

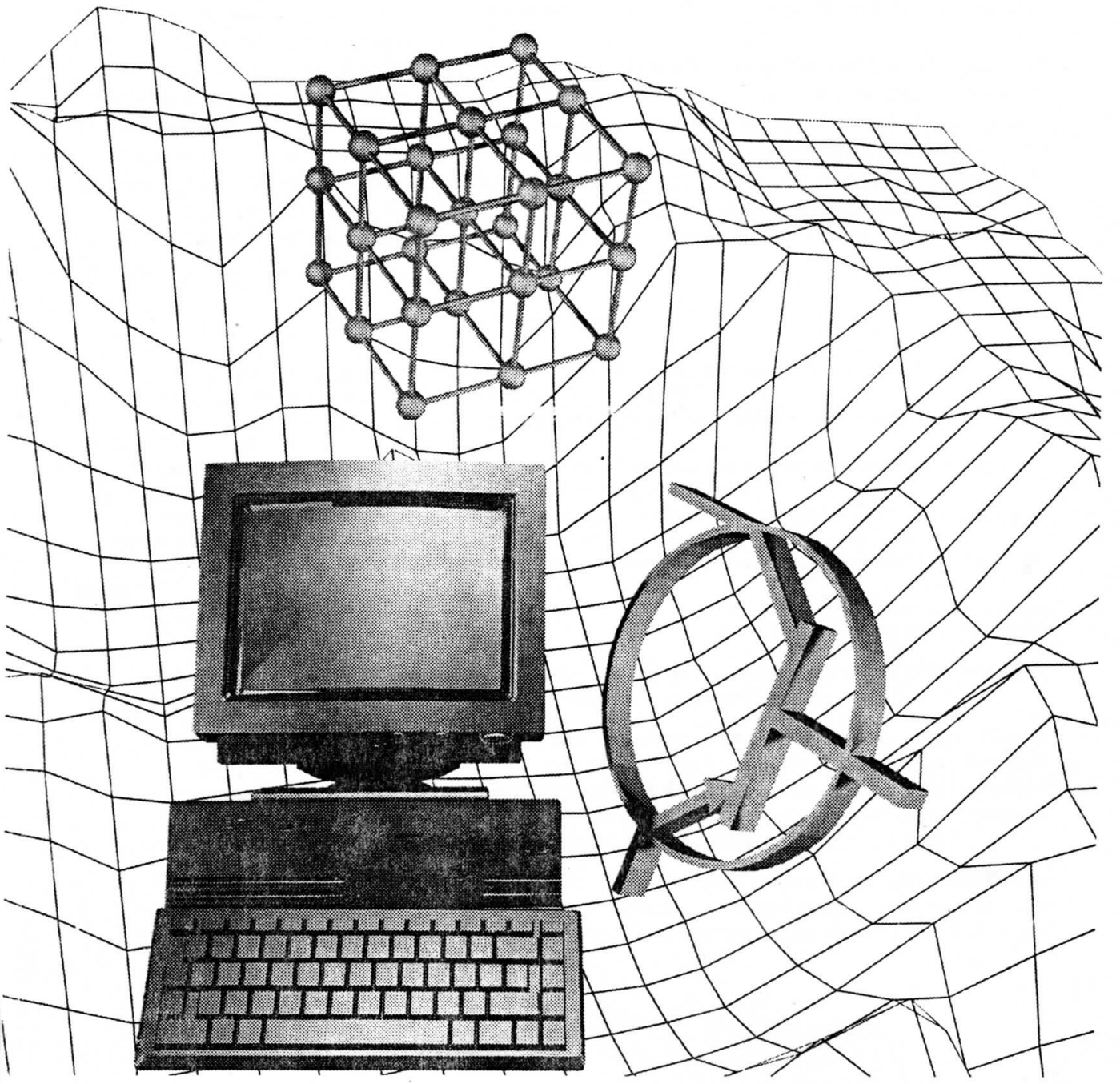
206 п- 4456 / 4
2001

206
ISSN - 1561-5405

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

62

Электроника



4

2001

Предельная точность лазерных импульсных методов измерения дальности и скорости

А.П.Трифонов, М.Б.Беспалова, М.В.Максимов

Воронежский государственный университет

Найдены характеристики совместных оценок максимального правдоподобия дальности и скорости с учетом аномальных ошибок. Определены оптимальные длительность и период повторения лазерных импульсов, гарантирующие минимальные ошибки измерения дальности и скорости.

Как известно [1, 2], лазерные импульсные измерительные системы содержат лазерный излучатель, передающую коллимирующую или неколлимирующую, а также приемную оптические системы, фотодетектор (ФД) и аппаратуру обработки сигнала на выходе ФД, которая реализует некоторый алгоритм оценки дальности и скорости. Поскольку информация о доплеровском сдвиге частоты отраженного лазерного импульса теряется при фотодетектировании, для оценки скорости по изменению дальности необходим зондирующий сигнал, содержащий не менее двух лазерных импульсов [1, 2].

В [1 - 3] рассмотрены совместные оценки максимального правдоподобия (ОМП) дальности и скорости. Точность оценок фактически характеризовалась дисперсиями совместно эффективных оценок. Естественно, возникает вопрос, насколько близки полученные таким образом дисперсии оценок к истинным значениям в зависимости от интенсивности лазерного импульса и протяженности априорных интервалов возможных значений дальности и скорости. Практическая ценность любого алгоритма измерения существенно снижается при малых интенсивностях импульсов и больших априорных интервалах возможных значений дальности и скорости вследствие появления аномальных ошибок и возникновения пороговых эффектов [4 - 6]. Кроме того, использование дисперсий совместно эффективных оценок для описания точности оценок дальности и скорости может привести даже к качественно неверным результатам. Действительно, дисперсии совместно эффективных оценок дальности и скорости стремятся к нулю по мере уменьшения длительности зондирующих лазерных импульсов и по мере увеличения их периода повторения [3]. Тем не менее чрезмерное уменьшение длительности импульсов и увеличение их периода повторения могут привести к снижению точности оценки дальности и скорости вследствие появления пороговых эффектов [4 - 6]. В связи с чем представляет интерес определение таких значений длительности лазерных импульсов и их периодов повторения, которые обеспечивают максимальную точность оценок дальности и скорости.

Положим, что излучается последовательность из N лазерных импульсов с интенсивностью

$$s_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s[t - (k - \gamma)\theta - \lambda] = a \sum_{k=0}^{N-1} f\left[\frac{t - (k - \gamma)\theta - \lambda}{\tau}\right], \quad (1)$$

где $s(t)$ - функция, описывающая интенсивность одного лазерного импульса; λ - временное положение последовательности; θ - период повторения импульсов. Параметр γ определяет точку последовательности, с которой связано ее временное положение λ . Так, при $\gamma = 0$ величина λ представляет собой временное положение первого импульса, при $\gamma = (N-1)/2$ - временное положение середины последовательности (1), а при $\gamma = N-1$ - временное положение последнего импульса последовательности. В (1) также

обозначено $a = \max s(t)$ - максимальная интенсивность, а $\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt [\max s^2(t)]^{-1}$ - эквивалентная длительность лазерного импульса. Функция $f(x) \geq 0$ в (1) описывает форму

интенсивности одного импульса и нормирована так, что $\max f(x) = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 1$.

Положим, аналогично [1, 2], что в результате рассеяния последовательности из N лазерных импульсов объектом, дальность R_0 и скорость V_0 которого надо измерить, на выходе ФД наблюдается реализация пуассоновского потока однофотонных импульсов с интенсивностью

$$a \sum_{k=0}^{N-1} f \left\{ \left[t - 2 \frac{R_0}{c} - (k - \gamma) \theta \left(1 + 2 \frac{V_0}{c} \right) \right] / \tau \right\} + v. \quad (2)$$

Здесь

$$R_0, V_0 \in W, \quad W = \{ [R_{\min}, R_{\max}], [-V_{\max}/2; V_{\max}/2] \}, \quad (3)$$

c - скорость света, причем $V_{\max} \ll c$, а v - постоянная интенсивность оптического фона. Для получения ОМП дальности и скорости необходимо, чтобы лазерный измеритель вырабатывал логарифм функционала отношения правдоподобия $L(R, V)$ [5, 6] для всех возможных значений дальности R и скорости V из априорной области W (3). Полагая, что интервал наблюдения $[0, T]$ достаточно велик, так что $T > N\theta$, $T \gg \tau$, скважность последовательности лазерных импульсов не слишком мала ($\theta/\tau > 2 \dots 3$), и, пренебрегая несущественным слагаемым, можем записать [1, 2, 4]

$$L(R, V) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \ln \left[1 + qf \left\{ \left[t - 2 \frac{R}{c} - (k - \gamma) \theta \left(1 + 2 \frac{V}{c} \right) \right] / \tau \right\} \right] d\pi(t). \quad (4)$$

Здесь $\pi(t)$ - пуассоновский поток однофотонных импульсов с интенсивностью (2); $q = a/v$ - отношение интенсивностей наблюдаемых импульсов и фона (отношение сигнал/фон). Согласно определению [5, 6], ОМП неизвестных дальности $\hat{R}$ и скорости $\hat{V}$ представляет собой положение абсолютного (наибольшего) максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (4):

$$(\hat{R}, \hat{V}) = \arg \sup L(R, V); \quad R, V \in W. \quad (5)$$

Если неизвестные дальность R_0 и скорость V_0 априори распределены равномерно в априорной области возможных значений W (3), то безусловные рассеяния совместных ОМП дальности и скорости (5) запишутся в виде [4]:

$$B(R) = \langle (\hat{R} - R_0)^2 \rangle = D(R)P_0 + (1 - P_0)(R_{\max} - R_{\min})^2/6, \quad (6)$$

$$B(V) = \langle (\hat{V} - V_0)^2 \rangle = D(V)P_0 + (1 - P_0)V_{\max}^2/6. \quad (7)$$

Здесь дисперсии надежных оценок дальности и скорости соответственно определяются выражениями [3]:

$$D(R) = \frac{c^2\tau}{4NaqF} \left(1 + 12 \frac{[\gamma - (N-1)/2]^2}{N^2 - 1} \right), \quad (8)$$

$$D(V) = \frac{3c^2\tau}{\theta^2 N(N^2 - 1)aqF}, \quad (9)$$

а вероятность надежной оценки запишется как [4]

$$P_0 \equiv P_0(\tau, \theta) \approx \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2\beta^2} - \frac{\xi x}{(2\pi)^{3/2}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right] dx. \quad (10)$$

В (8) - (10) обозначено

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{df(x)}{dx} \right]^2 \psi^{-1}(x) dx, \quad \psi(x) = 1 + qf(x), \\ \beta^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \ln^2 \psi(x) dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2 \psi(x) dx \right]^{-1}, \\ \xi &= \frac{2\theta(R_{\max} - R_{\min})V_{\max}\alpha^2}{c^2\tau^2} \sqrt{\frac{N^2 - 1}{3}}, \\ z^2 &= aq\tau N\eta^2, \quad \eta^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \psi(x) dx \right]^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2 \psi(x) dx \right]^{-1}, \\ \alpha^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d \ln \psi(x)}{dx} \right]^2 dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2 \psi(x) dx \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (6), (7) позволяют рассчитать средний квадрат ошибок измерения дальности и скорости соответственно. Введем в рассмотрение относительные рассеяния - средние квадраты относительных ошибок измерения дальности и скорости:

$$b(R) = B(R)/(R_{\max} - R_{\min})^2, \quad b(V) = B(V)/V_{\max}^2. \quad (12)$$

В дальнейшем будем характеризовать точность совместных ОМП дальности и скорости (5) взвешенной суммой относительных рассеяний (12)

$$\rho(\gamma, \tau, \theta) = \kappa_R b(R) + \kappa_V b(V), \quad (13)$$

где $\kappa_R \geq 0$, $\kappa_V \geq 0$, $\kappa_R + \kappa_V = 1$. Веса κ_R и κ_V могут выбираться в зависимости от требований к точности измерения дальности и скорости. Если, например, интерес представляет оценка дальности, а точность оценки скорости не существенна, то следует в (13) принять $\kappa_R \gg \kappa_V$. Если же важна оценка скорости, а точность оценки дальности не играет существенной роли, то следует в (13) принять $\kappa_V \gg \kappa_R$. Наконец, если к относительным

погрешностям измерения дальности и скорости предъявляются одинаковые требования, следует в (13) принять

$$\kappa_R = \kappa_V = 1/2. \quad (14)$$

Рассмотрим возможность оптимизации параметров γ , τ , θ последовательности лазерных импульсов с интенсивностью (1). Полагая, что интерес представляет взвешенная сумма средних квадратов относительных ошибок измерения дальности и скорости (13), оптимальные параметры последовательности лазерных импульсов будем искать из условия

$$\min \rho(\gamma, \tau, \theta). \quad (15)$$

Подставляя (6) - (10) в (13), находим

$$\rho(\gamma, \tau, \theta) = P_0(\tau, \theta) \left[\frac{\kappa_R c^2 \tau}{4NaqF} \left(1 + 12 \frac{[\gamma - (N-1)/2]^2}{N^2 - 1} \right) + \frac{3\kappa_V c^2 \tau}{\theta^2 N(N^2 - 1)aqF} \right] + \frac{1 - P_0(\tau, \theta)}{6}. \quad (16)$$

Очевидно, минимум по γ в (16) достигается при $\gamma = \gamma_{\text{opt}} = (N-1)/2$, т.е. условие (15) выполняется, если временное положение последовательности связано с ее серединой. Тогда

$$\min_{\gamma} \rho(\gamma, \tau, \theta) = \rho(\tau, \theta) = \frac{P_0(\tau, \theta) c^2 \tau}{4NaqF} \left(\kappa_R + \frac{12\kappa_V}{\theta^2(N^2 - 1)} \right) + \frac{1 - P_0(\tau, \theta)}{6}. \quad (17)$$

Согласно (8) - (10), вероятность надежной оценки и дисперсии надежных оценок убывают по мере уменьшения длительности лазерного импульса τ и по мере увеличения периода повторения импульсов θ . Это приводит к тому, что с уменьшением τ и увеличением θ величина первого слагаемого в (17) убывает. Однако одновременно возрастает величина второго слагаемого. Следовательно, должны существовать некоторые значения длительности τ_{opt} и периода повторения θ_{opt} , которые обеспечивают выполнение условия (15). Это условие с учетом (17) переписывается теперь в виде $\min \rho(\tau, \theta) = \rho(\tau_{\text{opt}}, \theta_{\text{opt}}) = \rho_{\text{opt}}$. Таким образом, оптимальные параметры последовательности лазерных импульсов

$$(\tau_{\text{opt}}, \theta_{\text{opt}}) = \arg \min \rho(\tau, \theta). \quad (18)$$

Найти аналитически величины в (18) не удастся вследствие относительно сложной зависимости вероятности надежной оценки (10) от τ и θ . Величины τ_{opt} и θ_{opt} всегда можно найти, используя численные методы. Однако необходимость многократного вычисления интеграла в (10) как функции двух параметров приводит к существенным затратам машинного времени. Несколько упростить процедуру нахождения τ_{opt} и θ_{opt} можно, полагая отношение сигнал/шум $z_N = z/\beta$ (11) настолько большим, что для вероятности аномальных ошибок $P_a = 1 - P_0$ справедлива приближенная формула [4]

$$P_a \approx \frac{\xi z}{[2\pi(1 + \beta^2)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(1 + \beta^2)}\right).$$

Если $P_a \leq 0,05 - 0,1$, то для приближенного расчета взвешенной суммы средних квадратов относительных ошибок измерения дальности и скорости можно использовать упрощенный вариант формулы (17):

$$\rho(\varphi, p) = \frac{\varphi}{4q\mu F} \left[\kappa_R + \frac{12\kappa_V}{p^2(N^2 - 1)} \right] + \frac{p\alpha^2\eta}{3[2\pi\varphi(1 + \beta^2)]^{3/2}} \sqrt{\frac{q\mu(N^2 - 1)}{3}} \exp \left[-\frac{q\mu\varphi\eta^2}{2(1 + \beta^2)} \right], \quad (19)$$

где $\varphi = \tau/T_R$ - нормированная длительность лазерного импульса; $T_R = (R_{\max} - R_{\min})/c$ - время прохождения лазерным импульсом априорного интервала возможных значений дальности; безразмерная величина $\mu = vNT_R$ - среднее число фоновых однофотонных электронов при наблюдении N импульсов длительностью T_R ;

$$p = \frac{\theta V_{\max}}{R_{\max} - R_{\min}} - \quad (20)$$

нормированный период повторения импульсов, который определяется как отношение максимально возможного перемещения объекта за период повторения к длине априорного интервала возможных значений дальности.

Минимизацию взвешенной суммы средних квадратов относительных ошибок измерения дальности и скорости (19) по нормированному периоду повторения (20) можно выполнить аналитически. Действительно, решая уравнение $[\partial \rho(\varphi, p)/\partial p]_{p_m(\varphi)} = 0$, находим

$$p_m(\varphi) = \arg \min_p \rho(\varphi, p) = \left(\frac{6\kappa_V\varphi}{\alpha^2\eta F} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{6\pi\varphi(1 + \beta^2)}{q\mu(N^2 - 1)}} \exp \left[\frac{q\mu\varphi\eta^2}{6(1 + \beta^2)} \right]. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (17), получаем

$$\begin{aligned} \rho_m(\varphi) &= \min_p \rho(\varphi, p) = \rho(\varphi, p_m(\varphi)) = \\ &= \frac{\kappa_R\varphi}{4q\mu F} + \left(1 + \left(\frac{8F}{\kappa_V} \right)^{1/3} \right) \frac{1}{2\pi(1 + \beta^2)} \left(\frac{\kappa_V\alpha^2\eta}{6\varphi F} \right)^{2/3} \exp \left[-\frac{q\mu\varphi\eta^2}{3(1 + \beta^2)} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Решая затем уравнение

$$\left[\frac{\partial \rho_m(\varphi)}{\partial \varphi} \right]_{\varphi_{\text{opt}}} = 0, \quad (23)$$

находим

$$\varphi_{\text{opt}} = \arg \min_{\varphi} \rho_m(\varphi) - \quad (24)$$

оптимальное значение нормированной длительности лазерного импульса. Подставляя (24) в (21), получаем

$$p_{\text{opt}} = p_m(\varphi_{\text{opt}}) - \quad (25)$$

оптимальное значение нормированного периода повторения лазерных импульсов. Наконец, подставляя (24) и (25) в (17), находим

$$\rho_{\text{opt}} = \rho(\varphi_{\text{opt}}, p_{\text{opt}}) = \min \rho(\varphi, p) = \rho_m(\varphi_{\text{opt}}) - \quad (26)$$

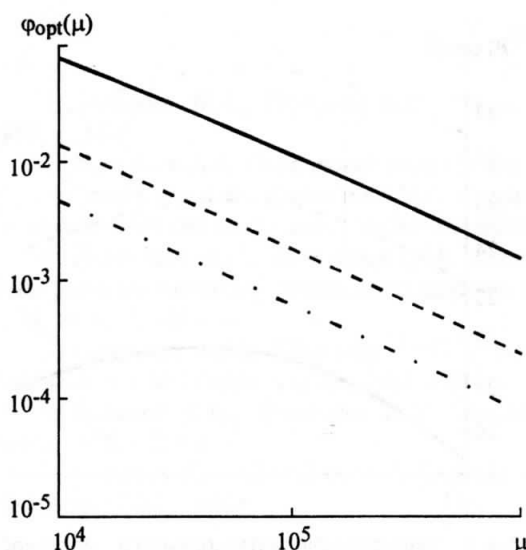


Рис.1. Зависимость оптимальной нормированной длительности лазерного импульса от среднего числа фоновых электронов: $q = 0,1$ (сплошная линия); $q = 1$ (пунктирная линия); $q = 10$ (штрих-пунктирная линия)

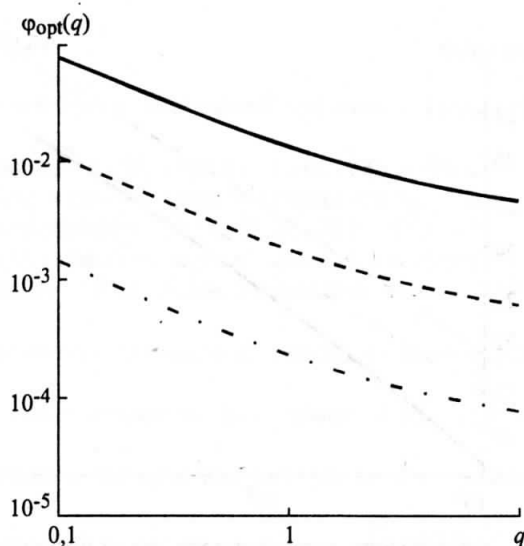


Рис.2. Зависимость оптимальной нормированной длительности лазерного импульса от отношения сигнал/фон: $\mu = 10^4$ (сплошная линия); $\mu = 10^5$ (пунктирная линия); $\mu = 10^6$ (штрих-пунктирная линия)

минимальное значение взвешенной суммы средних квадратов относительных ошибок измерения дальности и скорости, которое характеризует предельную точность измерения дальности и скорости лазерными импульсными методами.

К сожалению, решение уравнения (23) удастся получить только численными методами. Однако нахождение Φ_{opt} , p_{opt} и ρ_{opt} по формулам (22) - (26) требует существенно меньших затрат машинного времени, чем непосредственная минимизация (17) численными методами.

Конкретизируем полученные общие выражения для последовательности лазерных импульсов, форма интенсивности которых описывается кривой Лоренца [7]:

$$f(x) = \left[1 + (\pi x/2)^2 \right]^{-1}.$$

Полагаем, что к относительным погрешностям измерения дальности и скорости предъявляются одинаковые требования (14). На рис.1 представлена зависимость $\Phi_{\text{opt}}(\mu)$ при различных значениях q , а на рис.2 - зависимость $\Phi_{\text{opt}}(q)$ при различных значениях μ . Кривые на рис.1, 2 рассчитаны по формулам (22), (24). Как следует из рис.1, 2, оптимальная нормированная длительность лазерного импульса убывает с ростом μ и q . На рис.3 представлена зависимость $p_{1\text{opt}}(\mu)$ при различных значениях q , а на рис.4 - зависимость $p_{1\text{opt}}(q)$ при различных значениях μ . На рис.3, 4

$p_{1\text{opt}} = p_{\text{opt}} \sqrt{N^2 - 1}$, а p_{opt} - оптимальное значение нормированного периода повторения лазерных импульсов, рассчитанное по формулам (21), (25). Согласно рис.3, оптимальный нормированный период повторения лазерных импульсов возрастает с увеличением μ . В то же время зависимость $p_{1\text{opt}}(q)$, представленная на рис.4, является немонотонной и показывает сравнительно слабое влияние q на величину $p_{1\text{opt}}$.

На рис.5 представлена зависимость $p_{\text{opt}}(\mu)$ при различных значениях q , а на рис.6 - зависимость $p_{\text{opt}}(q)$ при различных значениях μ . Кривые на рис.5, 6 рассчитаны по формулам (22), (26). Как следует из рис.5, 6, минимальное значение взвешенной суммы средних квадратов относительных ошибок измерения дальности и скорости убывает с

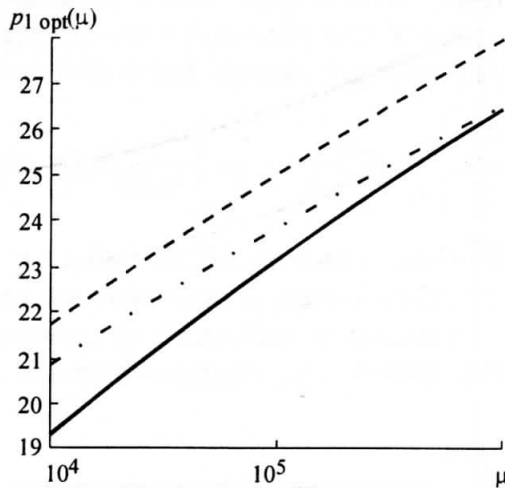


Рис.3. Зависимость оптимального нормированного периода повторения лазерных импульсов от среднего числа фоновых электронов: $q = 0,1$ (сплошная линия); $q = 1$ (пунктирная линия); $q = 10$ (штрих-пунктирная линия)

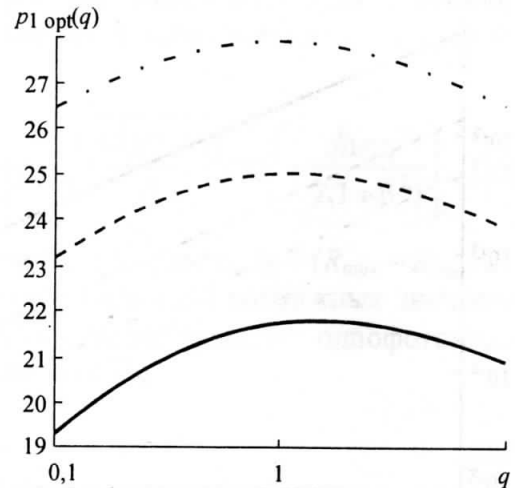


Рис.4. Зависимость оптимального нормированного периода повторения лазерных импульсов от отношения сигнал/фон: $\mu = 10^4$ (сплошная линия); $\mu = 10^5$ (пунктирная линия); $\mu = 10^6$ (штрих-пунктирная линия)

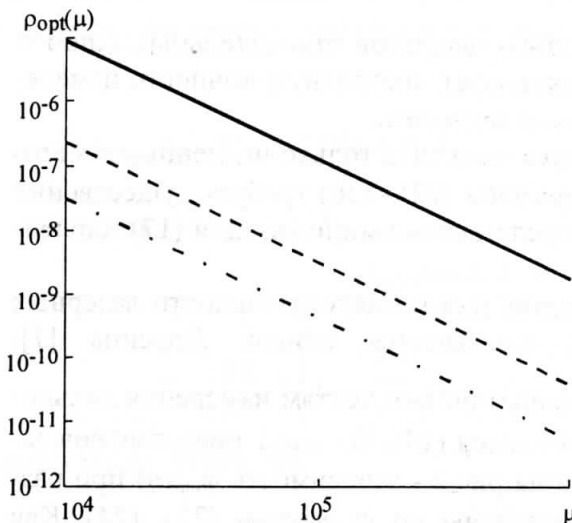


Рис.5. Зависимость минимальной взвешенной суммы средних квадратов относительных ошибок измерения дальности и скорости от среднего числа фоновых электронов: $q = 0,1$ (сплошная линия); $q = 1$ (пунктирная линия); $q = 10$ (штрих-пунктирная линия)

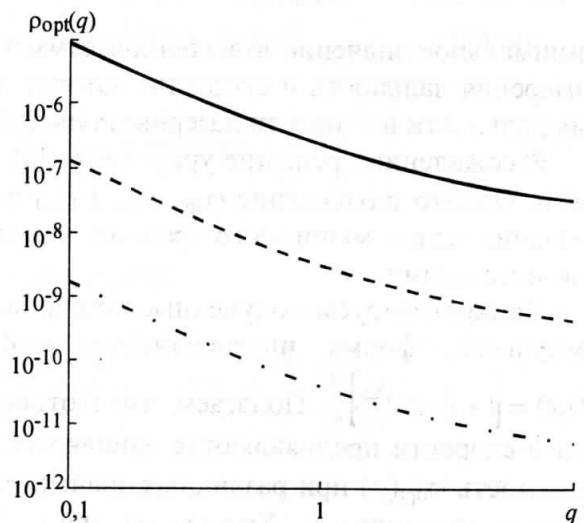


Рис.6. Зависимость минимальной взвешенной суммы средних квадратов относительных ошибок измерения дальности и скорости от отношения сигнал/фон: $\mu = 10^4$ (сплошная линия); $\mu = 10^5$ (пунктирная линия); $\mu = 10^6$ (штрих-пунктирная линия)

увеличением μ и q . Кривые на рис.5, 6 характеризуют предельную точность измерения дальности и скорости лазерными импульсными методами, если для оценки используется алгоритм максимального правдоподобия.

Таким образом, для достижения предельной точности измерения дальности и скорости лазерными импульсными методами при заданных величинах $R_{\max} - R_{\min}$, $V_{\max}$, N , μ и q необходимо использовать зондирующую последовательность лазерных импульсов с оптимальными значениями длительности импульсов $\tau_{\text{opt}} = \varphi_{\text{opt}}(R_{\max} - R_{\min})/c$, периода повторения $\theta_{\text{opt}} = p_{\text{opt}}(R_{\max} - R_{\min})/V_{\max}$ и параметра $\gamma_{\text{opt}} = (N - 1)/2$.

Литература

1. Долинин Н.А., Терпугов А.Ф. Статистические методы в оптической локации. - Томск: ТГУ, 1982. - 256 с.
2. Воробьев В.И. Оптическая локация для радиоинженеров. - М.: Радио и связь, 1983. - 176 с.
3. Трифонов А.П., Беспалова М.Б. Оценка дальности и скорости при зондировании последовательностью оптических импульсов // Известия вузов. Радиоэлектроника. - 1993. - Т. 36, № 1. - С. 17 - 25.
4. Трифонов А.П., Беспалова М.Б. Пороговые характеристики оценок дальности и скорости при зондировании последовательностью оптических импульсов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. - 1995. - Т. 38, № 4. - С. 45 - 57.
5. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. - М.: Радио и связь, 1986. - 264 с.
6. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. - М.: Советское радио, 1978. - 296 с.
7. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. - М.: Наука, 1981. - 640 с.

Статья поступила
10 января 2001 г.

Трифонов Андрей Павлович - профессор, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой радиофизики Воронежского государственного университета. *Область научных интересов:* статистическая радиофизика и радиотехника, разработка и применение статистических методов для получения, передачи и обработки информации.

Беспалова Марина Борисовна - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики Воронежского государственного университета. *Область научных интересов:* статистическая радиофизика и радиотехника, методы статистической обработки оптических и сверхширокополосных сигналов с неизвестными параметрами.

Максимов Максим Владимирович - аспирант кафедры радиофизики физического факультета Воронежского государственного университета, магистр физики. *Область научных интересов:* статистическая обработка сигналов, лазерная связь и локация.