

209

209

p-250
2001/4

ISSN 0033-8486

РАДИОТЕХНИКА

4 2001

www.webcenter.ru/~iprzhr/

В НОМЕРЕ:

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ

РАДИОСИСТЕМЫ

Выпуск 50 Обработка сигналов и полей, №4



Тел./факс: (095) 925-9241
E-mail: iprzhr@online.ru
<http://www.webcenter.ru/~iprzhr/>

Журнал переводится на английский язык
и издается компанией Begell House, Inc. под названием
TELECOMMUNICATIONS AND RADIO ENGINEERING

ПОДПИСКА НА ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ ПО МОСКВЕ ЧЕРЕЗ ИНТЕРНЕТ WWW.GAZETY.RU

УДК 621.396

Оценка дальности, скорости и ускорения при зондировании последовательностью оптических импульсов

А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова, М.В. Максимов

Найдены характеристики совместно эффективных оценок дальности, скорости и ускорения.

The characteristics of joint-efficiency estimations of range, velocity and acceleration are founded.

В системах оптической локации широко применяются последовательности оптических импульсов [1–3]. В [3] исследована потенциальная точность совместных оценок дальности и скорости цели с априори известным ускорением. Однако в реальных условиях ускорение может быть неизвестно.

Цель работы – анализ потенциальной точности оценок дальности, скорости и ускорения.

Положим, что излучается последовательность оптических импульсов с интенсивностью

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \left[t - (k - \mu)\theta - \lambda \right] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k f \left[\frac{t - (k - \mu)\theta - \lambda}{\tau} \right], \quad (1)$$

где $s_k(t)$ – функция, описывающая интенсивность k -го оптического импульса; λ – время прихода последовательности; θ – период повторения импульсов. Параметр μ определяет точку последовательности, с которой связано ее время прихода λ . Так, при $\mu = 0$ величина λ представляет собой время прихода первого импульса, при

$$\mu = (N - 1)/2 \quad (2)$$

– время прихода середины последовательности (1), а при $\mu = N - 1$ – время прихода последнего импульса последовательности. В (1) также обозначено: $a_k = \max s_k(t)$ – максимальная интенсивность k -го импульса, а $\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_k^2(t) dt [\max s_k(t)]^{-2}$ – эквивалентная длительность одного импульса последовательности.

Функция $f(x) \geq 0$ в (1) описывает форму интенсивности одного импульса и нормирована так, что $\max f(x) = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 1$.

В результате рассеяния зондирующей последовательности (1) целью, дальность R_0 , скорость V_0 и ускорение A_0 которой надо измерить, интенсивность принимаемого сигнала будет иметь вид [1–3]:

$$s(t, R_0, V_0, A_0) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k f \left[\frac{t - 2R_0/c - (k - \mu)\theta(1 + 2V_0/c) - A_0(k - \mu)^2\theta^2/c}{\tau} \right]. \quad (3)$$

Здесь c – скорость света, причем $|V_0| \ll c$ и $N\theta |A_0| \ll c$. Сигнал с интенсивностью (2) принимается в течение интервала времени $[0, T]$ на фоне оптического шума с интенсивностью ν . Следовательно, обработке доступна реализация пуассоновского процесса с интенсивностью

$$\nu + s(t, l_0). \quad (4)$$

где вектор $l = \|l_1, l_2, l_3\|$ объединяет измеряемые параметры: $l_1 = R$, $l_2 = V$, $l_3 = A$.

Потенциальная точность оценок дальности, скорости и ускорения характеризуется корреляционной матрицей совместно эффективных оценок [4]

$$K = B^{-1}, \quad (5)$$

где B – информационная матрица Фишера с элементами

$$B_{ij} = \left[\frac{\partial^2 H(l_1, l_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} \right]_{l_0}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

$$H(l_1, l_2) = \int_0^T \left[\nu + s(t, l_0) \right] \ln \left[1 + \frac{s(t, l_1)}{\nu} \right] \ln \left[1 + \frac{s(t, l_2)}{\nu} \right] dt \quad (7)$$

– функция неопределенности при обработке пуассоновского процесса с интенсивностью (4).

Положим, что интервал наблюдения достаточно велик, так что $T > N\theta$, $T \gg \tau$ и скважность последовательности оптических импульсов не слишком мала ($\theta/\tau > 2 \dots 3$), так что отдельные импульсы последовательности (3) не перекрываются. Подставляя (3) в (7), для функции неопределенности получаем выражение

$$\begin{aligned} H(l_1, l_2) = & \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\nu + a_k f \left(\frac{t - 2R_0/c - (k - \mu)\theta(1 + 2V_0/c) - A_0(k - \mu)^2\theta^2/c}{\tau} \right) \right] \times \\ & \times \ln \left[1 + q_k f \left(\frac{t - 2R_1/c - (k - \mu)\theta(1 + 2V_1/c) - A_1(k - \mu)^2\theta^2/c}{\tau} \right) \right] \times \\ & \times \ln \left[1 + q_k f \left(\frac{t - 2R_2/c - (k - \mu)\theta(1 + 2V_2/c) - A_2(k - \mu)^2\theta^2/c}{\tau} \right) \right] dt, \end{aligned} \quad (8)$$

где $q_k = a_k/\nu$. Подставляя (8) в (6) и выполняя дифференцирование, находим элементы информационной матрицы Фишера:

$$\begin{aligned} B_{11} = 4F_N / [c^2\tau], \quad B_{12} = B_{21} = 4\theta F_N M_1(\mu) / [c^2\tau], \quad B_{22} = 4\theta^2 F_N M_2(\mu) / [c^2\tau], \\ B_{23} = B_{32} = 2\theta^3 F_N M_3(\mu) / [c^2\tau], \quad B_{31} = B_{13} = 2\theta^2 F_N M_2(\mu) / [c^2\tau], \quad B_{33} = \theta^4 F_N M_4(\mu) / [c^2\tau]. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{Здесь } F_N = \sum_{k=0}^{N-1} F(a_k);$$

$$F(a_k) = a_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{df(x)}{dx} \right]^2 \frac{1}{\nu + a_k f(x)} dx; \quad M_n(\mu) = \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^n P_k; \quad P_k = F(a_k) / F_N. \quad (10); (11); (12)$$

Величину (11) можно интерпретировать как момент n -го порядка дискретной случайной величины $k \in [0, N-1]$ относительно точки μ [5]. При этом предполагается, что вероятность значения k равна ве-

личине P_k (12), которая удовлетворяет условиям: $P_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{N-1} P_k = 1$.

Общие выражения (5) и (9) позволяют найти характеристики отдельно и совместно эффективных оценок дальности, скорости и ускорения. Рассмотрим вначале дисперсии оценок дальности. Если скорость V_0 и ускорение A_0 цели априори известны, то из (5) для дисперсии эффективной оценки дальности получаем выражение

$$\sigma_R^2 = 1/B_{11} = c^2\tau / [4F_N]. \quad (13)$$

Если скорость V_0 априори неизвестна, а ускорение A_0 известно, то дисперсия совместно эффективной оценки дальности

$$\sigma_R^2(V) = \frac{B_{22}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2} = \frac{c^2 \tau M_2(\mu)}{4F_N [M_2(\mu) - M_1^2(\mu)]}. \quad (14)$$

Отметим, что (13), (14) совпадают с аналогичными выражениями в [3].

При априори неизвестном ускорении A_0 и априори известной скорости V_0 дисперсия совместно эффективной оценки дальности запишется как

$$\sigma_R^2(A) = \frac{B_{33}}{B_{11}B_{33} - B_{13}^2} = \frac{c^2 \tau M_4(\mu)}{4F_N [M_4(\mu) - M_2^2(\mu)]}. \quad (15)$$

Наконец, если априори неизвестны и скорость V_0 , и ускорение A_0 , то обращая информационную матрицу Фишера, находим

$$\sigma_R^2(V, A) = \frac{B_{22}B_{33} - B_{23}^2}{\det \mathbf{B}} = \frac{c^2 \tau [M_2(\mu)M_4(\mu) - M_3^2(\mu)]}{4F_N d}, \quad (16)$$

где

$$d = \det \mathbf{B} = M_2(\mu)M_4(\mu) - M_1^2(\mu)M_4(\mu) - M_2^2(\mu) - M_3^2(\mu) + 2M_1(\mu)M_2(\mu)M_3(\mu). \quad (17)$$

Сопоставляя (13)–(16), можно определить потери в точности оценки дальности вследствие априорного незнания скорости и (или) ускорения.

Рассмотрим далее дисперсии оценок скорости. Если дальность R_0 и ускорение A_0 цели априори известны, то из (5) для дисперсии эффективной оценки скорости получаем выражение

$$\sigma_V^2 = 1/B_{22} = c^2 \tau / [4\theta^2 F_N M_2(\mu)]. \quad (18)$$

Если же дальность R_0 априори неизвестна, а ускорение A_0 известно, то дисперсия совместно эффективной оценки скорости

$$\sigma_V^2(R) = \frac{B_{11}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2} = \frac{c^2 \tau}{4\theta^2 F_N [M_2(\mu) - M_1^2(\mu)]}. \quad (19)$$

Выражения (18), (19) совпадают с аналогичными выражениями в [3]. При априори неизвестном ускорении A_0 и априори известной дальности R_0 дисперсия совместно эффективной оценки скорости

$$\sigma_V^2(A) = \frac{B_{33}}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2} = \frac{c^2 \tau M_4(\mu)}{4\theta^2 F_N [M_2(\mu)M_4(\mu) - M_3^2(\mu)]}. \quad (20)$$

Наконец, если априори неизвестны и дальность R_0 , и ускорение A_0 , то обращая информационную матрицу Фишера, имеем

$$\sigma_V^2(R, A) = \frac{B_{11}B_{33} - B_{13}^2}{\det \mathbf{B}} = \frac{c^2 \tau [M_4(\mu) - M_2^2(\mu)]}{4\theta^2 F_N d}. \quad (21)$$

Сопоставляя (18)–(21), можно определить потери в точности оценки скорости вследствие априорного незнания дальности и (или) ускорения.

Рассмотрим дисперсии оценок ускорения. Если дальность R_0 и скорость V_0 цели априори известны, то из (5) получаем

$$\sigma_A^2 = 1/B_{33} = c^2\tau / [\theta^4 F_N M_4(\mu)] \quad (22)$$

Если дальность R_0 априори неизвестна, а скорость V_0 известна, то дисперсия совместно эффективной оценки ускорения имеет вид

$$\sigma_A^2(R) = \frac{B_{11}}{B_{11}B_{33} - B_{13}^2} = \frac{c^2\tau}{\theta^4 F_N [M_4(\mu) - M_2^2(\mu)]} \quad (23)$$

При априори неизвестной скорости V_0 и априори известной дальности R_0 дисперсия

$$\sigma_A^2(V) = \frac{B_{22}}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2} = \frac{c^2\tau M_2(\mu)}{\theta^4 F_N [M_2(\mu)M_4(\mu) - M_3^2(\mu)]} \quad (24)$$

Наконец, если априори неизвестны и дальность R_0 , и скорость V_0 , то обращая информационную матрицу Фишера, находим

$$\sigma_A^2(R, V) = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{\det B} = \frac{c^2\tau [M_2(\mu) - M_1^2(\mu)]}{\theta^4 F_N d} \quad (25)$$

Сопоставляя (22)–(25), можно определить потери в точности оценки ускорения в следствие априорного незнания дальности и (или) скорости.

При совместной оценке дальности, скорости и ускорения, кроме дисперсий (16), (21), (25) совместно эффективных оценок, представляют интерес коэффициенты взаимной корреляции оценок. Их можно найти, обращая информационную матрицу Фишера (5). В результате имеем для коэффициентов корреляции совместно эффективных оценок:

дальности и скорости при априори неизвестном ускорении

$$\rho(R, V) = \frac{M_2(\mu)M_3(\mu) - M_1(\mu)M_4(\mu)}{\sqrt{[M_2(\mu)M_4(\mu) - M_3^2(\mu)][M_4(\mu) - M_2^2(\mu)]}}; \quad (26)$$

дальности и ускорения при априори неизвестной скорости

$$\rho(R, A) = \frac{M_1(\mu)M_3(\mu) - M_2^2(\mu)}{\sqrt{[M_2(\mu)M_4(\mu) - M_3^2(\mu)][M_2(\mu) - M_1^2(\mu)]}}; \quad (27)$$

скорости и ускорения при априори неизвестной дальности

$$\rho(V, A) = \frac{M_1(\mu)M_2(\mu) - M_3(\mu)}{\sqrt{[M_4(\mu) - M_2^2(\mu)][M_2(\mu) - M_1^2(\mu)]}} \quad (28)$$

Как следует из (26)–(28), коэффициенты корреляции $\rho(R, V)$, $\rho(R, A)$, $\rho(V, A)$ не зависят от длительности τ и периода повторения θ оптических импульсов. Они определяются лишь величинами моментов $M_n(\mu)$ (11) дискретной случайной величины k с распределением (12). Как (11), так и (16), (21), (25), (26)–(28) зависят от выбора параметра μ , т.е. положения точки последовательности, с которой свя-

зано время прихода последовательности. Для того, чтобы получить зависимость характеристик совместно эффективных оценок дальности, скорости и ускорения от параметра μ в явном виде, перейдем в (16), (17), (21), (25) от моментов (11) относительно точки μ к начальным моментам

$$m_n = \sum_{k=0}^{N-1} k^n P_k \quad (29)$$

дискретной случайной величины k с распределением P_k (12). Выражая в (16), (17), (21), (25) $M_n(\mu)$ (11) через m_n (29), имеем

$$\sigma_R^2(V, A) = c^2 \tau \left\{ m_2 m_4 - m_3^2 + 2\mu(m_2 m_3 - m_1 m_4) + \mu^2 [D(k^2) + 2(m_1 m_3 - m_2^2)] - \right. \\ \left. - 2\mu^3 \delta D(k) + \mu^4 D(k) \right\} \left\{ 4F_N D(k) [D(k^2) - \delta^2 D(k)] \right\}^{-1}, \quad (30)$$

$$\sigma_V^2(R, A) = \frac{c^2 \tau [D(k^2) + 4D(k)(\mu - \delta/2)^2 - \delta^2 D(k)]}{4\theta^2 F_N D(k) [D(k^2) - \delta^2 D(k)]}, \quad (31)$$

$$\sigma_A^2(R, V) = \frac{c^2 \tau}{\theta^4 F_N [D(k^2) - \delta^2 D(k)]}. \quad (32)$$

Здесь $D(k) = m_2 - m_1^2$ — дисперсия дискретной случайной величины k с распределением P_k (12); $D(k^2) = m_4 - m_2^2$ — дисперсия квадрата k ;

$$\delta = (m_3 - m_1 m_2) / D(k). \quad (33)$$

Как следует из (32), дисперсия $\sigma_V^2(R, A)$ при априори неизвестных дальности и скорости не зависит от выбора параметра μ , т. е. не зависит от того, с какой точкой последовательности (1) связано ее время прихода. В то же время дисперсия совместно эффективной оценки скорости (31) при априори неизвестных дальности и ускорении достигает минимума:

$$\sigma_V^2(R, A) = c^2 \tau / [4\theta^2 F_N D(k)], \quad (34)$$

если параметр

$$\mu = \delta/2. \quad (35)$$

При выборе параметра μ согласно (35) минимальное рассеяние совместно-эффективной оценки скорости (34) совпадает с рассеянием совместно эффективной оценки скорости (19) при априори известной дальности и априори известном ускорении. Следовательно, при выборе параметра μ согласно (35) априорное незнание ускорения не влияет на точность совместно эффективной оценки скорости.

Конкретизируем полученные общие соотношения для прямоугольной последовательности оптических импульсов, обладающих одинаковыми максимальными интенсивностями, так что

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{N-1} \quad (36)$$

и в (10) $F(a_0) = F(a_1) = \dots = F(a_{N-1}) = F_0$. В этом случае из (33) следует $\delta = N - 1$, а выбор параметра μ согласно (35) приводит к тому, что время прихода последовательности (1) отсчитывается от ее середины (2). При выполнении (2) и (36) выражения (30)–(32) принимают соответственно вид:

$$\sigma_R^2(V, A) = 3c^2\tau(3N^2 - 7) / [16F_0N(N^2 - 4)], \quad (37)$$

$$\sigma_V^2(R, A) = 3c^2\tau / [\theta^2 F_0N(N^2 - 1)], \quad (38)$$

$$\sigma_A^2(R, V) = 180c^2\tau / [\theta^4 F_0N(N^2 - 1)(N^2 - 4)]. \quad (39)$$

Согласно (37)–(39) при совместной оценке дальности, скорости и ускорения зондирующая последовательность оптических импульсов (1) должна содержать не менее трех импульсов ($N \geq 3$).

Для сравнения приведем значения дисперсий эффективных отдельных оценок дальности, скорости и ускорения. При выполнении (2), (36) из (13), (18), (22) получаем для дисперсии эффективной оценки дальности при априори известных скорости и ускорении

$$\sigma_R^2 = c^2\tau / [4F_0N]; \quad (40)$$

скорости при априори известных дальности и ускорении

$$\sigma_V^2 = 3c^2\tau / [\theta^2 F_0N(N^2 - 1)]; \quad (41)$$

ускорения при априори известных дальности и скорости

$$\sigma_A^2 = 240c^2\tau / [\theta^4 F_0N(N^2 - 1)(3N^2 - 7)]. \quad (42)$$

Сопоставляя (37)–(39) и (40)–(42), находим

$$\frac{\sigma_R^2(V, A)}{\sigma_R^2} = \frac{\sigma_A^2(R, V)}{\sigma_A^2} = \frac{3(3N^2 - 7)}{4(N^2 - 4)}; \quad \frac{\sigma_V^2(R, A)}{\sigma_V^2} = 1. \quad (43); (44)$$

Согласно (44) при выполнении (2), (36) точность эффективной оценки скорости не зависит от наличия или отсутствия априорной информации о величинах дальности и ускорения. В то же время, как следует из (43), незнание скорости и ускорения влияет на точность оценки дальности, а незнание дальности и скорости – на точность оценки ускорения. Так, при минимально возможном числе импульсов зондирующей последовательности ($N = 3$) априорное незнание скорости и ускорения (дальности и скорости) приводит к увеличению дисперсии эффективной оценки дальности (ускорения) в 3 раза. С ростом числа импульсов в зондирующей последовательности этот проигрыш в точности оценки несколько уменьшается и при $N \rightarrow \infty$ достигает значения 9/4.

- Таким образом, найдены дисперсии отдельных и совместно эффективных оценок дальности, скорости и ускорения. Исследовано влияние априорной информации на точность оценок.

Приведенные результаты получены при частичной поддержке гранта Минобразования РФ.

Литература

1. Долинин Н.А., Терпугов А.Ф. Статистические методы в оптической локации. – Томск: ТГУ, 1982.
2. Воробьев В.И. Оптическая локация для радиоинженеров. – М.: Радио и связь, 1983.
3. Трифонов А.П., Беспалова М.Б. Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника, 1993, N1.
4. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. – М.: Мир, 1979.
5. Кендал М., Стюарт А. Теория распределения. – М.: Наука, 1966.

Поступила 20 февраля 2001 г.