

УДК 621.321

## Расчет эффективности обнаружения сигнала на основе Эйлеровых характеристик решающей статистики

© Авторы, 2017

© ООО «Издательство «Радиотехника», 2017

**А.П. Трифонов** – Засл. деятель науки РФ, д.т.н., профессор, зав. кафедрой радиофизики, Воронежский государственный университет

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

**Е.В. Литвинов** – к.ф.-м.н., ассистент, кафедра радиофизики, Воронежский государственный университет

**Ю.Э. Корчагин** – д.ф.-м.н., профессор, кафедра радиофизики, Воронежский государственный университет

E-mail: korchagin@phys.vsu.ru

Найдены выражения для характеристик алгоритма обнаружения симметричного сигнала произвольной формы с неизвестными амплитудой, длительностью и временем прихода с учетом краевых эффектов на границе априорной области неизвестных параметров. Исследовано влияние учета краевых эффектов на точность вычисления характеристик алгоритма обнаружения посредством статистического моделирования на ЭВМ алгоритма обнаружения сигнала колокольной формы.

**Ключевые слова:** обнаружение, вероятность ложной тревоги, вероятность пропуска сигнала, Эйлерова характеристика, время прихода, длительность.

Expressions for detection characteristics of symmetrical general form signal are founded when arrival time, duration and amplitude of the signal are unknown and there are side effects on the boundary of a priori area. The influence of boundary effects of a priori area on the precision of characteristics are investigated by means of statistical computer modeling of bell-like signal detection algorithm.

**Keywords:** detection, probability of false alarm, probability of missing a signal, Euler characteristics, time of arrival, duration.

Во многих приложениях статистической радиофизики и радиотехники необходимо производить обнаружение квазидетерминированных сигналов, принимаемых на фоне помех [1–5]. В работе [3] рассматривалось обнаружение по методу максимального правдоподобия квазидетерминированного сигнала вида

$$s(t, a_0, \lambda_0, \tau_0) = a_0 f\left[\frac{(t - \lambda_0)}{\tau_0}\right] \quad (1)$$

на фоне гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$  при условии, что амплитуда  $a_0$ , время прихода  $\lambda_0$  и эквивалентная длительность сигнала  $\tau_0 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt / [\sup s(t)]^2$  априори неизвестны. В (1) функция  $f(x)$  описывает форму сигнала и обладает свойствами

$$\sup f(x) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 1. \quad (2)$$

В [3] были получены асимптотические выражения для характеристик алгоритма обнаружения (вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала), не учитывающие возможные пересечения границ априорной области выбросами решающей статистики за порог обнаружения. Точность соотношений, полученных в [3], возрастает с ростом порога обнаружения и размеров априорной области неизвестных времени прихода и длительности, и, как следует из результатов моделирования на ЭВМ алгоритма обнаружения сигнала колокольной формы, приведенных в [3], теоретические зависимости вероятности ложной тревоги от порога удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, если приведенный объем априорной области времени прихода и длительности составляет несколько порядков. На практике это условие выполняется не всегда, поэтому представляет интерес нахождение выражений для характеристик алгоритма обнаружения квазидетерминированного сигнала (1), учитывающих возможные пересечения границ априорной области выбросами решающей статистики.

**Ц е л ь р а б о т ы** – найти выражения для характеристик алгоритма обнаружения сигнала с учетом краевых эффектов на границе априорной области неизвестных параметров

В дальнейшем положим, что возможные значения времени прихода  $\lambda_0$  и длительности  $\tau_0$  лежат в априорной области  $\Pi = [\Lambda_1; \Lambda_2][T_1; T_2]$ , а функция  $f(x)$  является четной:

$$f(x) = f(-x). \quad (3)$$

Для обнаружения сигнала (1) будем использовать алгоритм, синтезированный по методу максимального правдоподобия, приведенный в [3]. Ниже будут найдены асимптотические выражения для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода (вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала) алгоритма обнаружения сигнала (1), учитывающие возможные пересечения границ априорной области  $\Pi$  выбросами решающей статистики.

### Алгоритм обнаружения

Пусть в течение времени  $[0; T]$  на вход приемника поступает реализация смеси сигнала и шума  $x(t) = s(t, a_0, \lambda_0, \tau_0) + n(t)$  или только шума  $x(t) = n(t)$ .

Согласно [3] для обнаружения сигнала (1) по методу максимального правдоподобия необходимо формировать функционал (решающую статистику)

$$L(\lambda, \tau) = R^2(\lambda, \tau)/2, \quad (4)$$

где

$$R(\lambda, \tau) = \int_0^T x(t) f[(t-\lambda)/\tau] dt / \sqrt{E(\lambda, \tau) N_0/2}, \quad E(\lambda, \tau) = \int_0^T f^2[(t-\lambda)/\tau] dt \quad (5)$$

и сравнивать величину его абсолютного (наибольшего) максимума с порогом, выбранным в соответствии с заданным критерием оптимальности обнаружения [4, 5]. Решение о наличии полезного сигнала (1) в наблюдаемых данных принимается, если абсолютный максимум функционала (4) превысил порог  $h$  (гипотеза  $H_1$ ), иначе выносятся решение об отсутствии сигнала (гипотеза  $H_0$ ):

$$\sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} L(\lambda, \tau) > h \Rightarrow H_1, \quad \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} L(\lambda, \tau) < h \Rightarrow H_0. \quad (6)$$

Эффективность алгоритма обнаружения будем характеризовать вероятностями ошибок 1-го и 2-го рода (вероятностями ложной тревоги и пропуска сигнала).

### Расчет характеристик алгоритма обнаружения

В дальнейшем будем считать, что время наблюдения  $T$  достаточно велико, так что сигнал (1) полностью расположен внутри интервала наблюдения  $[0; T]$ . В частности, для этого необходимо выполнение условий  $\Lambda_1 \gg T_2$  и  $T - \Lambda_2 \gg T_2$ . Тогда пределы интегрирования в (5) можно заменить на бесконечные:

$$R(\lambda, \tau) \approx \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f[(t-\lambda)/\tau] dt / \sqrt{\tau N_0/2}, \quad E(\lambda, \tau) \approx \tau. \quad (7)$$

Функция  $E(\lambda, \tau)$  в (5) характеризует долю энергии сигнала (1) единичной амплитуды, сосредоточенную в интервале  $[0; T]$ , поэтому согласно (7) параметр  $\lambda$  можно считать неэнергетическим [6].

Пусть справедлива гипотеза  $H_0$  об отсутствии сигнала в наблюдаемых данных  $x(t)$ . Тогда вероятность ложной тревоги алгоритма (6) определяется выражением

$$\alpha = P \left[ \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} L(\lambda, \tau) > h \mid H_0 \right] \approx P \left[ \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} L_0(\lambda, \tau) > 2h \right] = P \left[ \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} R_0^2(\lambda, \tau) > 2h \right], \quad (8)$$

где

$$L_0(\lambda, \tau) = R_0^2(\lambda, \tau); \quad (9)$$

$$R_0(\lambda, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t) f[(t-\lambda)/\tau] dt / \sqrt{\tau N_0/2} \quad (10)$$

– функционал (7) при отсутствии сигнала  $s(t, a_0, \lambda_0, \tau_0)$  в наблюдаемых данных  $x(t)$ , представляющий собой центрированное неоднородное гауссовское случайное поле с единичной дисперсией и корреляционной функцией, определяемой с учетом (3) выражением

$$B_0(\Delta, \tau_1, \tau_2) = B_0(-\Delta, \tau_1, \tau_2) = \langle R_0(\lambda, \tau_1) R_0(\lambda + \Delta, \tau_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t/\tau_1) f[(t - \Delta)/\tau_2] dt / \sqrt{\tau_1 \tau_2}, \quad (11)$$

где  $\langle \cdot \rangle$  – усреднение по реализациям шума  $n(t)$ .

Для вычисления вероятности ложной тревоги (8) воспользуемся эвристическим методом, предложенным в [7, 8] и учитывающим возможные пересечения выбросами неоднородного случайного поля, распределенного по закону  $\chi^2$ , границ области его определения. Из (9)–(11) следует, что случайное поле  $L_0(\lambda, \tau)$  распределено по закону  $\chi^2$  с одной степенью свободы, неоднородно по параметру  $\tau$ , определяющему эквивалентную ширину сигнала (1), а поле  $R_0(\lambda, \tau)$  (10) дважды непрерывно-дифференцируемо в среднеквадратическом по параметрам  $\lambda$  и  $\tau$ . Кроме того, при фиксированном параметре  $\tau = \tilde{\tau}$  случайный процесс  $L_0(\lambda, \tilde{\tau})$  стационарен по параметру  $\lambda$ . Это позволяет воспользоваться результатами [8, 9] для расчета среднего значения Эйлеровой характеристики выбросов случайного поля  $L_0(\lambda, \tau)$  за уровень  $2h$ , а, следовательно, и вероятности ложной тревоги (8).

Пусть  $\Pi_b = \{(\lambda, \tau) \in \Pi : L_0(\lambda, \tau) > b\}$  – множество выбросов случайного поля  $L_0(\lambda, \tau)$  (9) за порог  $b$ . Согласно [9] при достаточно большом пороге  $b$  вероятность превышения этого порога абсолютным максимумом случайного поля  $L_0(\lambda, \tau)$  приближенно совпадает со средним значением Эйлеровой характеристики  $\psi(\Pi_b)$  множества выбросов этого поля:

$$P \left[ \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} L_0(\lambda, \tau) > b \right] \approx \langle \psi(\Pi_b) \rangle. \quad (12)$$

В соответствии с [8] для среднего значения Эйлеровой характеристики  $\psi(\Pi_b)$  случайного поля  $L_0(\lambda, \tau)$ , определяемого соотношениями (2)–(11) и распределенного по закону  $\chi^2$  с одной степенью свободы  $\nu = 1$ , можем записать

$$\langle \psi(\Pi_h) \rangle = V_1(\Pi_\lambda) \rho_1(h, \Pi_\tau) + V_0(\Pi_\lambda) \rho_0(h, \Pi_\tau), \quad (13)$$

где  $\Pi_\lambda = [\Lambda_1; \Lambda_2]$ ,  $\Pi_\tau = [T_1; T_2]$  – области возможных значений времени прихода  $\lambda$  и длительности  $\tau$  соответственно;  $V_1(\Pi_\lambda) = \Lambda_2 - \Lambda_1$ ,  $V_0(\Pi_\lambda) = \psi(\Pi_\lambda) = 1$  – функционалы Минковского области  $\Pi_\lambda$ ;

$$\begin{aligned} \rho_0(h, \Pi_\tau) &= 2 \left[ 1 - \Phi(\sqrt{h}) \right] + \sqrt{\kappa} \exp(-h/2) \ln(T_2/T_1) / \pi, \\ \rho_1(h, \Pi_\tau) &= \frac{\exp(-h/2) \sqrt{\gamma}}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \sqrt{\frac{h\kappa}{2\pi}} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

– интенсивности Эйлеровой характеристики размерностей 0 и 1;

$$\begin{aligned} \gamma &= -\tau^2 \left[ \frac{\partial^2 B_0(\Delta, \tau_1, \tau_2)}{\partial \Delta^2} \right]_{\Delta=0, \tau_1=\tau_2=\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]^2 dx, \\ \kappa &= \tau^2 \left[ \frac{\partial^2 B_0(\Delta, \tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \right]_{\Delta=0, \tau_1=\tau_2=\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ x \frac{df(x)}{dx} + \frac{f(x)}{2} \right]^2 dx \end{aligned} \quad (15)$$

– параметры, характеризующие кривизну корреляционной функции в окрестности ее максимума по параметру  $\lambda$  при фиксированных значениях параметра  $\tau$ .

Подставляя (14) и (15) в (13), а затем, с учетом (12), в (8) и ограничивая полученное выражение сверху значением 1, для вероятности ложной тревоги можем записать

$$\begin{aligned} \alpha \approx P \left[ \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} L_0(\lambda, \tau) > 2h \right] &= \min \left\{ 1, \frac{\exp(-h) \sqrt{\gamma} (\Lambda_2 - \Lambda_1)}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \sqrt{\frac{h\kappa}{\pi}} \right] + \right. \\ &\left. + 2 \left[ 1 - \Phi(\sqrt{2h}) \right] + \frac{\sqrt{\kappa}}{\pi} \exp(-h) \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Точность выражения (16) увеличивается с ростом порога обнаружения  $h$  и не зависит от размера априорной области возможных значений времени прихода и длительности. В частности, полагая  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \lambda_0$  и  $T_1 = T_2 = \tau_0$ , из соотношения (16) нетрудно получать частные выражения для вероятности ложной тревоги при обнаружении сигнала (1) с неизвестными амплитудой и временем прихода, амплитудой и длительностью или только с неизвестной амплитудой.

Сравним полученное выражение для вероятности ложной тревоги (16) с результатом, полученным в [3]. Согласно [3] вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала (1) определяется выражением

$$\tilde{\alpha} \approx \begin{cases} 1 - \exp\left[-\xi\sqrt{h} \exp(-h)/\sqrt{\pi^3}\right], & h \geq 1/2, \\ 1, & h < 1/2, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\xi = \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \int_{T_1}^{T_2} d(\lambda, \tau) d\lambda d\tau \quad (18)$$

– приведенный объем априорной области возможных значений времени прихода и длительности;

$$d^2(\lambda, \tau) = \left\{ \frac{\partial^2 B_0(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \cdot \frac{\partial^2 B_0(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} - \left[ \frac{\partial^2 B_0(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2)}{\partial \lambda_1 \partial \tau_2} \right]^2 \right\}_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda, \tau_1=\tau_2=\tau} \quad (19)$$

– определитель матрицы вторых производных корреляционной функции случайного поля  $R_0(\lambda, \tau)$  (10).

Положим, что порог обнаружения  $h$  достаточно высок. Тогда, раскладывая в (17) экспоненту в ряд Маклорена и учитывая только два первых члена разложения, выражение для вероятности ложной тревоги (17) можно записать в виде

$$\tilde{\alpha} \approx \begin{cases} \xi \exp(-h)/\sqrt{h/\pi^3}, & h \geq 1/2, \\ 1, & h < 1/2. \end{cases} \quad (20)$$

При выполнении (3) смешанные производные в (19) равны нулю, а диагональные элементы с точностью до множителя  $\tau^2$  совпадают с параметрами  $\gamma$  и  $\kappa$  (15). Подставляя (15) в (19), а затем в (18) и производя интегрирование, выразим параметр  $\xi$  через параметры  $\gamma$  и  $\kappa$  (15):

$$\xi = (\Lambda_2 - \Lambda_1) \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \sqrt{\gamma\kappa}. \quad (21)$$

Используя (21), перепишем выражение для вероятности ложной тревоги (16) в виде

$$\alpha \approx \min \left\{ 1, \frac{\xi\sqrt{h} \exp(-h)}{\sqrt{\pi^3}} \left( 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h\kappa}} \frac{T_1 + T_2}{T_2 - T_1} + \sqrt{\frac{\pi}{h\gamma}} \frac{T_1 T_2 \ln(T_2/T_1)}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)(T_2 - T_1)} + \frac{2[1 - \Phi(\sqrt{2h})]}{\xi \exp(-h)} \sqrt{\frac{\pi^3}{h}} \right) \right\}. \quad (22)$$

Из сравнения (20) и (22) следует, что относительное отклонение  $\chi = (\alpha - \tilde{\alpha})/\tilde{\alpha}$  вероятности ложной тревоги  $\alpha$  (16), рассчитанное с учетом возможных пересечений выбросами случайного поля  $L_0(\lambda, \tau)$  границ априорной области  $\Pi$  от вероятности ложной тревоги  $\tilde{\alpha}$  (20), рассчитанной без учета этих пересечений, определяется тремя слагаемыми, пропорциональными  $1/\sqrt{h\kappa}$ ,  $1/\sqrt{h\gamma}$  и  $\Phi(-\sqrt{2h})\exp(h)/(\xi\sqrt{h})$  соответственно. Если порог обнаружения  $h$  достаточно высок, влиянием этих слагаемых на вероятность ложной тревоги в (22) можно пренебречь, так что соотношения (20) и (22) асимптотически (при  $h \rightarrow \infty$ ) совпадают. Однако при больших, но конечных порогах влияние этих слагаемых на величину вероятности ложной тревоги в (22) оказывается довольно существенным, причем оно может увеличиваться с ростом как априорной области  $\Pi$ , так и параметров  $\gamma$  и  $\kappa$  (15), характеризующих кривизну корреляционной функции случайного поля  $L_0(\lambda, \tau)$  в окрестности ее максимума по параметру  $\lambda$  при фиксированном значении параметра  $\tau$ .

Для расчета вероятности пропуска сигнала  $s(t, a_0, \lambda_0, \tau_0)$  (1) воспользуемся результатами, полученными в [3]. Согласно [3] вероятность пропуска сигнала определяется выражением

$$\beta \approx (1 - \alpha) \left[ \Phi(\sqrt{2h} + z_0) - \Phi(z_0 - \sqrt{2h}) \right], \quad (23)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$  – интеграл вероятности;  $z_0^2 = 2a_0^2\tau_0/N_0$  – отношение сигнал/шум;  $h$  – порог обнаружения;  $\alpha$  – вероятность ложной тревоги (16), (22).

Точность соотношения (23) возрастает с увеличением  $\xi$ ,  $z_0$  и  $h$ .

### Обнаружение импульса колокольной формы

Формулы для характеристик обнаружения (16), (17) и (23) сигнала  $s(t, a_0, \lambda_0, \tau_0)$  (1) получены на основе ряда допущений, которые носят приближенный характер. Оценить аналитически точность этих формул не представляется возможным. Можно лишь утверждать, что она возрастает с увеличением  $h$  и  $z_0^2$  (а также с увеличением  $\xi$  для соотношения (17)). Поэтому с целью установления границ применимости найденных асимптотически точных формул (16) и (23) и сравнения точности формул (16) и (17) было выполнено статистическое моделирование алгоритма обнаружения (6) на ЭВМ. В качестве модели сигнала был выбран колокольный видеоимпульс

$$s(t) = a_0 \exp \left\{ - \left[ \sqrt{\pi/2} (t - \lambda_0) / \tau_0 \right]^2 \right\} = a_0 f \left[ (t - \lambda_0) / \tau_0 \right], \quad (24)$$

где

$$f(x) = \exp(-\pi x^2 / 2). \quad (25)$$

Предполагалось, что истинные значения времени прихода  $\lambda_0$  и длительности  $\tau_0$  лежат в середине соответствующих априорных интервалов, то есть  $\lambda_0 = (\Lambda_1 + \Lambda_2) / 2$ ,  $\tau_0 = (T_1 + T_2) / 2$ . Исходя из явного вида функции  $f(x)$  (25), согласно (16), (15) и (23) были найдены соотношения для вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала, учитывающие конечный размер априорной области  $\Pi$ :

$$\alpha \approx \min \left\{ 1, \frac{m_\lambda (1 - \eta) \sqrt{h}}{2\pi} \exp(-h) \left[ 1 + \frac{(1 + \eta) \sqrt{\pi}}{(1 - \eta) \sqrt{2h}} - \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{\ln(\eta)}{m_\lambda (1 - \eta)} + \frac{4\pi [1 - \Phi(\sqrt{2h})]}{m_\lambda (1 - \eta) \exp(-h)} \right] \right\}, \quad (26)$$

$$\beta \approx (1 - \alpha) \left[ \Phi(\sqrt{2h} + z_0) - \Phi(z_0 - \sqrt{2h}) \right],$$

а также выражение для вероятности ложной тревоги, рассчитанное согласно (17):

$$\tilde{\alpha} \approx \begin{cases} 1 - \exp \left[ - \frac{m_\lambda (1 - \eta) \sqrt{h}}{2\pi} \exp(-h) \right], & h \geq 1/2; \\ 1, & h < 1/2. \end{cases} \quad (27)$$

где  $\eta = T_1 / T_2$ ;  $m_\lambda = (\Lambda_2 - \Lambda_1) / T_1$  – число элементов разрешения, укладываемых в априорном интервале возможных значений времени прихода  $\lambda_0$  сигнала (1) с минимально возможной длительностью.

В процессе моделирования для различных значений  $\eta$ ,  $m_\lambda$  и  $z_0$  методом скользящего суммирования [10] при наличии и отсутствии сигнала формировались отсчеты функционала  $R_{ij} = R(i\Delta_\lambda, j\Delta_\tau)$  (5) с шагом  $\Delta_\lambda$  по параметру  $\lambda$  и  $\Delta_\tau$  – по параметру  $\tau$ , так что среднеквадратическая погрешность такой ступенчатой аппроксимации не превышала 5%. По сформированным отсчетам вырабатывались отсчеты решающей статистики (4)  $L_{ij} = R_{ij}^2 / 2$ . Наибольший отсчет решающей статистики  $L_{ij}$  сравнивался с заданным порогом  $h$  и подсчитывалось относительное число превышений статистикой (для оценки вероятности ложной тревоги) или не превышения статистикой (для оценки вероятности пропуска сигнала) этого по-

рога. При вычислении экспериментальных значений вероятности пропуска сигнала порог  $h$  выбирался по критерию Неймана–Пирсона исходя из заданной вероятности ложной тревоги  $\alpha$  (26).

Некоторые результаты статистического моделирования и соответствующие теоретические зависимости, рассчитанные по формулам (26) и (27), представлены на рис. 1–3. Каждое экспериментальное значение получено в результате обработки не менее  $5 \cdot 10^3$  реализаций решающей статистики  $L_{ij}$ , так что с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала отклоняются от экспериментальных значений не более чем на 10...15%.

На рис. 1 значками отмечены экспериментальные значения, а линиями – соответствующие теоретические зависимости вероятностей ложной тревоги  $\alpha$  (сплошные линии) и  $\tilde{\alpha}$  (штриховые линии) от порога  $h$  при фиксированном значении  $m_\lambda = 10$  (рис. 1,а) и  $\eta = 10^{-1}$  (рис. 1,б). Кривые 1 и квадратики на рис. 1,а соответствуют  $\eta = 0,5$ , а кривые 2 и кружочки –  $\eta = 10^{-1}$ . Кривые 1 и квадратики на рис. 1,б соответствуют  $m_\lambda = 10$ , кривые 2 и кружочки –  $m_\lambda = 10^2$ , кривые 3 и треугольники –  $m_\lambda = 10^3$ .

На рис. 2 значками отмечены экспериментальные значения, а линиями – соответствующие теоретические зависимости вероятности пропуска сигнала  $\beta$  от отношения сигнал/шум  $z_0$  при  $\alpha = 10^{-2}$  (сплошные линии, крестики и квадратики) и при  $\alpha = 10^{-3}$  (штриховые линии, кружочки и ромбики). Кривые 1, крестики и кружочки соответствуют  $m_\lambda = 10^3$ ,  $\eta = 10^{-1}$ , кривые 2, кружочки и ромбики –  $m_\lambda = 10^4$ ,  $\eta = 10^{-1}$ . Введем величину  $\chi = (\alpha - \tilde{\alpha})/\tilde{\alpha}$ , характеризующую относительное отклонение вероятности ложной тревоги  $\alpha$  (26), рассчитанной с учетом возможного пересечения выбросами решающей статистики границ априорной области  $\Pi$ , от вероятности ложной тревоги  $\tilde{\alpha}$  (27), рассчитанной без учета этих эффектов. На рис. 3 представлена зависимость величины  $\chi$  от вероятности ложной тревоги  $\tilde{\alpha}$  (27) при  $m_\lambda = 10^2$ ,  $\eta = 10^{-2}$  (сплошная линия),  $m_\lambda = 10^2$ ,  $\eta = 10^{-1}$  (штриховая линия) и  $m_\lambda = 10$ ,  $\eta = 10^{-1}$  (штрихпунктирная линия).

Из рис. 1 следует, что при малых априорных интервалах формулы для вычисления вероятности ложной тревоги (26) оказываются существенно точнее соотношений (27), полученных в [3]. Например, при  $m_\lambda = 10$ ,  $\eta = 0,5$ ,  $h = 4$  значение вероятности ложной тревоги, рассчитанное по формуле (26), отличается от значения вероятности ложной тревоги, рассчитанного по формуле (27) более чем в три раза. Однако при достаточно высоких порогах (малых значениях вероятности ложной тревоги) и больших априорных интервалах эта разница уменьшается. В частности, в соответствии с рис. 3, при  $m_\lambda = 10^2$ ,  $\eta = 10^{-1}$  значения вероятности ложной тревоги, рассчитанные по формулам (26) и (27), удовлетворительно согласуются (отклонение не более 50%) при  $\tilde{\alpha} < 10^{-3}$ .

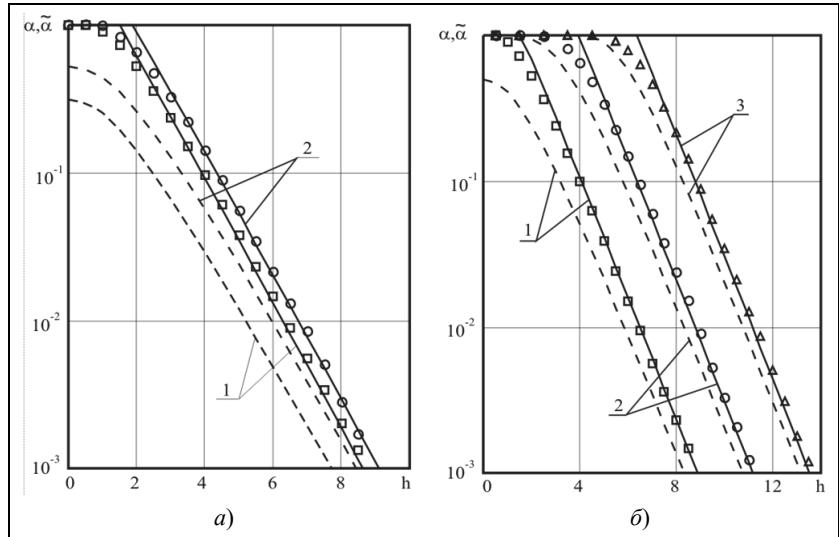


Рис. 1. Графики зависимости вероятностей ложной тревоги  $\alpha$  (сплошные линии) и  $\tilde{\alpha}$  (штриховые линии) от порога  $h$  при значении  $m_\lambda = 10$  (а) и  $\eta = 10^{-1}$  (б)

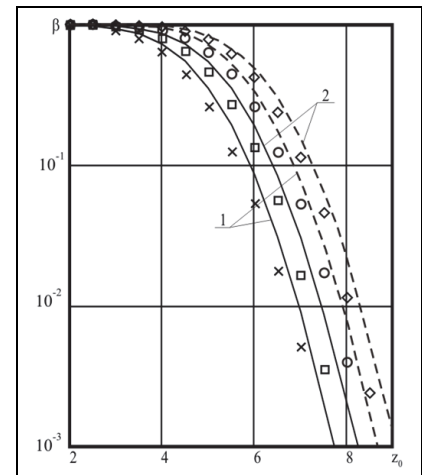


Рис. 2. Графики зависимости вероятности пропуска сигнала  $\beta$  от отношения сигнал/шум  $z_0$

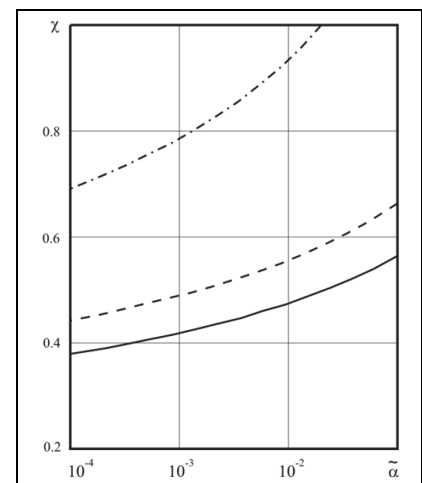


Рис. 3. Графики зависимости величины  $\chi$  от вероятности ложной тревоги  $\tilde{\alpha}$

- Если априорный интервал возможных значений времени прихода  $\lambda_0$  и длительности  $\tau_0$  достаточно велик, а расчетные значения вероятности ложной тревоги достаточно малы, то для вычисления вероятности ложной тревоги можно воспользоваться простой формулой (17), полученной в [3]. В противном случае следует использовать более точную формулу (16), учитывающую краевые эффекты на границе априорной области неизвестных параметров и полученную на основе Эйлеровых характеристик решающей статистики.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-01-10022).*

## Литература

1. Трифонов А.П., Литвинов Е.В. Эффективность обнаружения радиосигнала с неизвестными параметрами // Радиотехника. 2016. № 2. С. 57–65.
2. Трифонов А.П., Корчагин Ю.Э., Литвинов Е.В. Обнаружение узкополосного радиосигнала с неизвестными пространственно-временными параметрами // Радиотехника. 2016. № 6. С. 89–98.
3. Проняев Е.В. Анализ пороговых эффектов при обработке сигнала в условиях параметрической априорной неопределенности // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2003. Т. 6. № 2. С. 72–79.
4. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь. 1986. 264 с.
5. Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П.А. Бакута. М.: Радио и связь. 1984. 440 с.
6. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио. 1978. 296 с.
7. Adler R.J. The Geometry of Random Fields. Wiley. New York. 1981.
8. Worsley K.J. Testing for signals with unknown location and scale in a  $\chi^2$  random field, with an application to fMRI // Advances in Applied Probability. 2001. 33. P. 773–793.
9. Hasofer A.M. Upcrossings of Random Fields // Supplement to Advances in Applied Probability. 1978. 10. P. 14–21.
10. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио. 1971. 326 с.

Поступила 12 сентября 2017 г.

## Evaluating the signal detection effectiveness based on the Eulerian characteristics of the test statistic

© Authors, 2017  
© Radiotekhnika, 2017

**A.P. Trifonov** – Honored Scientist of RF, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of Department of Radiophysics, Voronezh State University

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

**E.V. Litvinov** – Ph. D. (Phys.-Math.), Assistant, Department of Radiophysics, Voronezh State University

**Yu.E. Korchagin** – Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Radiophysics, Voronezh State University

E-mail: korchagin@phys.vsu.ru

Maximum-likelihood detection algorithm synthesized for a signal with unknown amplitude, duration and arrival time on the white noise background was analyzed. Crossings of a priori area boundary by the excursion sets of test statistic were taken into account. Asymptotic expressions for probability of false alarm and probability of missing the signal were found. The influence of boundary effects of a priori area on the precision of characteristics are investigated by means of statistical computer modeling of bell-like signal detection algorithm.

## References

1. Trifonov A.P., Litvinov E.V. E'ffektivnost' obnaruzheniya radiosignala s neizvestny'mi parametrami // Radiotekhnika. 2016. № 2. S. 57–65.
2. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Litvinov E.V. Obnaruzhenie uzkopolosnogo radiosignala s neizvestny'mi prostranstvenno-vremenny'mi parametrami // Radiotekhnika. 2016. № 6. S. 89–98.
3. Pronyaev E.V. Analiz porogovy'x e'ffektov pri obrabotke signala v usloviyax parametricheskoj apriornoj neopredelennosti // Fizika volnovy'x processov i radiotekhnicheskie sistemy'. 2003. T. 6. № 2. S. 72–79.
4. Trifonov A.P., Shinaikov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ocenka ix parametrov na fone pomex. M.: Radio i svyaz'. 1986. 264 s.
5. Akimov P.S., Bakut P.A., Bogdanovich V.A. i dr. Teoriya obnaruzheniya signalov / Pod red. P.A. Bakuta. M.: Radio i svyaz'. 1984. 440 s.
6. Kulikov E.I., Trifonov A.P. Ocenka parametrov signalov na fone pomex. M.: Sov. radio. 1978. 296 s.
7. Adler R.J. The Geometry of Random Fields. Wiley. New York. 1981.
8. Worsley K.J. Testing for signals with unknown location and scale in a  $\chi^2$  random field, with an application to fMRI // Advances in Applied Probability. 2001. 33. P. 773–793.
9. Hasofer A.M. Upcrossings of Random Fields // Supplement to Advances in Applied Probability. 1978. 10. P. 14–21.
10. Bykov V.V. Cifrovoye modelirovanie v statisticheskoy radiotekhnike. M.: Sov. radio. 1971. 326 s.