phi\left(\frac{y_2 + \xi}{\sqrt{2y_2}}\right) - \exp(-\xi) \Phi\left(\frac{y_2 - \xi}{\sqrt{2y_2}}\right) \right] d\xi;$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi} \text{ — интеграл вероятности.}$$

Математическое ожидание и корреляционная функция случайного процесса  $L_1(\theta_1)$  (7) при замене переменной  $\chi = -\theta_1$  с точностью до замены  $\sigma_1$  на  $\sigma_2$  и  $z_1$  на  $z_2$  совпадают с аналогичными характеристиками процесса  $L_2(\theta_2)$ . Следовательно, учитывая указанные замены, можем сразу записать асимптотическое распределение положения абсолютного максимума процесса  $L_1(\theta_1)$  в виде

$$W_{1\theta}(\theta_1) = \frac{z_1^2}{2\tau_0} \begin{cases} \Psi\left[\frac{z_1^2}{2\tau_0}(\theta_{01} - \theta_1), \frac{z_1^2}{2\tau_0}(\theta_{01} + \beta), -\frac{z_1^2}{2\tau_0}(\alpha + \theta_{01})\right], & -\beta \leq \theta_1 \leq \theta_{01}; \\ \Psi\left[\frac{z_1^2}{2\tau_0}(\theta_1 - \theta_{01}), -\frac{z_1^2}{2\tau_0}(\alpha + \theta_{01}), \frac{z_1^2}{2\tau_0}(\theta_{01} + \beta)\right], & \theta_{01} < \theta_1 \leq -\alpha. \end{cases} \quad (19)$$

Точность выражений (18), (19) возрастает с увеличением ОСШ (15).

Если сигнал имеет вид прямоугольного импульса с амплитудой  $A_r$ , так что  $f(t) \equiv A_r$ , то  $z_1^2/2\tau_0 = z_2^2/2\tau_0 = \tilde{z}^2 A_r^2/2\tau_0$  и (18), (19) полностью совпадают с аналогичными выражениями, найденными в [1].

Согласно (6), (10) совместная плотность вероятности ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  при  $(\lambda, \tau) \in \Lambda_a$  имеет вид

$$W_a(\lambda, \tau) = W_{1\theta}(\lambda - \tau/2) W_{2\theta}(\lambda + \tau/2). \quad (20)$$

Область  $\Lambda_a$  соответствует  $\Theta_a$  (9). Она отличается от действительной области возможных значений оцениваемых параметров  $\Lambda$ , однако, как показано в [1], включает в себя все точки области  $\Lambda$ .

**Асимптотические характеристики оценок.** Введем в рассмотрение нормированные ошибки ОМП времени прихода и длительности сигнала (2)

$$\mu = (\hat{\lambda} - \lambda_0) z_1 z_2 / \tau_0; \quad \nu = (\hat{\tau} - \tau_0) z_1^2 z_2 / 2\tau_0.$$

Переходя в (18)–(20) к новым переменным и полагая  $z_0 \gg 1$ , находим предельную двумерную плотность вероятности нормированных ошибок совместных оценок [1]

$$W_2(\mu, \nu) = \frac{1}{2} W_0\left(\frac{\mu - \nu}{2}\right) W_0\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right). \quad (21)$$

Здесь

$$W_0(x) = 3 \exp(2|x|) \left[ 1 - \Phi\left(3\sqrt{\frac{|x|}{2}}\right) \right] + \Phi\left(\sqrt{\frac{|x|}{2}}\right) - 1 \quad (22)$$

— предельная плотность вероятности нормированной ошибки ОМП одного параметра разрывного сигнала при условии, что второй параметр известен. Свойства плотности вероятности (22) изучены и описаны в [4]. Плотность вероятности (22) существенно отличается от гауссовской, имеет нулевые математическое ожидание и коэффициент асимметрии [4], обладает дисперсией 13/2, коэффициентом эксцесса  $1779/169 \approx 10,53$  и четвертым моментом  $1143/4$ .

Совместная плотность вероятности (21) позволяет рассчитать асимптотические значения смещений, рассеяний и коэффициента корреляции ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$ :

$$b(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0) = \langle \hat{\lambda} - \lambda_0 \rangle = 0; \quad b(\hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0) = \langle \hat{\tau} - \tau_0 \rangle = 0; \quad (23)$$

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0) = \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle = 13\tau_0^2 / z^4; \quad (24)$$

$$V(\hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0) = \langle (\hat{\tau} - \tau_0)^2 \rangle = 52\tau_0^2 / z^4; \quad (25)$$

$$K_1(\hat{\lambda}, \hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0) = \frac{\langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)(\hat{\tau} - \tau_0) \rangle}{\sqrt{\langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle \langle (\hat{\tau} - \tau_0)^2 \rangle}} = (q^2 - q^{-2}) / (q^2 + q^{-2}); \quad (26)$$

$$q^2 = z_1^2 / z_2^2 = f^2(\lambda_0 - \tau_0/2) / f^2(\lambda_0 + \tau_0/2); \quad z^2 = z_1^2 z_2^2 \sqrt{2/(z_1^4 + z_2^4)}. \quad (27)$$

— обобщенное ОСШ для сигнала (2).

В частном случае, когда сигнал имеет прямоугольную форму, т. е.  $f(t) \equiv A_r$  и  $q = 1$ , характеристики совместных оценок времени прихода и длительности (23)–(26) принимают вид

$$\begin{aligned} b_r(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0) &= 0; \quad b_r(\hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0) = 0; \\ V_r(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0) &= 13\tau_0^2 / z_r^4; \quad V_r(\hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0) = 52\tau_0^2 / z_r^4; \\ K_{1r}(\hat{\lambda}, \hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0) &= 0; \quad z = \tilde{z}A_r = z_r, \end{aligned} \quad (28)$$

что полностью совпадает с аналогичными выражениями, найденными в [1]. Как видно из (28), совместные оценки времени прихода и длительности прямоугольного импульса некоррелированы, следовательно, между ними отсутствует линейная статистическая зависимость. Однако рассеяния совместных ОМП (28) в 2 раза превышают рассеяния соответствующих отдельных оценок [2, 3], что свидетельствует о существовании между  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  нелинейной статистической взаимосвязи. Количественно охарактеризовать эту связь можно коэффициентом корреляции между квадратами ошибок оценок [1], который для сигнала (2) асимптотически равен

$$K_2 = \frac{\langle (\mu^2 - \langle \mu^2 \rangle) (\nu^2 - \langle \nu^2 \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (\mu^2 - \langle \mu^2 \rangle)^2 \rangle \langle (\nu^2 - \langle \nu^2 \rangle)^2 \rangle}} = \frac{2117 (q^4 + q^{-4})/4 - 169}{2117 (q^4 + q^{-4})/4 + 169}. \quad (29)$$

В частном случае прямоугольного импульса при  $q=1$  коэффициент квадратичной корреляции  $K_{2r} = 1779/2455 \approx 0,725$  [1].

Для того чтобы охарактеризовать влияние отклонения формы импульса от прямоугольной на характеристики ОМП времени прихода и длительности, введем в рассмотрение отношения

$$\kappa = \frac{V(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0)}{V_r(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0)} = \frac{V(\hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0)}{V_r(\hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0)} = \frac{1}{2} \tilde{z}^4 A_r^4 \left( \frac{1}{z_1^4} + \frac{1}{z_2^4} \right); \quad (30)$$

$$\kappa_2 = \frac{K_2}{K_{2r}} = \frac{2455}{1779} \frac{2117 (q^4 + q^{-4})/4 - 169}{2117 (q^4 + q^{-4})/4 + 169}.$$

Здесь индексом  $r$  отмечены характеристики (28) оценок для прямоугольного импульса, длительность которого равна длительности импульса (2), а амплитуда  $A_r$  выбирается из условия равенства их энергий

$$A_r^2 \tau_0 = \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt.$$

Теперь рассмотрим влияние априорного незнания одного из параметров сигнала (2) на точность оценки другого. Если длительность  $\tau_0$  импульса (2) априори известна, то рассеяние раздельной оценки времени прихода [7]

$$V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 13/2 \delta_\lambda^2, \quad (31)$$

где

$$\delta_\lambda = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0+} \{ [S(\lambda_0, \lambda_0, \tau_0, \tau_0) - S(\lambda_0, \lambda_0 + \Delta\lambda, \tau_0, \tau_0)] / \Delta\lambda \}. \quad (32)$$

Подставляя (5) в (32) и вычисляя предел, находим

$$\delta_\lambda = (z_1^2 + z_2^2) / 2\tau_0. \quad (33)$$

Используя (33), находим рассеяние раздельной ОМП времени прихода (31) в виде  $V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 26\tau_0^2 / (z_1^2 + z_2^2)^2$ .

Если же априори известно время прихода  $\lambda_0$ , то рассеяние раздельной оценки длительности [7]

$$V_0(\hat{\tau}|\tau_0) = 13/2 \delta_\tau^2, \quad (34)$$

где

$$\delta_\tau = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0+} \{ [S(\lambda_0, \lambda_0, \tau_0, \tau_0) - S(\lambda_0, \lambda_0, \tau_0, \tau_0 + \Delta\tau)] / \Delta\tau \}. \quad (35)$$

Подставляя (5) в (35) и вычисляя предел, находим

$$\delta_\tau = (z_1^2 + z_2^2) / 4\tau_0. \quad (36)$$

Согласно (34), (36) рассеяние раздельной ОМП длительности принимает вид  $V_0(\hat{\tau}|\tau_0) = 104\tau_0^2 / (z_1^2 + z_2^2)^2$ .

Проигрыш в эффективности оценивания времени прихода из-за незнания длительности сигнала и проигрыш в эффективности оценивания длительности из-за незнания времени прихода можно охарактеризовать отношением

$$\chi = \frac{V(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0)}{V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0)} = \frac{V(\hat{\tau}|\tau_0, \tau_0)}{V_0(\hat{\tau}|\tau_0)} = \frac{1}{4}(q^2 + q^{-2})(q + q^{-1})^2. \quad (37)$$

Конкретизируем полученные выражения для прямоугольного импульса со скошенной вершиной [8]

$$f(t) = A_r \left[ 1 + \frac{t}{\tau_0} \left( \frac{1-q}{1+q} \right) \right] / \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left( \frac{1-q}{1+q} \right)^2}, \quad (38)$$

где параметр  $q$  (27) характеризует наклон вершины импульса. Линейная функция  $f(t)$ , описывающая поведение вершины импульса, нормирована так, что энергия  $E$  сигнала (2) не зависит от  $q$ . Действительно,

$$E = \int_{\lambda_0 - \tau_0/2}^{\lambda_0 + \tau_0/2} f^2(t) dt = A_r^2 \tau_0, \text{ т. е. совпадает с энергией прямоугольного импульса, обладающего амплитудой } A_r \text{ и длительностью } \tau_0, \text{ при любом наклоне скошенной вершины (38) сигнала (2).}$$

Выберем истинные время прихода и длительность сигнала (2), (38) таким образом, чтобы соответствующие им истинные моменты появления и исчезновения располагались посередине априорных интервалов их возможных значений, т. е.  $\theta_{01} = -(\alpha + \beta)/2$ ,  $\theta_{02} = (\alpha + \beta)/2$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  определены в (9). Тогда, используя преобразования (6), получаем

$$\lambda_0 = 0; \quad \tau_0 = (T_2 + T_1)/2. \quad (39)$$

Поскольку истинные моменты появления и исчезновения располагаются посередине априорных интервалов возможных значений, для границ этих интервалов можем записать

$$\theta_{j\min} = \theta_{0j} - \Delta; \quad \theta_{j\max} = \theta_{0j} + \Delta; \quad j = 1, 2, \quad (40)$$

где  $\Delta = (\beta - \alpha)/2$  — половина априорного интервала. Обозначая  $k = \beta/\alpha = (\tau_0 + 2\Delta)/(\tau_0 - 2\Delta)$ , получаем

$$\Delta = \tau_0 (k - 1) / [2(k + 1)]. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (40), записываем границы априорных интервалов в виде

$$\theta_{1\min} = -k\tau_0/(k + 1); \quad \theta_{1\max} = -\tau_0/(k + 1); \quad (42)$$

$$\theta_{2\min} = \tau_0/(k + 1); \quad \theta_{2\max} = k\tau_0/(k + 1).$$

Границы области  $\Lambda$  связаны с границами области  $\Theta$  преобразованиями (6). Применяя эти преобразования к выражениям (42), получаем

$$T_1 = \frac{2\tau_0}{k + 1} + \Lambda_0; \quad T_2 = \frac{2k\tau_0}{k + 1} - \Lambda_0; \quad \Lambda_0 = \tau_0/2. \quad (43)$$

Подставляя (38) в (27), находим асимптотические характеристики ОМП времени прихода и длительности сигнала (38) в виде (23)–(27) и (29), где

$$z^2 = \frac{4z_0^2 \sqrt{2}/(1+q)^2}{\sqrt{1+q^{-4}} \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{1-q}{1+q} \right)^2 \right)}. \quad (44)$$

С использованием (24), (25), (28) и (44) величину (30), характеризующую влияние отклонения формы сигнала от прямоугольной на точность ОМП, можно записать как

$$\kappa = \frac{1}{32} (1 + q^{-4}) (1 + q)^4 \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{1-q}{1+q} \right)^2 \right)^2. \quad (45)$$



На рис. 2 кривой 1 представлена зависимость проигрыша в точности  $\chi(q)$  (37) оценки времени прихода вследствие незнания длительности сигнала. Эта кривая также показывает проигрыш в точности оценки длительности вследствие незнания времени прихода сигнала. Кривая 2 показывает проигрыш в точности  $\kappa(q)$  (45) совместных ОМП времени прихода и длительности вследствие отличия формы сигнала (2), (38) от прямоугольной. На рис. 3 сплошной линией нанесена зависимость  $K_1(q)$  коэффициента корреляции ОМП (26), штриховой — зависимость  $K_2(q)$  коэффициента квадратичной корреляции (29). Как следует из рис. 2, по мере роста отличия формы сигнала от прямоугольной (с увеличением наклона вершины импульса) точность ОМП времени прихода и длительности сигнала падает. При этом проигрыш в точности оценок  $\kappa(q)$  (45) может быть значительным. Одновременно согласно рис. 3 модуль коэффициентов корреляции (26), (29) приближается к единице и возрастают потери  $\chi(q)$  (37) в точности оценки одного из параметров вследствие незнания другого параметра.

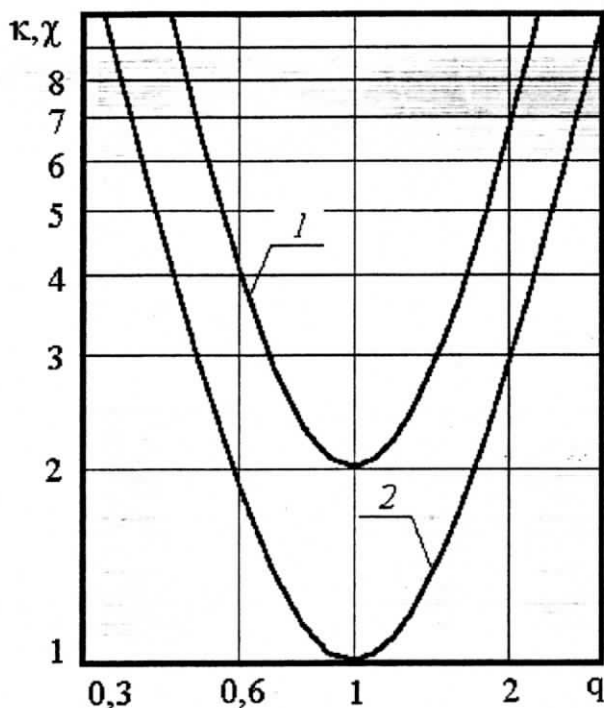


Рис. 2

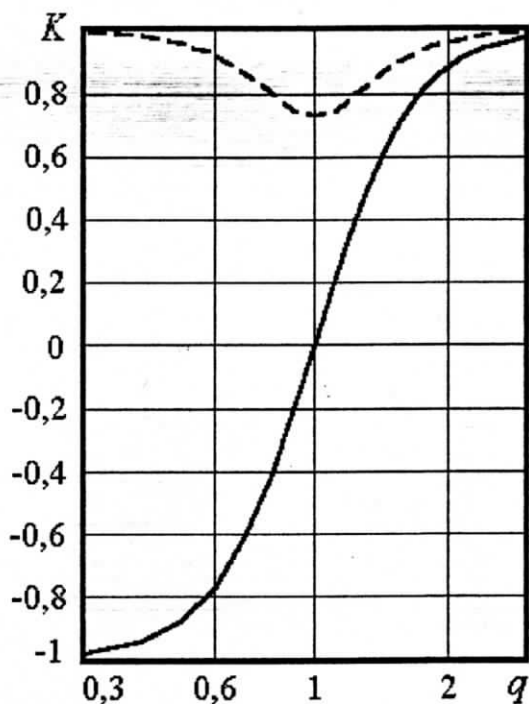


Рис. 3

**Результаты статистического моделирования.** С целью проверки работоспособности синтезированного алгоритма ОМП, а также установления границ применимости найденных асимптотических выражений для характеристик оценок проводилось статистическое моделирование совместных ОМП  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$ . Моделирование выполнялось для сигнала (2), (38), истинных значений неизвестных параметров (39) и границ области  $\Lambda$  (43). В процессе моделирования воспроизводились отсчеты случайного поля (3) на равномерной двумерной сетке с шагом дискретизации  $5 \cdot 10^{-3} \tau_0$ . Число обрабатываемых реализаций случайного поля (3) выбиралось так, чтобы с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклонялись от экспериментальных значений примерно на 10...15 %.

Экспериментальные данные совместно с теоретическими зависимостями, рассчитанными по асимптотическим формулам (23)–(26), (29), (38) и (44), представлены на рис. 4–6. На рис. 4 показаны зависимости нормированного рассеяния  $\varepsilon_\lambda = V(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0)/\tau_0^2$  ОМП времени прихода, рассчитанные по (25), от отношения сигнал-шум  $z_0$  (15) для принятого сигнала при  $k=4$  и нескольких значений  $q$ . На рис. 5 представлены аналогичные зависимости нормированного рассеяния  $\varepsilon_\tau = V(\hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0)/\tau_0^2$  ОМП длительности, рассчитанные по (26). На рис. 4, 5 кривые 1, 2, 3 соответствуют  $q=1, 2, 3$ . Там же показаны экспериментальные значения нормированных рассеяний для  $q=1$  (квадраты),  $q=2$  (ромбы) и  $q=3$  (кружки).

Степень статистической взаимосвязи ОМП времени прихода и длительности прямоугольного импульса со скошенной вершиной (38) характеризует рис. 6. Поскольку с ростом  $q$  значения коэффициентов корреляции (26) и (29) быстро приближаются к единице, на рис. 6, а и б штриховыми линиями приведены зависимости от обобщенного ОСШ  $z$  (27) соответственно величин  $1-K_1$  и  $1-K_2$ , представляющих собой дополнения коэффициентов корреляции до единицы. Кривые 1, 2, 3 на рис. 6 соответствуют значениям  $q=1, 2, 3$ . Полученные в результате моделирования экспериментальные величины обозначены квадратами для  $q=1$ , ромбами для  $q=2$ , кружками для  $q=3$ . Как видно из рисунков, рассеяния ОМП времени прихода и длительности увеличиваются с ростом  $q$  (27), при этом рассеяние ОМП длительности в 4 раза превышает рассеяние оценки времени прихода. Для сигнала непрямоугольной формы рассеяния ОМП времени прихода и длительности могут быть существенно больше рассеяний оценок тех же параметров прямоугольного импульса. Статистическая взаимосвязь между оценками для такого сигнала также может оказаться значительно сильнее, чем в частном случае прямоугольного импульса. Удовлетворительное согласование расчетов по асимптотическим формулам (23)–(26) и (29) с экспериментальными данными наблюдается при значении параметра  $z \geq 12$ .

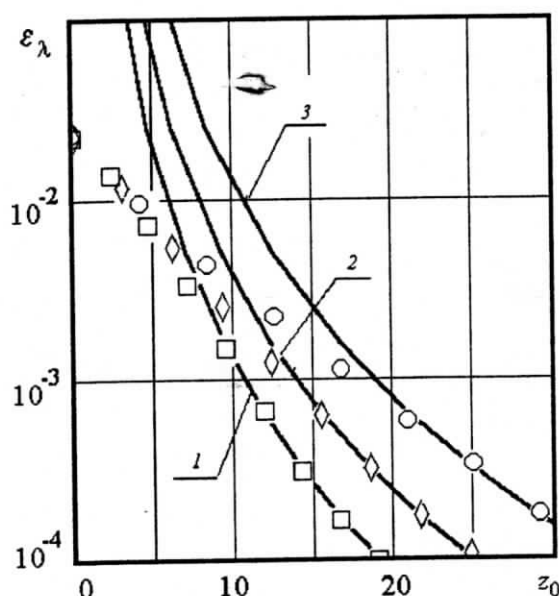


Рис. 4

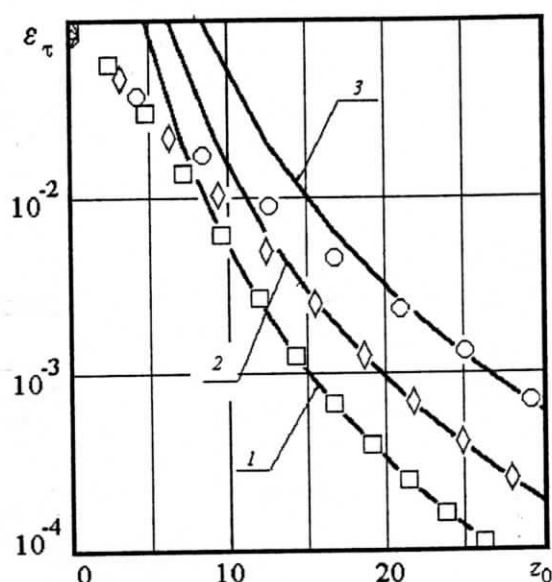
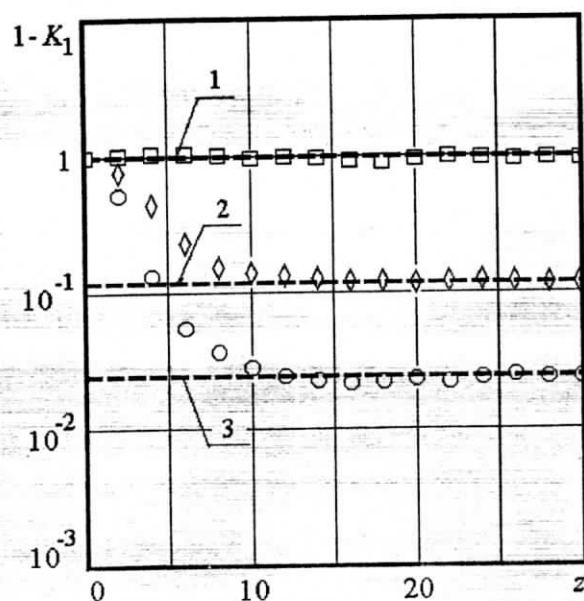
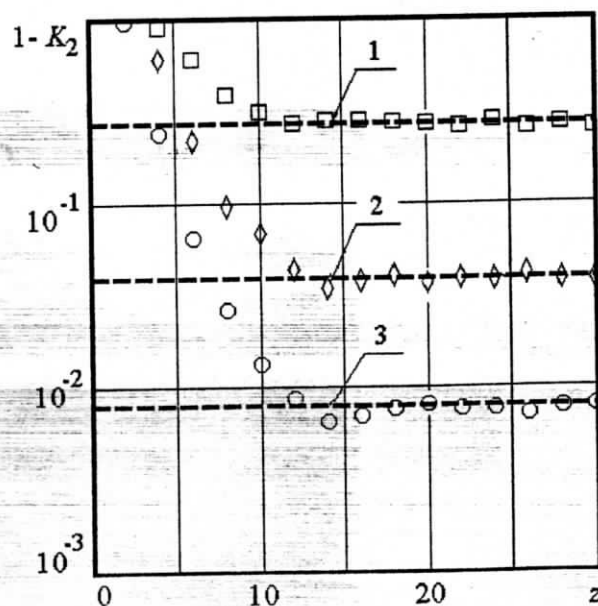


Рис. 5



а)



б)

Рис. 6

Асимптотические характеристики совместных ОМП времени прихода и длительности сигнала не зависят от его формы, а определяются значениями сигнала в моменты появления и исчезновения. В отличие от совместных ОМП времени прихода и длительности прямоугольного импульса, ОМП времени прихода и длительности произвольного разрывного сигнала оказываются коррелированными. Проигрыш в эффективности оценивания одного из параметров вследствие незнания другого может быть существенно выше, чем для частного случая прямоугольного импульса.

## Литература

1. Трифонов А.П., Бутейко В.К. Совместная оценка двух параметров разрывного сигнала на фоне белого шума. — Радиотехника и электроника, 1989, т. 34, №11, с. 2323–2329.
2. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986.
3. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979.
4. Трифонов А.П. Разрывные модели сигналов и оценка их параметров. — Прикладная теория случайных процессов и полей. — Ульяновск: УлГТУ, 1995, с. 164–214.
5. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978.
6. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Радио и связь, 1977.
7. Трифонов А.П., Бутейко В.К. Характеристики совместных оценок параметров сигнала при частичном нарушении условий регулярности. — Радиотехника и электроника, 1991, т. 36, № 2, с. 319–327.
8. Грязнов М.И., Гуревич М.Л., Рябинин Ю.А. Измерение параметров импульсов. — М.: Радио и связь, 1991.

Поступила 12 июля 1999 г.



**Трифонов Андрей Павлович** (1944 г. р.) — докт. техн. наук, профессор, зав. кафедрой радиофизики Воронежского государственного университета. Область научных интересов: статистическая радиофизика и радиотехника, разработка и применение статистических методов для получения, передачи и обработки информации.

**Корчагин Юрий Эдуардович** (1974 г. р.) — аспирант кафедры радиофизики Воронежского государственного университета. Область научных интересов: исследование алгоритмов приема разрывных сигналов с неизвестными параметрами.