

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

УДК 621.395.1

© 2001 г. А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин

**ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМИ
МОМЕНТАМИ ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ¹**

Получены максимально правдоподобный и оптимальный (байесовский) алгоритмы обнаружения и измерения моментов появления и исчезновения сигнала произвольной формы, наблюдаемого на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Найдены асимптотические выражения для характеристик максимально правдоподобных алгоритмов. С помощью моделирования на ЭВМ определены характеристики байесовских алгоритмов.

§ 1. Введение

Проблема приема сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения представляет значительный интерес для радио- и гидролокации, радиосвязи, сейсмологии и других областей науки и техники. В [1] рассмотрена задача обнаружения сигнала со случайными моментами появления и исчезновения, априорные распределения которых предполагаются известными. Найденные алгоритмы оказываются крайне сложными как с точки зрения аппаратной или программной реализации, так и с точки зрения анализа их эффективности. В [2] эта задача решается для случая неизвестных априорных распределений моментов появления и исчезновения сигнала, причем получены более простые, чем в [1], алгоритмы обнаружения, и обсуждается возможность анализа их эффективности на основе решения соответствующих интегральных уравнений. Однако результаты [2] справедливы лишь при обработке последовательности независимых случайных величин. Кроме того, для многих приложений значительный интерес представляет задача оценки моментов появления и исчезновения сигнала.

В данной работе рассмотрен прием детерминированного сигнала с неизвестными (или случайными) моментами появления и исчезновения на фоне гауссовского белого шума при непрерывном времени наблюдения [1]. Подобное ограничение класса сигналов позволяет найти существенно более простые, чем в [1, 2], алгоритмы обнаружения и оценки, а также выполнить анализ эффективности функционирования алгоритмов.

Сигнал с неизвестными моментами появления и исчезновения можно записать в виде

$$s(t, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} f(t), & \theta_1 \leq t \leq \theta_2, \\ 0, & t < \theta_1, \quad t > \theta_2, \end{cases} \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 01-01-00139).

где $f(t)$ – априори известная непрерывно дифференцируемая функция, описывающая форму сигнала, θ_1 и θ_2 – неизвестные моменты появления и исчезновения соответственно, которые принимают значения из априорных интервалов

$$\theta_i \in [\theta_{i \min}, \theta_{i \max}], \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Для того чтобы сигнал не мог исчезнуть раньше, чем он появляется, положим, что $\theta_{1 \max} < \theta_{2 \min}$. Будем считать, что $f(\theta_i) \neq 0$, так что сигнал (1) является разрывным [3; 4, с. 113–114].

Если передаваемая информация заключается в факте наличия или отсутствия сигнала (1) в наблюдаемом случайном процессе $x(t)$, то необходимо решить задачу обнаружения, которую удобно сформулировать в терминах теории проверки статистических гипотез. Подлежит проверке простая гипотеза $H_0: x(t) = n(t)$ – сигнал отсутствует, против сложной альтернативы $H_1: x(t) = n(t) + s(t, \theta_{01}, \theta_{02})$ – сигнал присутствует, где θ_{01} и θ_{02} – истинные значения моментов появления и исчезновения соответственно, $n(t)$ – гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0 . Таким образом, располагая наблюдаемым на конечном интервале времени $[0, T]$ процессом $x(t)$, приемник должен выносить решение в пользу одной из гипотез.

Когда априори известно, что верна гипотеза H_1 , полезная информация может заключаться в неизвестных параметрах сигнала – моментах появления и исчезновения. Тогда на основе наблюдаемого процесса $x(t)$ приемник должен сформировать совместную оценку моментов появления и исчезновения.

При отсутствии другой априорной информации для синтеза приемного устройства можно использовать метод максимального правдоподобия [2; 5, с. 17, 46; 6, с. 23]. Если же известны априорные вероятности гипотез $p_j = P(H_j)$, $j = 0, 1$, и совместная плотность вероятности моментов появления и исчезновения $W_{pr}(\theta_1, \theta_2)$, то целесообразно применить байесовский подход к синтезу приемника [1; 5, с. 12; 6, с. 20].

§ 2. Синтез алгоритмов обнаружения и оценки моментов появления и исчезновения

Для синтеза обнаружителя сигнала (1) с неизвестными моментами появления и исчезновения запишем наблюдаемый на входе приемника процесс в виде $x(t) = \gamma_0 s(t, \theta_{01}, \theta_{02}) + n(t)$. Здесь γ_0 – дискретный параметр, который принимает два значения: $\gamma_0 = 0$ (сигнал отсутствует) и $\gamma_0 = 1$ (сигнал присутствует). Тогда задача обнаружения сводится к оценке параметра γ_0 .

Рассмотрим вначале максимально правдоподобные алгоритмы обнаружения и оценки моментов появления и исчезновения. Логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) [4, с. 90; 5, с. 14; 6, с. 40] зависит от трех неизвестных параметров: γ , θ_1 и θ_2 . Будем считать, что интервал наблюдения $[0, T]$ удовлетворяет условию $0 \leq \theta_{1 \min} < \theta_{2 \max} \leq T$, так что сигнал (1) полностью размещается в этом интервале. Тогда, в соответствии с [1; 4, с. 90; 5, с. 14; 6, с. 40], логарифм ФОР может быть записан в виде

$$L(\gamma, \theta_1, \theta_2) = \frac{2\gamma}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(t)[x(t) - f(t)/2] dt,$$

где первое слагаемое – стохастический интеграл в смысле Ито.

Оценка дискретного параметра γ в соответствии с алгоритмом максимального правдоподобия (МП) может быть найдена как

$$\gamma_m = \arg \sup_{\gamma} \left[\sup_{\theta_1, \theta_2} L(\gamma, \theta_1, \theta_2) \right], \quad \theta_i \in [\theta_i \min, \theta_i \max].$$

Учитывая, что $L(\gamma = 0, \theta_1, \theta_2) = 0$, получаем, что МП-алгоритм обнаружения сигнала (1) заключается в сравнении с нулевым порогом величины абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП

$$L = \sup_{\gamma} L(\theta_1, \theta_2) \stackrel{\gamma_m=1}{\leq} 0, \quad \stackrel{\gamma_m=0}{\gamma_m=0} \quad (3)$$

где

$$L(\theta_1, \theta_2) = L(\gamma = 1, \theta_1, \theta_2). \quad (4)$$

Вместо алгоритма (3) можно использовать обобщенный МП-алгоритм обнаружения [2; 5, с. 19], основанный на сравнении абсолютного максимума логарифма ФОП с некоторым порогом c

$$L \stackrel{\gamma_m=1}{\leq} c. \quad \stackrel{\gamma_m=0}{\gamma_m=0} \quad (5)$$

Порог c в выражении (5) может выбираться, исходя из различных критериев оптимальности.

Согласно алгоритмам (3), (5) приемник должен формировать двумерное случайное поле (4) для всех возможных значений неизвестных моментов появления и исчезновения. Поэтому его аппаратная реализация оказывается в общем случае довольно сложной. Действительно, нахождение величины L предполагает построение структуры, многоканальной по обоим неизвестным параметрам. Однако трудностей аппаратной реализации алгоритмов (3), (5) частично удастся избежать, если представить логарифм ФОП (4) в виде суммы $L(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2)$ двух случайных процессов [7]. Первый из них зависит только от момента появления θ_1 , а второй – только от момента исчезновения θ_2 :

$$L_1(\theta_1) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f(t)[x(t) - f(t)/2] dt, \quad (6)$$

$$L_2(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f(t)[x(t) - f(t)/2] dt, \quad (7)$$

где θ – произвольная точка, принадлежащая интервалу $(\theta_1 \max, \theta_2 \min)$.

Согласно выражениям (6) и (7) функции $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$ статистически независимы, так как представляют собой интегралы от белого шума на неперекрывающихся интервалах (θ_1, θ) и (θ, θ_2) . Тогда в (3) и (5)

$$L = L_1 + L_2, \quad L_1 = \sup L_1(\theta_1), \quad L_2 = \sup L_2(\theta_2), \quad (8)$$

где L_1 и L_2 – статистически независимые случайные величины.

Следовательно, величину L можно получить посредством раздельной максимизации функций (6) и (7), что существенно облегчает аппаратную реализацию приемника МП.

На рис. 1 штриховой линией выделена структурная схема МП-обнаружителя сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения; 1 и 1' – интеграторы на

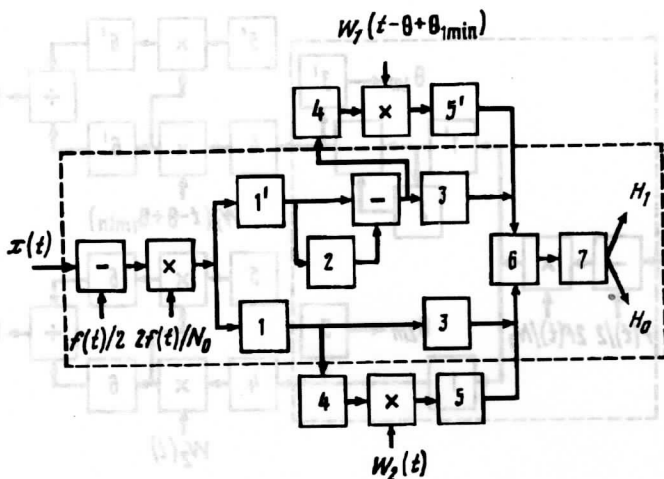


Рис. 1

интервалах времени $[\theta, t]$, где $t \in [\theta, \theta_{2 \max}]$, и $[\theta_{1 \min}, t]$, $t \in [\theta_{1 \min}, \theta]$, соответственно; 2 – линия задержки на время $t = \theta - \theta_{1 \min}$; 3 – пиковые детекторы; 6 – сумматор; 7 – решающее устройство, которое осуществляет сравнение выходного сигнала сумматора в момент времени $t = \max(\theta_{2 \max}, \theta + \theta_{1 \max} - \theta_{1 \min})$ с порогом c и выносит решение о наличии сигнала, если порог превышен, и решение об отсутствии сигнала, если порог не превышен. Структурная схема МП-обнаружителя является двухканальной и состоит из блоков, которые легко реализуются аппаратно или программно.

Рассмотрим задачу оценки моментов появления и исчезновения импульса (1), полагая, что сигнал присутствует в наблюдаемом процессе, т.е. $\gamma_0 \equiv 1$. Алгоритм нахождения оценок максимального правдоподобия (ОМП) моментов появления и исчезновения состоит в поиске положения абсолютного максимума случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$ (см. (4))

$$(\theta_{1m}, \theta_{2m}) = \arg \sup L(\theta_1, \theta_2), \quad \theta_i \in [\theta_{i \min}, \theta_{i \max}]. \quad (9)$$

Поскольку логарифм ФОП $L(\theta_1, \theta_2)$ можно представить в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$ (см. (6), (7)), то положение максимума случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$ по переменной θ_1 совпадает с положением максимума случайного процесса $L_1(\theta_1)$, а по переменной θ_2 – с положением максимума $L_2(\theta_2)$. В результате для ОМП моментов появления и исчезновения можно записать

$$\theta_{im} = \arg \sup L_i(\theta_i), \quad \theta_i \in [\theta_{i \min}, \theta_{i \max}], \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

На рис. 2 структурная схема МП-измерителя моментов появления и исчезновения выделена штриховой линией; 1 и 1' – интеграторы на интервалах времени $[\theta, t]$, где $t \in [\theta, \theta_{2 \max}]$, и $[\theta_{1 \min}, t]$, $t \in [\theta_{1 \min}, \theta]$, соответственно; 2 – линия задержки на время $t = \theta - \theta_{1 \min}$. Устройства 3' и 3 находят на интервалах $[\theta, \theta + \theta_{1 \max} - \theta_{1 \min}]$ и $[\theta_{2 \min}, \theta_{2 \max}]$ положения абсолютных максимумов сигналов, которые являются ОМП моментов появления и исчезновения сигнала (1) соответственно.

Рассмотрим теперь возможность применения классического байесовского подхода к обнаружению сигнала (1) и оценке моментов появления и исчезновения. Положим, что известны априорные вероятности гипотез $p_0 = P(\gamma_0 = 0)$ и $p_1 = P(\gamma_0 = 1) = 1 - p_0$ и совместная плотность вероятности неизвестных моментов появления и исчезновения $W_{pr}(\theta_1, \theta_2)$.

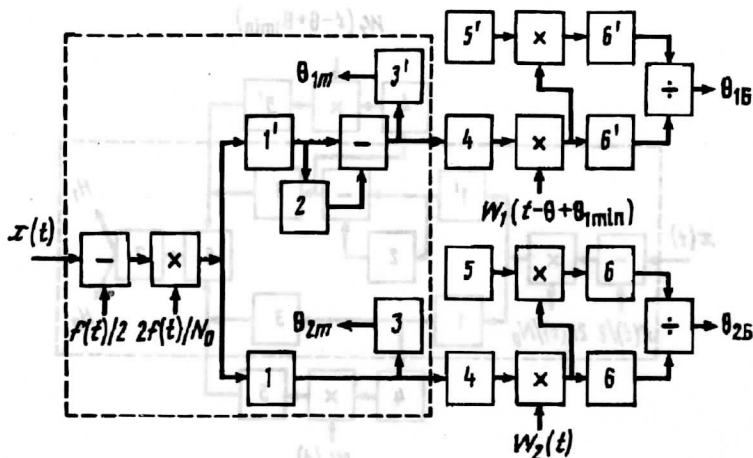


Рис. 2

При байесовском подходе оптимальным правилом обнаружения сигнала является правило, обеспечивающее минимум риска. Для синтеза байесовского алгоритма используем матрицу потерь, у которой стоимости правильных решений принимаются нулевыми, а стоимости ошибок первого и второго рода – одинаковыми, что соответствует критерию идеального наблюдателя. Тогда оптимальный (байесовский) алгоритм обнаружения сигнала (1) заключается в формировании величины [1; 5, с. 14]

$$I = \int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{1\max}} \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \exp[L(\theta_1, \theta_2)] W_{\text{pr}}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (11)$$

и сравнении ее с порогом p_0/p_1 .

Возможность аппаратной реализации байесовского алгоритма обнаружения существенно зависит от вида априорной плотности вероятности $W_{\text{pr}}(\theta_1, \theta_2)$ моментов появления и исчезновения сигнала. Так, при приеме сигнала фиксированной длины T_0 момент появления $\theta_1 = \theta_2 - T_0$, т.е. связан с моментом исчезновения детерминированной зависимостью. В этом случае $W_{\text{pr}}(\theta_1, \theta_2) = \delta(\theta_1 - \theta_2 + T_0) W_2(\theta_2)$. Тогда (11) можно переписать в виде

$$I = \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \exp[L(\theta_2 - T_0, \theta_2)] W_2(\theta_2) d\theta_2.$$

Структурная схема такого обнаружителя приведена на рис. 3: 1 – интегратор на интервале времени $[\theta_{2\min} - T_0, t]$, где $t \in [\theta_{2\min} - T_0, \theta_{2\max}]$; 2 – линия задержки на время T_0 ; 3 – нелинейный элемент с экспоненциальной характеристикой; 4 – интегратор на интервале времени $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$; 5 – пороговое устройство, которое осуществляет сравнение в момент времени $t = \theta_{2\max}$ выходного сигнала интегратора 4 с порогом p_0/p_1 и выносит решение о наличии сигнала, если порог превышен, и об отсутствии сигнала, если порог не превышен. Если же моменты появления и исчезновения независимы, то

$$W_{\text{pr}}(\theta_1, \theta_2) = W_1(\theta_1) W_2(\theta_2). \quad (12)$$

представляет собой сумму безусловных рассеяний (средних квадратов ошибок) байесовских оценок моментов появления и исчезновения.

Структурная схема байесовского алгоритма оценивания моментов появления и исчезновения получается из рис. 2, если из него исключить блоки 3 и 3'. Остальные блоки: 4 – нелинейные элементы с экспоненциальной характеристикой; 5 и 5' – генераторы линейно меняющихся напряжений, пропорциональных t и $t - \theta$, с началами отсчета времени $t = 0$ и $t = \theta$; 6 и 6' – интеграторы на интервалах времени $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$ и $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$ соответственно. Как видно из рисунка, аппаратная реализация байесовского измерителя моментов появления и исчезновения несколько сложнее МП-измерителя. Тем не менее, блок-схема байесовского измерителя является одноканальной по каждому оцениваемому параметру. Это существенно облегчает реализацию байесовского алгоритма оценки.

§ 3. Асимптотические свойства логарифма функционала отношения правдоподобия

Согласно (4) логарифм ФОП представляет собой двумерное гауссовское случайное поле. Поэтому для полного статистического описания логарифма ФОП достаточно знать его математическое ожидание и корреляционную функцию при обеих гипотезах, которые выражаются через сигнальную функцию [6, с. 48, 50]

$$S(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_{11}, \theta_{21})}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} f^2(t) dt, \quad \theta_{ij} \in [\theta_{j\min}, \theta_{j\max}], \quad i, j = 1, 2. \quad (17)$$

Выполняя усреднение, находим математические ожидания при гипотезе H_1

$$S_1(\theta_1, \theta_2) = \langle L(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0 = 1) \rangle = S(\theta_1, \theta_{01}, \theta_2, \theta_{02}) - S(\theta_1, \theta_1, \theta_2, \theta_2)/2 \quad (18)$$

и при гипотезе H_0

$$S_0(\theta_1, \theta_2) = \langle L(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0 = 0) \rangle = -S(\theta_1, \theta_1, \theta_2, \theta_2)/2. \quad (19)$$

Корреляционные функции логарифма ФОП одинаковы при обеих гипотезах и совпадают с функцией (17)

$$\begin{aligned} B_0(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) &= B_1(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) = \\ &= \langle [L(\theta_{11}, \theta_{12} | \gamma_0 = 1) - S_1(\theta_{11}, \theta_{12})][L(\theta_{21}, \theta_{22} | \gamma_0 = 1) - S_1(\theta_{21}, \theta_{22})] \rangle = \\ &= \langle [L(\theta_{11}, \theta_{12} | \gamma_0 = 0) - S_0(\theta_{11}, \theta_{12})][L(\theta_{21}, \theta_{22} | \gamma_0 = 0) - S_0(\theta_{21}, \theta_{22})] \rangle = \\ &= S(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}). \end{aligned} \quad (20)$$

В дальнейшем будем считать, что максимальное отношение сигнал/шум (ОСШ)

$z_{\max}^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{2\max}} f^2(t) dt$ на выходе приемника достаточно велико, что в подавляющем большинстве случаев выполняется на практике. Тогда положение максимума случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$ располагается в малой окрестности положения максимума его математического ожидания. Принимая во внимание (17)–(19), можно записать

$$\arg \sup S_0(\theta_1, \theta_2) = (\theta_{1\max}, \theta_{2\min}), \quad \arg \sup S_1(\theta_1, \theta_2) = (\theta_{01}, \theta_{02}). \quad (21)$$

Таким образом, при достаточно больших ОСШ важно исследовать поведение случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$ лишь в малой окрестности точек (21).

Поскольку статистические характеристики логарифма ФОП выражаются через сигнальную функцию (17), рассмотрим ее асимптотическое разложение в малой

окрестности некоторой точки (θ'_1, θ'_2) из априорной области возможных значений моментов появления и исчезновения (2). Для этого перепишем функцию (17) в виде

$$S(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta'_1 + \max(\theta_{11} - \theta'_1, \theta_{21} - \theta'_1)}^{\theta'_2 + \min(\theta_{12} - \theta'_2, \theta_{22} - \theta'_2)} f^2(t) dt. \quad (22)$$

Пусть $\varepsilon' = \max(|\theta_{11} - \theta'_1|, |\theta_{21} - \theta'_1|, |\theta_{12} - \theta'_2|, |\theta_{22} - \theta'_2|)$, тогда $\varepsilon'_1 = \max(\theta_{11} - \theta'_1, \theta_{21} - \theta'_1) \rightarrow 0$ и $\varepsilon'_2 = \min(\theta_{12} - \theta'_2, \theta_{22} - \theta'_2) \rightarrow 0$ при $\varepsilon' \rightarrow 0$. Разлагая функцию (22) в ряд Маклорена по ε'_1 и ε'_2 и пренебрегая членами разложения порядка ε'^2 и менее, получаем асимптотическое представление сигнальной функции (17) в виде

$$S(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} f^2(t) dt - 2f^2(\theta'_1) \max(\theta_{11} - \theta'_1, \theta_{21} - \theta'_1)/N_0 + \\ + 2f^2(\theta'_2) \min(\theta_{12} - \theta'_2, \theta_{22} - \theta'_2)/N_0 + o(\varepsilon').$$

Для получения разложений математических ожиданий и корреляционных функций логарифма ФОР (4) в окрестности точек (21) положим, что $\varepsilon_0 = \max(|\theta_1 - \theta_{1 \max}|, |\theta_2 - \theta_{2 \min}|, |\theta_{11} - \theta_{1 \max}|, |\theta_{21} - \theta_{1 \max}|, |\theta_{12} - \theta_{2 \min}|, |\theta_{22} - \theta_{2 \min}|)$ при $\gamma_0 = 0$, и $\varepsilon_1 = \max(|\theta_1 - \theta_{01}|, |\theta_2 - \theta_{02}|, |\theta_{11} - \theta_{01}|, |\theta_{21} - \theta_{01}|, |\theta_{12} - \theta_{02}|, |\theta_{22} - \theta_{02}|)$ при $\gamma_0 = 1$. Тогда, переходя к пределам при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, получаем

$$S_1(\theta_1, \theta_2) = z_0^2/2 - \rho_{11}^2 |\theta_1 - \theta_{01}|/2T_{\max} - \rho_{21}^2 |\theta_2 - \theta_{02}|/2T_{\max} + o(\varepsilon_1), \quad (23)$$

$$S_0(\theta_1, \theta_2) = -z_{\min}^2/2 + \rho_{10}^2 (\theta_1 - \theta_{1 \max})/2T_{\max} - \rho_{20}^2 (\theta_2 - \theta_{2 \min})/2T_{\max} + o(\varepsilon_0), \quad (24)$$

$$B_1(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) = z_0^2 - \rho_{11}^2 \max(\theta_{11} - \theta_{01}, \theta_{21} - \theta_{01})/T_{\max} + \\ + \rho_{21}^2 \min(\theta_{12} - \theta_{02}, \theta_{22} - \theta_{02})/T_{\max} + o(\varepsilon_1), \quad (25)$$

$$B_0(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) = z_{\min}^2 - \rho_{10}^2 \max(\theta_{11} - \theta_{1 \max}, \theta_{21} - \theta_{1 \max})/T_{\max} + \\ + \rho_{20}^2 \min(\theta_{12} - \theta_{2 \min}, \theta_{22} - \theta_{2 \min})/T_{\max} + o(\varepsilon_0). \quad (26)$$

Здесь $T_{\max}$ — максимальная длительность сигнала (1),

$$\rho_{10}^2 = 2f^2(\theta_{1 \max})T_{\max}/N_0, \quad \rho_{20}^2 = 2f^2(\theta_{2 \min})T_{\max}/N_0,$$

$$\rho_{11}^2 = 2f^2(\theta_{01})T_{\max}/N_0, \quad \rho_{21}^2 = 2f^2(\theta_{02})T_{\max}/N_0,$$

$$z_0^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt, \quad z_{\min}^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{1 \max}}^{\theta_{2 \min}} f^2(t) dt.$$

Поскольку при больших ОСШ абсолютный максимум поля $L(\theta_1, \theta_2)$ расположен в малой окрестности точек (21), то характеристики алгоритмов МП-обнаружения и оценки определяются поведением моментов поля (4) в этой окрестности. Следовательно, для расчета характеристик алгоритмов МП необходимо обеспечить высокую точность аппроксимации моментов (18)–(20) в малой окрестности точек (21). При этом точность аппроксимации характеристик логарифма ФОР за пределами этой окрестности не играет существенной роли [3; 4, с. 115; 5, с. 49; 6, с. 71]. В дальнейшем будем аппроксимировать моменты (18)–(20) главными членами асимптотических разложений (23)–(26) на всем интервале (2) возможных значений моментов появления и исчезновения сигнала (1). Тогда, согласно (23)–(26), аппроксимации математических ожиданий и корреляционных функций случайного поля (4) можно представить в виде сумм

$$S_j(\theta_1, \theta_2) = S_{1j}(\theta_1) + S_{2j}(\theta_2),$$

$$B_j(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) = B_{1j}(\theta_{11}, \theta_{21}) + B_{2j}(\theta_{12}, \theta_{22}), \quad j = 0, 1, \quad (27)$$

где

$$S_{i0}(\theta_i) = -z_{\min}^2/4 + (-1)^{i+1} \rho_{i0}^2(\theta_i - \delta_{1i}\theta_{1\max} - \delta_{2i}\theta_{2\min})/2T_{\max}, \quad (28)$$

$$B_{i0}(\theta_{1i}, \theta_{2i}) = z_{\min}^2/2 + \rho_{i0}^2 \min[(-1)^i(\theta_{1i} - \delta_{1i}\theta_{1\max} - \delta_{2i}\theta_{2\min}); (-1)^i(\theta_{2i} - \delta_{1i}\theta_{1\max} - \delta_{2i}\theta_{2\min})]/T_{\max}, \quad (29)$$

$$S_{i1}(\theta_i) = z_0^2/4 - \rho_{i1}^2|\theta_i - \theta_{0i}|/2T_{\max}, \quad (30)$$

$$B_{i1}(\theta_{1i}, \theta_{2i}) = z_0^2/2 + \rho_{i1}^2 \min[(-1)^i(\theta_{1i} - \theta_{0i}); (-1)^i(\theta_{2i} - \theta_{0i})]/T_{\max}, \quad (31)$$

δ_{ij} – символ Кронекера, $i = 1, 2$. Гауссовское случайное поле полностью описывается своими математическим ожиданием и корреляционной функцией, поэтому согласно (27) решающую статистику (4) можно аппроксимировать суммой

$$L(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0 = j) = M_{1j}(\theta_1) + M_{2j}(\theta_2), \quad j = 1, 2, \quad (32)$$

двух статистически независимых гауссовских случайных процессов $M_{ij}(\theta_i)$, которые обладают математическими ожиданиями $S_{ij}(\theta_i)$ и корреляционными функциями $B_{ij}(\theta_{1i}, \theta_{2i})$. Очевидно, что аппроксимацию (32) можно использовать лишь при тех значениях θ_1 и θ_2 из априорной области возможных значений моментов появления и исчезновения (2), при которых дисперсии

$$D_{i1}(\theta_i) = B_{i1}(\theta_i, \theta_i) = z_0^2/2 + (-1)^i \rho_{i1}^2(\theta_i - \theta_{0i})/T_{\max}, \quad i = 1, 2, \quad (33)$$

неотрицательны, т.е. когда

$$\theta_1 \in [\theta_{1\min}, \theta_{1\max}^*], \quad \theta_2 \in [\theta_{2\min}^*, \theta_{2\max}],$$

$$\theta_{1\max}^* = \min(\theta_{1\max}, \theta_{1n}), \quad \theta_{2\min}^* = \max(\theta_{2\min}, \theta_{2n}), \quad (34)$$

$$\theta_{1n} = \theta_{01} + T_{\max} z_0^2/2\rho_{11}^2, \quad \theta_{2n} = \theta_{02} - T_{\max} z_0^2/2\rho_{21}^2.$$

Другими словами, если хотя бы одна из точек θ_{1n}, θ_{2n} принадлежит соответствующему априорному интервалу (2), то необходимо сократить этот интервал до $[\theta_{1\min}, \theta_{1n}]$ для момента появления и до $[\theta_{2n}, \theta_{2\max}]$ для момента исчезновения.

Используя выражения (28)–(31), а также теорему Дуба [9], получаем, что случайные процессы $M_{ij}(\theta_i)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, являются марковскими [9] и на отрезках (34) обладают коэффициентами сноса

$$a_{i0} = -\rho_{i0}^2/2T_{\max}, \quad i = 1, 2,$$

$$a_{i1} = \frac{\rho_{i1}^2}{T_{\max}} \begin{cases} 1, & \theta_{1\min} \leq \theta_1 \leq \theta_{01}, \\ -1, & \theta_{01} < \theta_1 \leq \theta_{1\max}^*, \end{cases} \quad a_{21} = \frac{\rho_{21}^2}{T_{\max}} \begin{cases} 1, & \theta_{2\min}^* \leq \theta_2 \leq \theta_{02}, \\ -1, & \theta_{02} < \theta_2 \leq \theta_{2\max}, \end{cases} \quad (35)$$

и диффузии

$$b_{ij} = \rho_{ij}^2/T_{\max}, \quad i = 1, 2, \quad j = 0, 1, \quad (36)$$

соответственно. Используя марковские свойства случайных процессов $M_{ij}(\theta_i)$, можно найти асимптотические характеристики эффективности функционирования синтезированных алгоритмов МП.

§ 4. Эффективность обнаружения сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения

Вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги) α и 2-го рода (пропуска сигнала) $\beta(\theta_{01}, \theta_{02})$ при использовании приемника МП определяются выражениями (см. [5, с. 26]):

$$\alpha = P[\sup L(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0 = 0) > c] = 1 - P_0(c), \quad (37)$$

$$\beta(\theta_{01}, \theta_{02}) = P[\sup L(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0 = 1) < c] = P_1(c), \quad (38)$$

где $\theta_i \in [\theta_{i \min}, \theta_{i \max}]$, а $P_j(c) = P[\sup L(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0 = j) < c]$ – функции распределения величины абсолютного максимума случайного поля $L(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0 = j)$. Используя аппроксимацию (32), учитывая статистическую независимость функций $M_{ij}(\theta_i)$, а также условия (34) неотрицательности дисперсий (33), получаем, что

$$P_0(c) = P[M_{10}(\theta_1) + M_{20}(\theta_2) < c] = \int F_{20}(c - x) dF_{10}(x), \quad (39)$$

$$P_1(c) = P[M_{11}(\theta_1) + M_{21}(\theta_2) < c] = \int F_{21}(c - x, c - x, \theta_{2 \max}, \theta_{2 \min}^*, \theta_{2 \max}) dF_{11}(x, x, \theta_{1 \min}, \theta_{1 \min}, \theta_{1 \max}^*), \quad (40)$$

$$F_{i0}(u) = P[\sup M_{i0}(\theta_i) < u, \theta_{i \min} \leq \theta_i \leq \theta_{i \max}] \quad (41)$$

– функции распределения величин абсолютных максимумов процессов $M_{i0}(\theta_i)$,

$$F_{i1}(u, v, \tau, t_{i1}, t_{i2}) = P \left[\sup_{t_{i1} \leq \theta_i < \tau} M_{i1}(\theta_i) < u, \sup_{\tau \leq \theta_i \leq t_{i2}} M_{i1}(\theta_i) < v \right] \quad (42)$$

– двумерные функции распределения величин абсолютных максимумов случайных процессов $M_{i1}(\theta_i)$, $i = 1, 2$, на отрезке $\theta_i \in [t_{i1}, t_{i2}]$.

Рассмотрим вначале функцию $F_{20}(u)$, для которой аналогично [4, с. 179; 5, с. 71] можно записать

$$F_{20}(u) = \int_{-\infty}^u W(y, \theta_{2 \max}) dy, \quad (43)$$

где $W(y, \theta_2)$ – решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial W(y, \theta_2)}{\partial \theta_2} + \frac{\partial}{\partial y} [k_1 W(y, \theta_2)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_2 W(y, \theta_2)] = 0 \quad (44)$$

с коэффициентами $k_1 = a_{20}$ (35), $k_2 = b_{20}$ (36) при начальном условии $W(y, \theta_{2 \min}) = \exp[-(y + z_{\min}^2/4)^2 / z_{\min}^2] / z_{\min} \sqrt{\pi}$ и граничных условиях $W(y = u, \theta_2) = W(y = -\infty, \theta_2) = 0$. Применяя метод отражения с переменной знака [9, 10], находим решение уравнения (44), подставив которое в выражение (43) при $\theta_2 = \theta_{2 \max}$, получаем

$$F_{20}(u) = \frac{1}{z_{\min} \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp[-(u - \xi + z_{\min}^2/4)^2 / z_{\min}^2] \varphi(\rho_{20}, \eta_2, \xi) d\xi, \quad (45)$$

$$\eta_2 = \frac{\theta_{2 \max} - \theta_{2 \min}}{T_{\max}},$$

где $\varphi(y_1, y_2, y_3) = \Phi(y_1 \sqrt{y_2}/2 + y_3/y_1 \sqrt{y_2}) - \exp(-y_3) \Phi(y_1 \sqrt{y_2}/2 - y_3/y_1 \sqrt{y_2})$, а $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ – интеграл вероятности. Заметим, что при замене переменных $\lambda = -\theta_1$ математическое ожидание (28) и корреляционная функция (29) при $i = 1$ случайного процесса $M_{10}(\lambda)$ совпадают, соответственно, с математическим ожиданием (28) и корреляционной функцией (29) при $i = 2$ случайного процесса $M_{20}(\theta_2)$ с точностью до замены ρ_{20} на ρ_{10} .

Следовательно, функцию $F_{10}(u)$ можно записать на основе выражения (45). Действительно, заменяя в (45) ρ_{20} на ρ_{10} , $\theta_{2 \min}$ на $-\theta_{1 \max}$, $\theta_{2 \max}$ на $-\theta_{1 \min}$, получаем искомое распределение $F_{10}(u)$ в виде

$$F_{10}(u) = \frac{1}{z_{\min}\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[-(u - \xi + z_{\min}^2/4)^2 / z_{\min}^2 \right] \varphi(\rho_{10}, \eta_1, \xi) d\xi, \quad (46)$$

$$\eta_1 = \frac{\theta_{1\max} - \theta_{1\min}}{T_{\max}}.$$

Подставляя функции (45) и (46) в выражение (39), а затем (39) в (37), находим приближенное выражение для вероятности ложной тревоги

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\eta\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 - u_0}{\sqrt{\eta}} - \frac{z_{\max}\sqrt{\eta}}{2} \right) \exp \left[-\frac{(\xi_1 + \xi_2 - u_0 - z_{\max}\eta/2)^2}{2\eta} \right] \times$$

$$\times \varphi(\rho_{10}, \eta_1, z_{\max}\xi_1) \varphi(\rho_{20}, \eta_2, z_{\max}\xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (47)$$

где $\eta = z_{\min}^2/z_{\max}^2$, $u_0 = c/z_{\max}$ - нормированный порог. Точность аппроксимации вероятности ложной тревоги выражением (47) возрастает с увеличением ОСШ $z_{\max}$.

Перейдем теперь к определению вероятности пропуска сигнала (1), полагая, что $\gamma_0 = 1$, т.е. сигнал присутствует в наблюдаемом процессе. Рассмотрим функцию $F_{21}(u, v, \tau, t_{21}, t_{22})$ (см. (42)), для которой аналогично [4, с. 179; 5, с. 72] можно записать $F_{21}(u, v, \tau, \theta_{2\min}^*, \theta_{2\max}) = \int_{-\infty}^v W(y, \theta_{2\max}) dy$, где $W(y, \theta_{2\max}) = W(y, \theta_2 = \theta_{2\max})$, а $W(y, \theta_2)$ - решение уравнения (44) с коэффициентами $k_1 = a_{21}$ (35) и $k_2 = b_{21}$ (36). Задавая нулевые граничные условия, $W(y = u, \theta_2) = 0$ при $\theta_2 \in [\theta_{2\min}, \tau]$, $W(y = v, \theta_2) = 0$ при $\theta_2 \in [\tau, \theta_{2\max}]$, $W(y = -\infty, \theta_2) = 0$ при $\theta_2 \in [\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$, решая уравнение ФПК методом отражения с переменной знака [9, 10], получаем

$$F_{21}(u, v, \tau, \theta_{2\min}^*, \theta_{2\max}) = \exp \left[-\frac{\chi_2}{|\chi_2|} \frac{u - v}{2} - \frac{\rho_{21}^2}{8} (|\chi_2| + \chi_1) \right] \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W(u - \xi) \times$$

$$\times \chi[\xi_2, \xi_1, (u - v)\Theta(-\chi_2), \rho_{21}^2|\chi_2|] \chi[\xi_1, \xi, (u - v)\Theta(\chi_2), \rho_{21}^2\chi_1] \varphi(\rho_{21}, \chi_3, \xi_2) \times$$

$$\times \exp[\xi/2 - \xi_2\chi_2/2|\chi_2| - \xi_1\Theta(-\chi_2)] d\xi d\xi_1 d\xi_2 / 2\pi\rho_{21}^2 \sqrt{|\chi_2|\chi_1}, \quad (48)$$

где $\chi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \{\exp[-(y_1 - y_2 + y_3)^2/2y_4] - \exp[-(y_1 + y_2 + y_3)^2/2y_4]\}$, $\chi_1 = [\min(\theta_{02}, \tau) - \theta_{2\min}^*]/T_{\max}$, $\chi_2 = (\theta_{02} - \tau)/T_{\max}$, $\chi_3 = [\theta_{2\max} - \max(\theta_{02}, \tau)]/T_{\max}$, $\Theta(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$, $W(y)$ - начальная плотность вероятности, т.е. плотность вероятности случайной величины $M_{21}(\theta_{2\min}^*)$. Если $\theta_{2n} < \theta_{2\min}$, то $W(y)$ - гауссовская плотность вероятности с математическим ожиданием $\sigma_2^2/2$ и дисперсией $\sigma_2^2 = B_{21}(\theta_{2\min}, \theta_{2\min}) = z_0^2/2 - \rho_{21}^2\mu_2$, где $\mu_2 = (\theta_{02} - \theta_{2\min})/T_{\max}$. Если же $\theta_{2n} \geq \theta_{2\min}$, то начальная плотность вероятности вырождается в дельта-функцию: $W(y) = \delta(y)$.

Рассмотрим теперь функцию $F_{11}(u, v, \tau, t_{11}, t_{12})$ (см. (42)). Заметим, что при замене переменной $\lambda = -\theta_1$ статистические характеристики процесса $M_{11}(\theta_1)$ совпадают с характеристиками случайного процесса $M_{21}(\theta_2)$, если в (30) и (31) при $i = 2$ вместо ρ_{21} подставить ρ_{11} , а для искомой функции можно записать

$$F_{11}(u, v, \tau, \theta_{1\min}^*, \theta_{1\max}^*) = P \left[\sup_{\lambda_{\min}^* \leq \lambda < \tau'} M_{11}(\lambda) < v, \sup_{\tau' \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} M_{11}(\lambda) < u \right],$$

причем $\lambda_{\max} = -\theta_{1\min}$, $\lambda_0 = -\theta_{01}$, $\lambda_{\min}^* = -\theta_{1\max}^*$, $\tau' = -\tau$, $\lambda_n = -\theta_{1n}$. Следовательно, для того чтобы получить функцию $F_{11}(u, v, \tau, \theta_{1\min}^*, \theta_{1\max}^*)$, следует воспользоваться выражением (48), где необходимо заменить ρ_{21} на ρ_{11} и поменять местами переменные u и v . В результате находим

$$F_{11}(u, v, \tau, \theta_{1\min}, \theta_{1\max}^*) = \exp \left[\frac{\kappa_2}{|\kappa_2|} \frac{u-v}{2} - \frac{\rho_{11}^2}{8} (|\kappa_2| + \kappa_1) \right] \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty W(u-\xi) \times \\ \times \chi[\xi_2, \xi_1, (v-u)\Theta(-\kappa_2), \rho_{11}^2|\kappa_2|] \chi[\xi_1, \xi, (v-u)\Theta(\kappa_2), \rho_{11}^2\kappa_1] \varphi(\rho_{11}, \kappa_3, \xi_2) \times \\ \times \exp[\xi/2 - \xi_2\kappa_2/2|\kappa_2| - \xi_1\Theta(-\kappa_2)] d\xi d\xi_1 d\xi_2 / 2\pi\rho_{11}^2 \sqrt{|\kappa_2|\kappa_1}, \quad (49)$$

где $\kappa_1 = [\theta_{1\max}^* - \max(\theta_{01}, \tau)]/T_{\max}$, $\kappa_2 = (\tau - \theta_{01})/T_{\max}$, $\kappa_3 = [\min(\theta_{01}, \tau) - \theta_{1\min}]/T_{\max}$, $W(y)$ – плотность вероятности случайной величины $M_{11}(\theta_{1\max}^*)$. Если $\theta_{1n} > \theta_{1\max}$, то $W(y)$ – гауссовская плотность вероятности с математическим ожиданием $\sigma_1^2/2$ и дисперсией $\sigma_1^2 = B_{11}(\theta_{1\max}, \theta_{1\max}) = z_0^2/2 - \rho_{11}^2\mu_1$, где $\mu_1 = (\theta_{1\max} - \theta_{01})/T_{\max}$. Если же $\theta_{1n} \leq \theta_{1\max}$, то начальная плотность вероятности выражается в дельта-функцию: $W(y) = \delta(y)$.

Подставляя далее функции (48), (49) в формулу (40), а затем (40) в (38), получаем приближенное выражение для вероятности пропуска

$$\beta(\theta_{01}, \theta_{02}) = \begin{cases} \beta_1(\theta_{01}, \theta_{02}), & \mu_1 < \nu_1, \mu_2 < \nu_2, \\ \beta_2(\theta_{01}, \theta_{02}), & \mu_1 < \nu_1, \mu_2 \geq \nu_2, \\ \beta_3(\theta_{01}, \theta_{02}), & \mu_1 \geq \nu_1, \mu_2 < \nu_2, \\ \beta_4(\theta_{01}, \theta_{02}), & \mu_1 \geq \nu_1, \mu_2 \geq \nu_2. \end{cases} \quad (50)$$

Здесь $\nu_1 = (\theta_{1n} - \theta_{01})/T_{\max} = z_0^2/2\rho_{11}^2$, $\nu_2 = (\theta_{02} - \theta_{2n})/T_{\max} = z_0^2/2\rho_{21}^2$,

$$\beta_1 = \frac{z_{\max}^2}{2\pi\rho_{11}\rho_{21}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(\xi_1 + \xi_3 - u_0 + \eta_0 z_{\max}/2)^2}{2\eta_0} + \frac{z_{\max}}{2} (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4) \right] \times \\ \times \chi[\xi_1, \xi_2, 0, \rho_{11}^2\mu_1/z_{\max}^2] \chi[\xi_3, \xi_4, 0, \rho_{21}^2\mu_2/z_{\max}^2] \varphi(\rho_{11}, m_1, z_{\max}\xi_2) \varphi(\rho_{21}, m_2, z_{\max}\xi_4) \times \\ \times \exp[-\rho_{21}^2\mu_2/8 - \rho_{11}^2\mu_1/8] \left[(\xi_1 + \xi_3 - u_0 + \eta_0 z_{\max}/2) / \sqrt{2\pi\eta_0^{3/2}} \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 / \sqrt{\mu_1\mu_2}, \\ \eta_0 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) / z_{\max}^2 = [z_0^2 - \rho_{11}^2\mu_1 - \rho_{21}^2\mu_2] / z_{\max}^2, \\ \beta_2 = \frac{z_{\max}^2}{2\pi\rho_{11}z_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{z_{\max}^2(u_0 - y - \xi_1 - \sigma_1^2/2z_{\max})^2}{2\sigma_1^2} + \frac{z_{\max}}{2} (\xi_1 - \xi_2 + y - \xi) \right] \times \\ \times \chi[\xi_1, \xi_2, 0, \rho_{11}^2\mu_1/z_{\max}^2] \chi[\xi, y, 0, z_0^2/2z_{\max}^2] \varphi(\rho_{11}, m_1, z_{\max}\xi_2) \varphi(\rho_{21}, m_2, z_{\max}\xi) \times \\ \times \exp[-z_0^2/16 - \rho_{11}^2\mu_1/8] [z_{\max}^3(\xi_1 + y - u_0 + \sigma_1^2/2z_{\max})/\sigma_1^3] d\xi_1 d\xi_2 d\xi dy / \sqrt{\mu_1\pi}, \\ \beta_3 = \frac{z_{\max}^2}{2\pi\rho_{21}z_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{z_{\max}^2(u_0 - y - \xi_1 - \sigma_2^2/2z_{\max})^2}{2\sigma_2^2} + \frac{z_{\max}}{2} (\xi_1 - \xi_2 + y - \xi) \right] \times \\ \times \chi[\xi, y, 0, \rho_{21}^2\mu_2/z_{\max}^2] \chi[\xi_1, \xi_2, 0, z_0^2/2z_{\max}^2] \varphi(\rho_{11}, m_1, z_{\max}\xi_2) \varphi(\rho_{21}, m_2, z_{\max}\xi) \times \\ \times \exp[-z_0^2/16 - \rho_{21}^2\mu_2/8] [z_{\max}^3(\xi_1 + y - u_0 + \sigma_2^2/2z_{\max})/\sigma_2^3] d\xi_1 d\xi_2 d\xi dy / \sqrt{\mu_2\pi}, \\ \beta_4 = \frac{z_{\max}^2 \exp[-z_0^2/8]}{\pi z_0^2} \int_0^{u_0} d\xi_1 \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi_2 d\xi_3 \exp \left[\frac{z_{\max}}{2} (u_0 - \xi_2 - \xi_3) \right] \chi[\xi_1, \xi_3, -u_0, z_0^2/2z_{\max}^2] \times \\ \times \{ (2z_{\max}^2(\xi_2 - \xi_1)/z_0^2 + z_{\max}/2) \exp[-z_{\max}^2(\xi_1 - \xi_2)^2/z_0^2] + \exp[-z_{\max}^2(\xi_1 + \xi_2)^2/z_0^2] \times \\ \times (2z_{\max}^2(\xi_2 + \xi_1)/z_0^2 - z_{\max}/2) \} \varphi(\rho_{11}, m_1, z_{\max}\xi_2) \varphi(\rho_{21}, m_2, z_{\max}\xi_3), \\ m_1 = (\theta_{01} - \theta_{1\min})/T_{\max} = \eta_1 - \mu_1, \quad m_2 = (\theta_{2\max} - \theta_{02})/T_{\max} = \eta_2 - \mu_2.$$

Точность выражения (50) возрастает с увеличением ОСШ $z_{\max}$. Заметим, что для сигнала прямоугольной формы $f(t) \equiv A_r$ асимптотические выражения для вероятностей ложной тревоги (47) и пропуска сигнала (50) переходят в точные.

Если априорные вероятности гипотез p_i , $i = 1, 2$, и совместная плотность вероятности моментов появления и исчезновения $W_{\text{пр}}(\theta_1, \theta_2)$ известны, то качество обнаружения можно характеризовать средней (полной) вероятностью ошибки [11]

$$P_e = p_0\alpha + p_1\beta, \quad (51)$$

где $\beta = \int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{1\max}} \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \beta(\theta_1, \theta_2) W_{\text{пр}}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$, а вероятность ложной тревоги α и условная вероятность пропуска $\beta(\theta_{01}, \theta_{02})$ сигнала с моментами появления и исчезновения θ_{01} и θ_{02} определяются из (47) и (50) соответственно.

В качестве примера рассмотрим обнаружение прямоугольного импульса со скошенной вершиной [12]. Выберем априорные области (2) возможных значений моментов появления и исчезновения так, чтобы $\theta_{1\min}$ и $\theta_{2\max}$ были фиксированными, а максимальная длительность сигнала $T_{\max}$ оставалась неизменной. Будем считать, что точки $\theta_{1\max}$ и $\theta_{2\min}$ располагаются симметрично относительно $\theta = (\theta_{1\min} + \theta_{2\max})/2$ и могут изменяться согласованно с изменением величины $k = T_{\max}/T_{\min}$, где $T_{\min} = \theta_{2\min} - \theta_{1\max}$ – минимальная длительность сигнала.

Величина k может принимать значения из интервала $[1, \infty)$. При $k = 1$ априорные интервалы стягиваются в точку, что соответствует приему сигнала с известными моментами появления и исчезновения. Длительность такого сигнала равна $T_{\max}$. Нормированные длины априорных интервалов (45), (46) равны $\eta_i = (k - 1)/2k$, $i = 1, 2$.

Форму скошенной вершины импульса будем описывать функцией

$$f(t) = A_r \left[1 + 2 \frac{1-q}{1+q} \cdot \frac{t-\theta}{T_{\max}} \right] \left[1 + \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^2 / 12 \right]^{-1/2}, \quad (52)$$

где A_r – величина, характеризующая амплитуду сигнала, $q = f(\theta_{1\min})/f(\theta_{2\max})$ характеризует наклон скошенной вершины импульса. Как известно [11], эффективность обнаружения сигнала с известными моментами появления и исчезновения определяется энергией сигнала. Поэтому в выражение (52) введен множитель $\left[1 + \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^2 / 12 \right]^{-1/2}$, обеспечивающий независимость энергии сигнала максимальной длительности от наклона скошенной вершины импульса.

На рис. 4, 5 представлены зависимости средней вероятности ошибки P_e (51) от ОСШ $z_{\max, r} = A_r \sqrt{2T_{\max}/N_0}$. Рис. 4 соответствует значению $p_0 = 0,1$, а рис. 5 – $p_0 = 0,7$. Для обоих рисунков предполагалось, что $k = T_{\max}/T_{\min} = 4$, а априорные распределения моментов появления и исчезновения (12) являются равномерными

$$W_i(\theta_i) = \begin{cases} 1/(\theta_{i\max} - \theta_{i\min}), & \theta_{i\min} \leq \theta_i \leq \theta_{i\max}, \\ 0, & \theta_i < \theta_{i\min}, \quad \theta_i > \theta_{i\max}. \end{cases} \quad (53)$$

Кривые 1 на рис. 4, 5 построены для $q = 1$, а кривые 2 – для $q = 10$. Пунктирные кривые соответствуют порогу обнаружения $c = 0$. В качестве критерия оптимальности обнаружения можно выбрать [5, с. 36; 11] критерий минимума средней вероятности ошибки (51) и находить порог c , используя этот критерий. Очевидно, получаемый таким образом порог $c^* = \arg \inf P_e(c)$ будет зависеть от $z_{\max}$ и p_0 . Назовем этот порог оптимальным, а соответствующий алгоритм обнаружения – МП-обнаружителем с

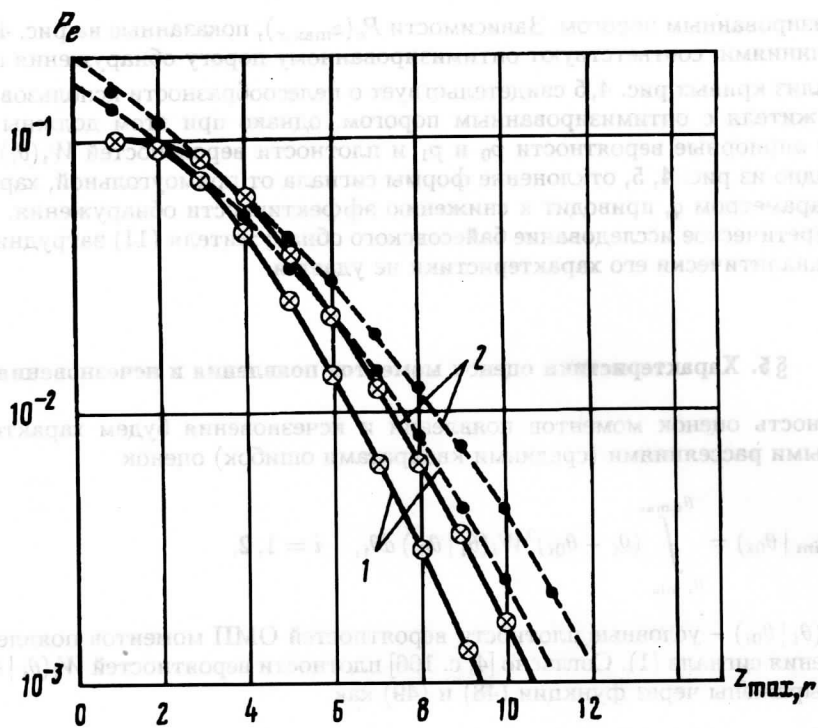


Рис. 4

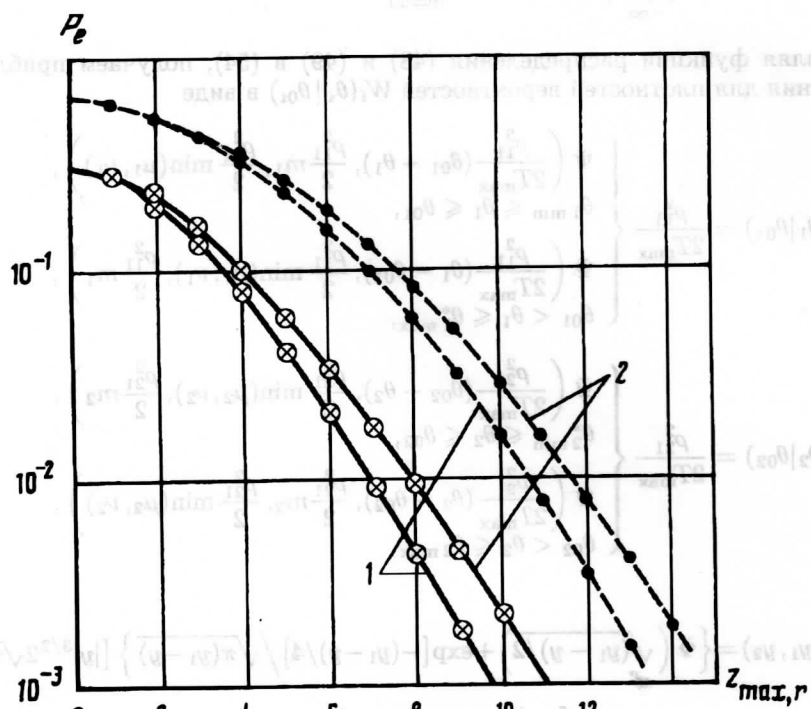


Рис. 5

оптимизированным порогом. Зависимости $P_e(z_{\max, r})$, показанные на рис. 4, 5 сплошными линиями, соответствуют оптимизированному порогу обнаружения c^* .

Анализ кривых рис. 4, 5 свидетельствует о целесообразности использования МП-обнаружителя с оптимизированным порогом, однако при этом должны быть известны априорные вероятности p_0 и p_1 и плотности вероятностей $W_i(\theta_i)$, $i = 1, 2$. Как видно из рис. 4, 5, отклонение формы сигнала от прямоугольной, характеризуемое параметром q , приводит к снижению эффективности обнаружения. Отметим, что теоретическое исследование байесовского обнаружителя (11) затруднительно, и найти аналитически его характеристики не удается.

§ 5. Характеристики оценок моментов появления и исчезновения

Точность оценок моментов появления и исчезновения будем характеризовать условными рассеяниями (средними квадратами ошибок) оценок

$$V(\theta_{im} | \theta_{0i}) = \int_{\theta_{i \min}}^{\theta_{i \max}} (\theta_i - \theta_{0i})^2 W_i(\theta_i | \theta_{0i}) d\theta_i, \quad i = 1, 2,$$

где $W_i(\theta_i | \theta_{0i})$ – условные плотности вероятностей ОМП моментов появления и исчезновения сигнала (1). Согласно [4, с. 166] плотности вероятностей $W_i(\theta_i | \theta_{0i})$ могут быть выражены через функции (48) и (49) как

$$W_i(\theta_i | \theta_{0i}) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial F_{i1}(u, v, \theta_i)}{\partial u} \Big|_{v=u} \right] du. \quad (54)$$

Подставляя функции распределения (48) и (49) в (54), получаем приближенные выражения для плотностей вероятностей $W_i(\theta_i | \theta_{0i})$ в виде

$$W_1(\theta_1 | \theta_{01}) = \frac{\rho_{11}^2}{2T_{\max}} \begin{cases} \Psi \left(\frac{\rho_{11}^2}{2T_{\max}} (\theta_{01} - \theta_1), \frac{\rho_{11}^2}{2} m_1, \frac{\rho_{11}^2}{2} \min(\mu_1, \nu_1) \right), \\ \theta_{1 \min} \leq \theta_1 \leq \theta_{01}, \\ \Psi \left(\frac{\rho_{11}^2}{2T_{\max}} (\theta_1 - \theta_{01}), \frac{\rho_{11}^2}{2} \min(\mu_1, \nu_1), \frac{\rho_{11}^2}{2} m_1 \right), \\ \theta_{01} < \theta_1 \leq \theta_{1 \max}^*, \end{cases} \quad (55)$$

$$W_2(\theta_2 | \theta_{02}) = \frac{\rho_{21}^2}{2T_{\max}} \begin{cases} \Psi \left(\frac{\rho_{21}^2}{2T_{\max}} (\theta_{02} - \theta_2), \frac{\rho_{21}^2}{2} \min(\mu_2, \nu_2), \frac{\rho_{21}^2}{2} m_2 \right), \\ \theta_{2 \min}^* \leq \theta_2 \leq \theta_{02}, \\ \Psi \left(\frac{\rho_{21}^2}{2T_{\max}} (\theta_2 - \theta_{02}), \frac{\rho_{21}^2}{2} m_2, \frac{\rho_{21}^2}{2} \min(\mu_2, \nu_2) \right), \\ \theta_{02} < \theta_2 \leq \theta_{2 \max}, \end{cases}$$

где

$$\Psi(y, y_1, y_2) = \left\{ \Phi \left(\sqrt{(y_1 - y)/2} \right) + \exp \left[-(y_1 - y)/4 \right] / \sqrt{\pi(y_1 - y)} \right\} [y]^{3/2} 2\sqrt{\pi}^{-1} \times \\ \times \int_0^\infty \xi \exp \left[-(\xi + y)^2 / 4y \right] \left[\Phi \left((y_2 + \xi) / \sqrt{2y_2} \right) - \exp(-\xi) \Phi \left((y_2 - \xi) / \sqrt{2y_2} \right) \right] d\xi.$$

Используя (55), для условных смещений и рассеяний ОМП моментов появления и исчезновения (9) можно записать

$$B(\theta_{im} | \theta_{0i}) = 2T_{\max} [F_B(\rho_{i1}^2(\eta_i - \mu_i)/2, \rho_{i1}^2\mu_i/2) + F_B(\rho_{i1}^2\mu_i/2, \rho_{i1}^2(\eta_i - \mu_i)/2)] / \rho_{i1}^2, \quad (56)$$

$$V(\theta_{im} | \theta_{0i}) = 4T_{\max}^2 [F_V(\rho_{i1}^2(\eta_i - \mu_i)/2, \rho_{i1}^2\mu_i/2) + F_V(\rho_{i1}^2\mu_i/2, \rho_{i1}^2(\eta_i - \mu_i)/2)] / \rho_{i1}^4, \quad (57)$$

где $F_B(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \xi \Psi(\xi, x_1, x_2) d\xi$, $F_V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \xi^2 \Psi(\xi, x_1, x_2) d\xi$. Точность выражений (55)–(57) возрастает с увеличением ОСШ $z_{\max}$. Заметим, что для сигнала прямоугольной формы $f(t) \equiv A_r$ эти асимптотические выражения переходят в точные.

Вводя нормированные переменные

$$\ell_{im} = \rho_{i1}^2(\theta_{im} - \theta_{0i})/2T_{\max}, \quad i = 1, 2, \quad (58)$$

и переходя в (55) к пределу при $z_{\max} \rightarrow \infty$, находим предельную плотность вероятности нормированной ошибки ОМП моментов появления и исчезновения (58)

$$W_a(\ell_i) = 3 \exp(2|\ell_i|) [1 - \Phi(3\sqrt{|\ell_i|/2})] + \Phi(\sqrt{|\ell_i|/2}) - 1. \quad (59)$$

Впервые эта плотность вероятности была получена, по-видимому, в [13], а ее свойства изучены и описаны в [14]. Плотность вероятности (59) существенно отличается от гауссовской, имеет нулевые математическое ожидание и коэффициент асимметрии, обладает дисперсией $13/2$ и коэффициентом эксцесса $1779/169 \approx 10,53$. Используя (58) и (59), для асимптотических значений смещения (56) и рассеяния (57) ОМП (9) моментов появления и исчезновения можно записать

$$B_a(\theta_{im} | \theta_{0i}) = 0, \quad V_a(\theta_{im} | \theta_{0i}) = 26T_{\max}^2 / \rho_{i1}^4. \quad (60)$$

Если воспользоваться представлением ОМП моментов появления и исчезновения в виде (10), то формулы (60) непосредственно следуют из результатов [3]. Действительно, ОМП (10) можно интерпретировать как оценки момента скачкообразного изменения сигнала, наблюдаемого на фоне гауссовского белого шума.

Пусть известна априорная плотность вероятности моментов появления и исчезновения и выполняется (12). Тогда точность ОМП моментов появления и исчезновения можно характеризовать величинами безусловных рассеяний оценок

$$V(\theta_{im}) = \int_{\theta_{i, \min}}^{\theta_{i, \max}} V(\theta_{im} | \theta) W_i(\theta) d\theta, \quad (61)$$

где $V(\theta_{im} | \theta)$ определяется из (57) или (60). Используя (61), можно также записать асимптотическое значение риска ОМП (9) моментов появления и исчезновения для квадратичной функции потерь (13) при $a_1 = a_2 = 1$:

$$R_{МП} = V(\theta_{1m}) + V(\theta_{2m}). \quad (62)$$

Теоретический анализ байесовских оценок наталкивается на существенные трудности. Однако, используя результаты [3], можно записать приближенные выражения для условных рассеяний байесовских оценок (15), справедливые при больших ОСШ,

$$V_a(\theta_{iB} | \theta_{0i}) \approx 19,5T_{\max}^2 / \rho_{i1}^4. \quad (63)$$

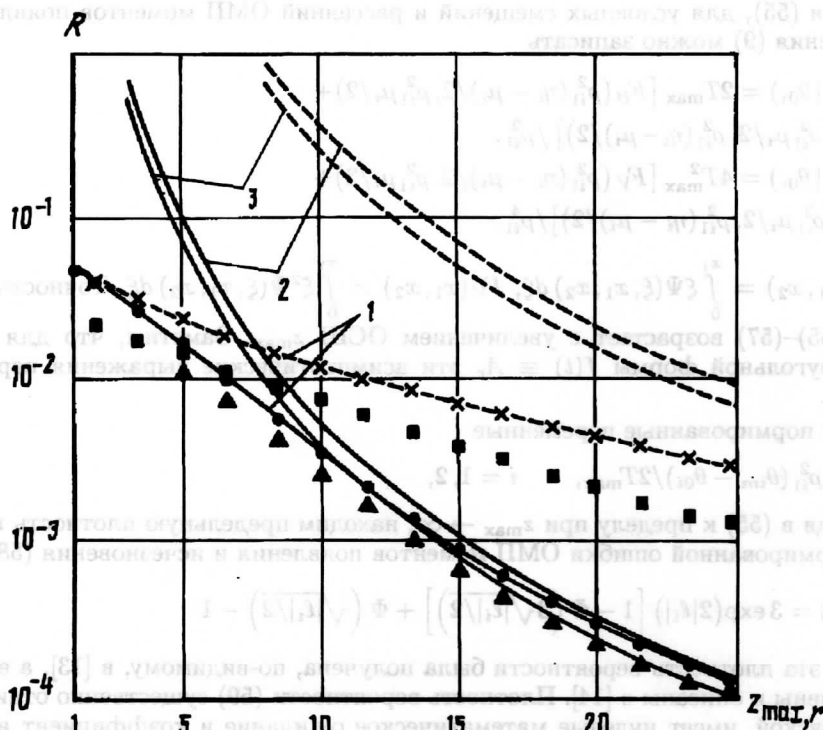


Рис. 6

При выполнении (12) для байесовского риска (16) из (63) находим приближенное выражение

$$R_B \approx 19,5 T_{\max}^2 \sum_{i=1}^2 \int_{\theta_{i \min}}^{\theta_{i \max}} \rho_{i1}^{-4} W_i(\theta) d\theta. \quad (64)$$

На рис. 6 показаны зависимости рисков (62), (64) оценок моментов появления и исчезновения сигнала (52) от ОСШ $z_{\max,r}$ для $k = 4$, $q = 1$ (сплошные кривые) и $q = 10$ (пунктирные кривые). Предполагалось, что априорные плотности вероятностей моментов появления и исчезновения заданы выражениями (12), (53). Кривые 1 и 2 на рис. 6 показывают риск ОМП (62), который рассчитан с использованием рассеяний (57) и предельных значений рассеяний (60) соответственно. Кривые 3 иллюстрируют предельное значение байесовского риска (64). Как видно из рис. 6, отклонение формы сигнала от прямоугольной, характеризуемое параметром q , приводит к увеличению риска оценок.

§ 6. Результаты статистического моделирования

Исследования работоспособности МП- и байесовского алгоритмов, а также определение границ применимости асимптотических выражений для характеристик алгоритмов были выполнены методами статистического моделирования на ЭВМ. Моделировались МП- и байесовские алгоритмы обнаружения и оценки моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (52).

Случайные процессы $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$ (см. (6), (7)) представлялись в виде $L_i(\xi_i) = S_i(\xi_i, \xi_{0i}) + N_i(\xi_i)$, $i = 1, 2$, где $\xi_1 = (\theta - \theta_1)/T_{\max}$, $\xi_2 = (\theta_2 - \theta)/T_{\max}$, $\xi_{01} = (\theta - \theta_{01})/T_{\max}$, $\xi_{02} = (\theta_{02} - \theta)/T_{\max}$. Здесь для сигнала (52)

$$S_i(\xi_i, \xi_{0i}) = z_{\max, r}^2 \gamma_0 [\min(\xi_i, \xi_{0i}) + (-1)^i b \min^2(\xi_i, \xi_{0i}) + b^2 \min^3(\xi_i, \xi_{0i})/3] / (1 + b^2/12) - z_{\max, r}^2 \xi_i [1 + (-1)^i b \xi_i + b^2 \xi_i^2/3] / 2(1 + b^2/12),$$

$$b = 2(1 - q)/(1 + q),$$

$$N_i(\xi_i) = (-1)^i z_{\max, r} \sqrt{2T_{\max}/N_0} \int_0^{(-1)^i \xi_i} n(\theta + T_{\max} x)(1 + bx) dx / \sqrt{1 + b^2/12}$$

– статистически независимые гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$\langle N_i(\xi_{1i}) N_i(\xi_{2i}) \rangle = z_{\max, r}^2 \min [(-1)^i \xi_{1i}; (-1)^i \xi_{2i}] \times \times \{1 + b \min^2 [(-1)^i \xi_{1i}; (-1)^i \xi_{2i}] / 3\} / (1 + b^2/12).$$

При моделировании вырабатывались дискретные отсчеты функций $N_i(\xi_i)$, на основе которых реализации процессов (6) и (7) аппроксимировались ступенчатыми функциями с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\varepsilon = 0,1$. Согласно [15] дискретные отсчеты случайных процессов (6) и (7) можно представить в виде

$$L_i(n\Delta\xi) = S_i(n\Delta\xi, n_{0i}\Delta\xi) + z_{\max, r} \varepsilon \sqrt{1/2k} [1 + (-1)^i b n\Delta\xi]^2 \sum_{m=0}^n X[m] / (1 + b^2/12), \quad (65)$$

где $X[m]$ – гауссовские независимые случайные величины с нулевыми средними значениями и единичными дисперсиями, $n = \overline{n_{\min}, n_{\max}}$, $n_{\min} = \text{ent}(1/\varepsilon^2)$, $n_{\max} = \text{ent}(k/\varepsilon^2)$, $n_{0i} = \text{ent}(2k\xi_{0i}/\varepsilon^2)$, $i = 1, 2$; $\text{ent}(\cdot)$ – целая часть числа; $\Delta\xi = \varepsilon^2/2k$. На основе отсчетов (65) вырабатывались величины (8), (10), (11) и (15)

$$L = \max[L_1(n\Delta\xi), n = \overline{n_{\min}, n_{\max}}] + \max[L_2(n\Delta\xi), n = \overline{n_{\min}, n_{\max}}], \quad (66)$$

$$\xi_{1m} = \frac{\theta - \theta_{1m}}{T_{\min}} = \arg \max[L_1(n\Delta\xi)], \quad \xi_{2m} = \frac{\theta_{2m} - \theta}{T_{\min}} = \arg \max[L_2(n\Delta\xi)], \quad (67)$$

$$I = \frac{\varepsilon^4}{4k^2 \eta_1 \eta_2} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_1(n\Delta\xi)] \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_2(n\Delta\xi)], \quad (68)$$

$$\xi_{1B} = \frac{\theta - \theta_{1B}}{T_{\min}} = \frac{\varepsilon^2}{2k} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} n \exp[L_1(n\Delta\xi)] / \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_1(n\Delta\xi)], \quad (69)$$

$$\xi_{2B} = \frac{\theta_{2B} - \theta}{T_{\min}} = \frac{\varepsilon^2}{2k} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} n \exp[L_2(n\Delta\xi)] / \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_2(n\Delta\xi)].$$

Моделировались МП-алгоритм обнаружения (3), обобщенный МП-алгоритм (5) при оптимизированном пороге $c^* = \arg \inf P_e(c)$, а также байесовский алгоритм обнаружения. Для этого формировались величины (66) и (68) при $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0 = 1$, первая из которых сравнивалась с порогами $c = 0$, $c^* = \arg \inf P_e(c)$, вторая – с порогом p_0/p_1 . Если при $\gamma_0 = 0$ соответствующий порог был превышен, то фиксировалась ошибка ложной тревоги. Если при $\gamma_0 = 1$ выполнялось условие $I < p_0/p_1$

или $L < c$, то фиксировалась ошибка пропуска сигнала. В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска использовались относительные частоты появления соответствующих ошибок.

При моделировании МП- и байесовского алгоритмов оценивания формировались величины (67) и (69), которые являются нормированными МП- и байесовскими оценками моментов появления и исчезновения импульса (52) соответственно. При этом истинные значения нормированных моментов появления и исчезновения выбирались либо фиксированными при определении условных характеристик, либо случайными, распределенными равномерно на интервале $[1/2k, 1/2]$ – при определении безусловных характеристик. В процессе моделирования было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого $z_{\max, r}$. Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений средней вероятности ошибки P_e и безусловных рассеяний не более чем на 15% при $P_e > 10^{-3}$ и $V_{0, \text{в}}/T_{\max}^2 > 10^{-3}$, $V_{0, \text{и}}/T_{\max}^2 > 10^{-3}$.

Результаты моделирования приведены на рис. 4, 5 и 6. На рис. 4, 5 изображены экспериментальные значения средней вероятности ошибки обнаружения при $p_0 = 0,1$ и $p_0 = 0,7$ соответственно. Байесовскому алгоритму соответствуют окружности. Средние вероятности ошибок МП-алгоритма изображены крестиками для оптимизированного порога c^* и кружочками для нулевого порога (3). Сравнение экспериментальных значений со сплошными кривыми на рис. 4, 5 свидетельствует о практически полном совпадении характеристик байесовского обнаружителя и МП-обнаружителя с оптимизированным порогом. Это позволяет рекомендовать формулы (47) и (50) для расчета вероятностей ошибки при использовании байесовского алгоритма обнаружения: $P_{eB} \approx \inf P_e(c)$. Очевидно также, что асимптотические формулы (47), (50) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные на всем исследуемом интервале значений ОСИ.

На рис. 6 показаны экспериментальные значения байесовского риска (16) для $q = 1$ (треугольники) и $q = 10$ (квадраты). Как и следовало ожидать, риск при использовании байесовских оценок моментов появления и исчезновения меньше риска при использовании ОМП, что свидетельствует о более высокой точности байесовских оценок по сравнению с оценками максимального правдоподобия. На том же рисунке показаны экспериментальные значения риска ОМП моментов появления и исчезновения. Кружки соответствуют $q = 1$, крестики – $q = 10$. Как видно, риск (62), рассчитанный с помощью асимптотических выражений (57), удовлетворительно описывает экспериментальные зависимости в более широком диапазоне отношений сигнал/шум, чем риск, рассчитанный с помощью предельного значения рассеяния ОМП (60). Действительно, асимптотические выражения (57) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные зависимости при $z_{\max, r} > 1$. Аналогичная точность аппроксимации выражениями (62) достигается лишь при $z_{\max, r} > 20$ (при $q = 1$) и $z_{\max, r} > 60$ (при $q = 10$).

§ 7. Заключение

При одинаковом объеме априорной информации и равномерном распределении случайных моментов появления и исчезновения характеристики байесовского и максимально правдоподобного алгоритмов обнаружения практически совпадают.

При оценке моментов появления и исчезновения сигнала, если не требуется очень высокая точность оценки, возможно применение максимально правдоподобного измерителя, более просто реализуемого аппаратно. Если же необходимо обеспечить предельно достижимую точность оценки, то целесообразно использовать байесовский измеритель.

В общем случае эффективность оптимального приема сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения снижается по мере роста отклонения формы сигнала от прямоугольной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тартаковский А.Г. Обнаружение сигналов со случайными моментами появления и исчезновения // Пробл. передачи информ. 1988. Т. 24. № 2. С. 39–50.
2. Репин В.Г. Обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 1. С. 61–72.
3. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
4. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
5. Трифонов А.П. Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами // Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984. С. 12–89.
6. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
7. Трифонов А.П., Бутейко В.К. Совместная оценка двух параметров разрывного сигнала на фоне белого шума // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 11. С. 2323–2330.
8. Фалькович С.Е. Оценка параметров сигнала. М.: Сов. радио, 1970.
9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1965.
11. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
12. Грязнов М.И., Гуревич М.А., Рябинин М.А. Измерение параметров импульсов. М.: Радио и связь, 1991.
13. Терентьев А.С. Распределение вероятностей временного положения абсолютного максимума на выходе согласованного фильтра // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13. № 4. С. 652–657.
14. Трифонов А.П. Разрывные модели сигналов и оценка их параметров // Прикладная теория случайных процессов и полей. Ульяновск: УлГТУ, 1995. С. 164–214.
15. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971.

Поступила в редакцию

30.12.99

После переработки

23.11.2000