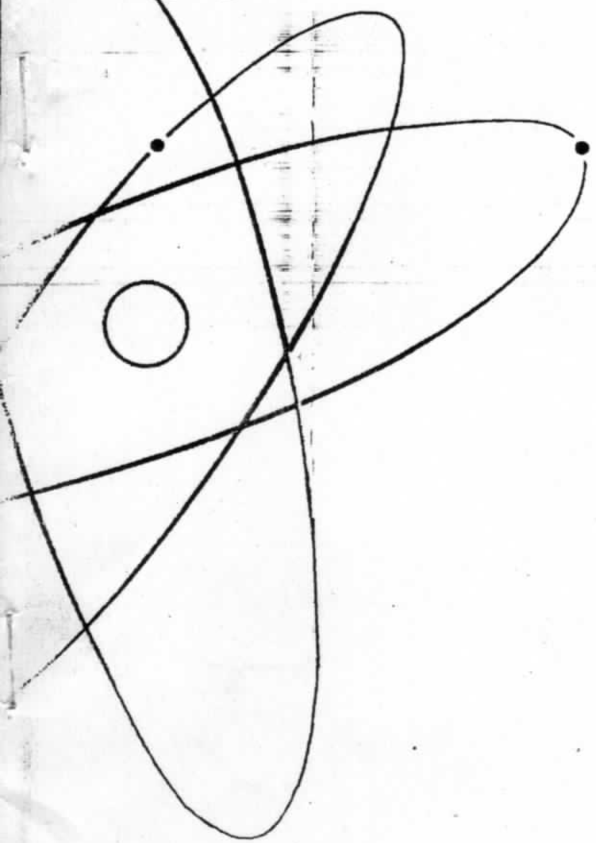
Уважаемому
Андрею Павловичу
от одного из авторов статьи
имеющейся [illegible]
Авдеев В.Б. 13.12.01г.

ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА



ТОМ 44

11-12
ноябрь-декабрь

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2001

УДК 621.391

ТРИФОНОВ А. П., ПАРФЕНОВ В. И.

ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНОГО РАДИОСИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ*

Выполнен синтез и анализ алгоритма оценки длительности гауссовского радиосигнала,наблюдаемого на фоне внутренней и внешней помех. Приведены результаты статистического моделирования синтезированного алгоритма

В [1] рассмотрена оценка длительности случайного радиоимпульса с априори известной центральной частотой и неизвестной интенсивностью, наблюдаемого на фоне собственного шума приемного устройства и внешней широкополосной (по сравнению с сигналом) помехи с неизвестными интенсивностями. Однако при практической реализации алгоритмов обработки случайных радиосигналов в радиоэлектронных системах центральная частота спектра мощности сигнала часто бывает известна неточно. Поэтому рассмотрим возможность оценки длительности случайного радиосигнала с априори неизвестной центральной частотой.

Аналогично [1] полагаем, что на интервале времени $[0, T]$ наблюдается реализация случайного процесса

$$x(t) = s(t, \tau_0) + n(t) + \nu(t), \tag{1}$$

где полезный сигнал $s(t, \tau_0) = \xi(t)\, I[(t - \tau_0/2)/\tau_0]$ — отрезок длительности τ_0 узкополосного центрированного гауссовского процесса $\xi(t)$ со спектром мощности [2]

$$G_\xi(\omega) = \gamma_0 \{I[(\theta_{s0} - \omega)/\Omega_s] + I[(\theta_{s0} + \omega)/\Omega_s]\}/2, \tag{2}$$

$I(x) = 1$ при $|x| \le 1/2$ и $I(x) = 0$ при $|x| > 1/2$; θ_{s0} и Ω_s — центральная частота и ширина полосы частот процесса $\xi(t)$. В (1) $n(t)$ — гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0, а $\nu(t)$ — внешняя помеха, кото-

---

* Приведенные результаты получены при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

рую аппроксимируем стационарным центрированным гауссовским случайным процессом со спектром мощности [2, 3]

$$G_N(\omega) = \Gamma_0 \{ I[(\theta_N - \omega)/\Omega_N] + I[(\theta_N + \omega)/\Omega_N] \} /2. \tag{3}$$

Интенсивности сигнала γ_0 и помехи Γ_0 в общем случае неизвестны. Неизвестная центральная частота θ_s спектра мощности сигнала принимает значения из априорного интервала $[\Gamma_1, \Gamma_2]$, а неизвестная длительность τ — из априорного интервала $[T_1, T_2]$. При этом предполагается, что спектр мощности внешней помехи (3) полностью перекрывает спектр мощности сигнала (2), т. е. выполняются условия $\Gamma_2 + \Omega_s/2 \le \theta_N + \Omega_N/2$, $\Gamma_1 - \Omega_s/2 \ge \theta_N - \Omega_N/2$. Кроме того, предполагается, что случайный импульс $s(t, \tau_0)$ всегда находится внутри интервала наблюдения, так что $0 < T_1 < T_2 \le T$. Случайные процессы $s(t, \tau_0)$, $n(t)$ и $\nu(t)$ статистически независимы. Также как в [1], полагаем, что наименьшее возможное значение длительности сигнала T_1 существенно превосходит время корреляции процесса $\xi(t)$, т. е.

$$\mu_{\min} = \Omega_s T_1 / 2\pi >> 1. \tag{4}$$

Рассмотрим, как влияет априорное незнание центральной частоты сигнала θ_{s0} на точность оценки длительности, синтезированной в [1]

$$\tau_q = \arg\sup_{\tau} M(\tau, \theta_s^*),\ \tau \in [T_1, T_2], \tag{5}$$

где

$$M(\tau, \theta_s^*) = \frac{\tau\,\Omega_s}{2\pi} \ln \frac{A(\tau, \theta_s^*) - 1}{kT/\tau - 1} - \frac{T\,\Omega_N}{2\pi} \ln \frac{1 - 1/A(\tau, \theta_s^*)}{1 - \tau/kT}, \tag{6}$$

$$A(\tau, \theta_s^*) = Y_N / Y_s(\tau, \theta_s^*),\ k = \Omega_N/\Omega_s,\ Y_N = \int_0^T y_N^2(t)\,dt, \tag{7}$$

$Y_s(\tau, \theta_s^*) = \int_0^{\tau} y_s^2(t, \theta_s^*)\,dt$; $y_N(t)$ и $y_s(t, \theta_s^*)$ — отклики фильтров с передаточными функциями $H_N(\omega)$ и $H_s(\omega, \theta_s^*)$ соответственно на реализацию наблюдаемых данных (1). При этом

$$|H_N(\omega)|^2 = I[(\theta_N - \omega)/\Omega_N] + I[(\theta_N + \omega)/\Omega_N],$$

$$|H_s(\omega, \theta_s^*)|^2 = I[(\theta_s^* - \omega)/\Omega_s] + I[(\theta_s^* + \omega)/\Omega_s].$$

В (5) θ_s^* — ожидаемое (прогнозируемое) значение центральной частоты случайного сигнала. Если центральная частота сигнала априори известна и $\theta_s^* = \widetilde{\theta}_{s0}$, то $\tau_q = \tau_m$, где τ_m — оценка максимального правдоподобия (ОМП) [1]. Поскольку в общем случае $\theta_s^* \neq \theta_{s0}$, выражение (5), в отличие от [1], определяет квазиправдоподобную оценку (КПО) длительности сигнала. Отметим, что структура алгоритма оценки (5) инвариантна к значениям интенсивностей сигнала γ_0 и помехи Γ_0, а также к значению спектральной плотности белого шума N_0.

Для определения характеристик КПО (5) исследуем поведение функционала $M(\tau, \theta_s^*)$ (6) при выполнении (4). С этой целью представим числитель и знаменатель функции $A(\tau, \theta_s^*)$ (7) в виде сумм сигнальных и шумовых функций [4]. Затем, аналогично [1], разложим (6) в ряд по малому параметру $1/\mu_{\min}$ и ограничимся первым ненулевым членом разложения, зависящим от реализации наблюдаемых данных (1). В результате функционал (6) может быть представлен в виде суммы $M(\tau, \theta_s^*) = S(\tau, \theta_s^*) + N(\tau, \theta_s^*)$ сигнальной $S(\tau, \theta_s^*) = \langle M(\tau, \theta_s^*) \rangle$ и шумовой $N(\tau, \theta_s^*) = M(\tau, \theta_s^*) - \langle M(\tau, \theta_s^*) \rangle$ функций. Угловые скобки означают усреднение по реализациям наблюдаемых данных [4] и

$$S(\tau, \theta_s^*) = \frac{\tau\Omega_s}{2\pi} \ln\left(\frac{\tau\Omega_s}{T\Omega_N - \tau\Omega_s} \cdot \frac{\langle Y_N \rangle - \langle Y_s(\tau, \theta_s^*) \rangle}{\langle Y_s(\tau, \theta_s^*) \rangle} \right) -$$

$$- \frac{T\Omega_N}{2\pi} \ln\left(\frac{T\Omega_N}{T\Omega_N - \tau\Omega_s} \cdot \frac{\langle Y_N \rangle - \langle Y_s(\tau, \theta_s^*) \rangle}{\langle Y_N \rangle} \right), \qquad (8)$$

$$N(\tau, \theta_s^*) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\tau\Omega_s}{\langle Y_s(\tau, \theta_s^*) \rangle} - \frac{T\Omega_n}{\langle Y_N \rangle} \right\} \frac{Y_N \langle Y_s(\tau, \theta_s^*) \rangle - \langle Y_N \rangle Y_s(\tau, \theta_s^*)}{\langle Y_N \rangle - \langle Y_s(\tau, \theta_s^*) \rangle}. \qquad (9)$$

Согласно (9) при $\mu_{\min} \to \infty$ распределение функционала (6) сходится к гауссовскому [2].

В условиях высокой апостериорной точности характеристики оценки (5) определяются поведением функционала (6) в малой окрестности точки τ_0. Соответственно при $|\tau - \tau_0|/\tau_0 \to 0$ для сигнальной функции (8) и корреляционной функции шумовой функции (9) справедливы асимптотические представления

$$S(\tau, \theta_s^*) = S_0(\delta\theta^*) + [a_1(\delta\theta^*) + a_2(\delta\theta^*)]\min(\tau, \tau_0) - a_2(\delta\theta^*)\,\tau, \tag{10}$$

$$K_N(\tau_1, \tau_2, \theta_s^*) = \langle N(\tau_1, \theta_s^*)\,N(\tau_2, \theta_s^*)\rangle = K_0(\delta\theta^*) + k_1(\delta\theta^*)\min(\tau_1, \tau_2, \tau_0) +$$

$$+\,\widetilde{k}_3(\delta\theta^*)\max(\tau_1, \tau_2, \tau_0) + k_2(\delta\theta^*)[\max(\tau_1, \tau_2) - \max(\tau_1, \tau_2, \tau_0)] +$$

$$+\,k_4(\delta\theta^*)[\min(\tau_1, \tau_2) - \min(\tau_1, \tau_2, \tau_0)],$$

где

$$S_0(\delta\theta^*) = \mu_0\left\{\frac{d - \varepsilon c}{d - c} - \varepsilon\ln\frac{\varepsilon(d - c)}{d(\varepsilon - 1)}\right\},$$

$$a_1(\delta\theta^*) = \frac{\Omega_s}{2\pi}\left\{\ln\frac{d - c}{c(\varepsilon - 1)} - \frac{d - \varepsilon c}{d - c}\right\},$$

$$a_2(\delta\theta^*) = \frac{\Omega_s}{2\pi}\left\{\frac{(1 + Q_0)(d - \varepsilon c)}{c(d - c)} - \ln\frac{d - c}{c(\varepsilon - 1)}\right\},$$

$$K_0(\delta\theta^*) = \mu_0\frac{(d - \varepsilon c)^2(a c^2 - 2bcd + bd^2)}{c^2 d^2 (d - c)^2} - \tau_0[k_1(\delta\theta^*) + k_3(\delta\theta^*)],$$

$$k_1(\delta\theta^*) = \frac{\Omega_s}{2\pi}\frac{(d - \varepsilon c)^2(a c^2 - 2bcd + bd^2)}{d c^2 (d - c)^3},$$

$$k_2(\delta\theta^*) = k_1(\delta\theta^*) - d_1(\delta\theta^*),\; d_1(\delta\theta^*) = \frac{\Omega_s}{2\pi}\cdot\frac{b(d - \varepsilon c)^2}{c^2(d - c)^2},$$

$$k_4(\delta\theta^*) = \frac{\Omega_s}{2\pi}\cdot\frac{d - \varepsilon c}{d^2 c^3 (d - c)^3}\;\{(a c^2 - 2bcd + bd^2)[q_0 c(d - c) -$$

$$-\,(1 + Q_0)(d - \varepsilon c)(d - 2c)] + c(d - c)(d - \varepsilon c)(1 + Q_0)\,\times$$

$$\times\,[ac - bd + d(d - c)(1 + Q_0)]\}, \tag{11}$$

$$k_3(\delta\theta_*) = k_4(\delta\theta^*) - d_2(\delta\theta^*),\; d_2(\delta\theta^*) = \frac{\Omega_s}{2\pi}\cdot\frac{(1 + Q_0)^2(d - \varepsilon c)^2}{c^2(d - c)^2},$$

$$a = (1 + q_0 + Q_0)^2 + (\varepsilon - 1)(1 + Q_0)^2,\; c = 1 + q_0 + Q_0 - q_0|\delta\theta^*|,$$

$$b = (1 + q_0 + Q_0)^2 - |\,\delta\,\theta^*\,|\,[q_0^2 + 2\,q_0\,(1 + Q_0)\,],\ \ d = q_0 + \varepsilon\,(1 + Q_0),$$

$$\mu_0 = \Omega_s\,\tau_0 / 2\,\pi,\ \varepsilon = T\,\Omega_N / \tau_0\,\Omega_s,\ q_0 = \gamma_0 / N_0,\ Q_0 = \Gamma_0 / N_0,\ \delta\,\theta^* = (\theta_s^* - \theta_{s0}) / \Omega_s.$$

Из (10) следует, что сигнальная функция $S\,(\tau, \theta_s^*)$ достигает наибольшего максимума при $\tau = \tau_0$, если выполняется условие

$$a_2\,(\delta\,\theta^*) > 0. \qquad (12)$$

В свою очередь, последнее условие выполняется, если $|\,\delta\,\theta^*\,| < 0.833$. Введем в рассмотрение выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) [4]

$$z^2 = \mu_0 \left\{ \ln \frac{d - c}{c\,(\varepsilon - 1)} - \frac{d - \varepsilon\,c}{d - c} \right\}^2 \frac{c^2\,d^2\,(d - c)^2}{(d - \varepsilon\,c)^2\,(a\,c^2 - 2\,b\,c\,d + b\,d^2)}. \qquad (13)$$

Если $z^2 >> 1$ и выполняются условия (4), (12), которые обеспечивают высокую апостериорную точность КПО (5), положение наибольшего максимума функционала $M\,(\tau, \theta_s^*)$ (6) лежит в малой окрестности точки τ_0. При этом КПО τ_q сходится к τ_0 в среднеквадратическом, если $z \to \infty$. В соответствии с теоремой Дуба [5] случайный процесс $M\,(\tau, \theta_s^*)$ в малой окрестности точки τ_0 является гауссовским марковским процессом диффузионного типа с коэффициентами сноса K_1 и диффузии K_2

$$K_1 = \begin{cases} a_1\,(\delta\,\theta^*),\ \tau < \tau_0, \\ -a_2\,(\delta\,\theta^*),\ \tau > \tau_0, \end{cases} \quad K_2 = \begin{cases} d_1\,(\delta\,\theta^*),\ \tau < \tau_0, \\ d_2\,(\delta\,\theta^*),\ \tau > \tau_0. \end{cases} \qquad (14)$$

Характеристики оценки длительности можно найти, используя метод локально-марковской аппроксимации [6]. Решая уравнение Фоккера-ПланкаКолмогорова [2] с коэффициентами (14) и соответствующими начальными и граничными условиями, аналогично [6], находим выражения для смещения (систематической ошибки) и рассеяния (среднего квадрата ошибки) оценки τ_q:

$$\widetilde{d}\,(\tau_q) = < \tau_q - \tau_0 > \simeq \frac{z_1^2\,(1 + 2\,R) - z_2^2\,R\,(2 + R)}{2\,z_1^2\,z_2^2\,(1 + R)^2},$$

$$\widetilde{V}\,(\tau_q) = < (\tau_q - \tau_0)^2 > \simeq \frac{z_1^4\,(2 + 6\,R + 5\,R^2) + z_2^4\,R\,(5 + 6\,R + 2\,R^2)}{2\,z_1^4\,z_2^4\,(1 + R)^3}, \qquad (15)$$

$$z_1^2 = a_1^2\,(\delta\,\theta^*)\,/\,d_1\,(\delta\,\theta_*),\; z_2^2 = a_2^2\,(\delta\,\theta^*)\,/\,d_2\,(\delta\,\theta^*),$$

$$R = a_2\,(\delta\,\theta^*)\,d_1\,(\delta\,\theta^*)\,[a_1\,(\delta\,\theta^*)\,d^2\,(\delta\,\theta^*)\,]^{-1}.$$

Полагая в (15) $\theta_s^* = \theta_{s0}$ $(\delta\,\theta^* = 0)$, получаем, как частный случай, выражения для смещения и рассеяния ОМП длительности случайного радиосигнала при априори известной центральной частоте спектра мощности θ_{s0} [1].

При конечном интервале возможных значений параметра $\tau \in [T_1, T_2\,]$ рассеяние оценки длительности должно быть ограничено сверху. В то же время асимптотическое значение рассеяния (15) с уменьшением q_0 неограниченно возрастает. Уточним поведение $\widetilde{V}\,(\tau_q)$ в области малых q_0. С этой целью разложим функционал $M\,(\tau, \theta_s^*)$ (6) в двумерный ряд Маклорена по малым параметрам $1\,/\,\mu_0$ и q_0. Удерживая члены второго порядка малости и затем устремляя $q_0 \to 0$, получаем $M\,(\tau, \theta_s^*) \simeq \nu^2\,(\tau)\,/\,2$, где $\nu\,(\tau)$ — асимптотически гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием $< \nu\,(\tau) > = 1\,/\,2$ и корреляционной функцией

$$< [\nu\,(\tau_1) - < \nu\,(\tau_1) >\,]\,[\nu\,(\tau_2) - < \nu\,(\tau_2) >\,] > = \min\,(\tau_1, \tau_2)\,[k\,T - \max\,(\tau_1, \tau_2)\,] \times$$
$$\times\,\{2\max\,(\tau_1, \tau_2)\,[k\,T - \min\,(\tau_1, \tau_2)\,]\}^{-1}.$$

Сделаем замену переменной $\widetilde{t} = \ln\,[\tau\,/\,(k\,T - \tau)\,]$. Тогда процесс $M\,(\widetilde{t})$ при $\widetilde{t} \in [\xi_1, \xi_2\,]$, $\xi_i = \ln\,[T_i\,/\,(k\,T - T_i)\,]$, $i = 1, 2$, является стационарным процессом с корреляционной функцией $K_M\,(\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2) = \exp\,(-\,|\,\widetilde{t}_1 - \widetilde{t}_2\,|\,)\,/\,2$ и плотностью вероятности $W\,(M) = \exp\,(-M)\,/\,\sqrt{\pi\,M}$, $M > 0$. Из стационарности процесса $M\,(\widetilde{t})$ следует, что плотность распределения вероятности положения его наибольшего максимума $\widetilde{\tau}_q = \arg\sup\limits_{t} M\,(\widetilde{t})$, $\widetilde{t} \in [\xi_1, \xi_2\,]$ постоянна в интервале $[\xi_1, \xi_2\,]$ [2].

Следовательно,

$$W\,(\widetilde{\tau}_q) = \begin{cases} (\xi_2 - \xi_1)^{-1}, & \xi_1 \le \widetilde{\tau}_q \le \xi_2, \\ 0, & \widetilde{\tau}_q < \xi_1,\ \widetilde{\tau}_q > \xi_2, \end{cases} \tag{16}$$

Возвращаясь в (16) от $\widetilde{\tau}_q$ к переменной τ_q, находим плотность вероятности положения наибольшего максимума функционала $M\,(\tau, \theta_s^*)$:

$$W(\tau_q) = k\,T \left\{ \tau_q\,(k\,T - \tau_q) \ln \frac{T_2\,(k\,T - T_1)}{T_1\,(k\,T - T_2)} \right\}^{-1}, \quad T_1 \le \tau_q \le T_2.$$

Следовательно, рассеяние оценки длительности (5) с учетом априорных ограничений можно записать как

$$V(\tau_q) = \min\left\{\widetilde{V}(\tau_q),\, V_0\right\}, \tag{17}$$

где

$$V_0 = \int_{T_1}^{T_2} (\tau - \tau_0)^2\, W(\tau)\, d\tau = k\,T \left\{ T_1 - T_2 + \tau_0^2 \ln(T_2 / T_1) / k\,T + \right.$$

$$\left. + \frac{(k\,T - \tau_0)^2}{k\,T} \ln \frac{k\,T - T_1}{k\,T - T_2} \right\} \ln^{-1} \frac{T_2\,(k\,T - T_1)}{T_1\,(k\,T - T_2)}. \tag{18}$$

Рассмотрим влияние отклонения величины θ_s^* от θ_{s0} на точность КПО (5). На рис.1 нанесены зависимости отношения $\chi = V(\tau_q) / V(\tau_m)$ от величины $\delta\,\theta^*$, построенные по формулам (15), (17), (18) при

$$k = 3,\ T_1 / T_2 = 0{,}25,\ T / T_2 = 1,\ \tau_0 / T_2 = 1 / 2.$$

Здесь $V(\tau_m) = V(\tau_q)\,|_{\delta\,\theta^* = 0}$ — рассеяние ОМП длительности радиосигнала с априори точно известной центральной частотой [1]. Кривая *1* рассчитана для $q_0 = 1$, $Q_0 = 0{,}5$; *2* — $q_0 = 1$, $Q_0 = 0$; *3* — $q_0 = 3$, $Q_0 = 0{,}5$. Из рис.1 следует, что с ростом величины $|\,\delta\,\theta^*\,|$ точность КПО τ_q может существенно ухудшаться, причем с увеличением q_0 и уменьшением Q_0 точность КПО оказывается более критичной к выбору значений θ_s^*.

Повысить точность оценки длительности случайного импульса с неизвестной центральной частотой спектра мощности можно, используя устройство, реализующее адаптацию по неизвестной частоте сигнала. Для этого надо в (5) заменить ожидаемое значение частоты θ_s^* на ОМП неизвестной частоты, что равносильно максимизации функционала (6) по значениям неизвестной частоты радиосигнала θ_s [4]. Тогда совместная ОМП длительности запишется как

$$\hat{\tau} = \arg\sup_{\tau} \left[\sup_{\theta_s} M(\tau, \theta_s) \right],\ \tau \in [T_1, T_2],\ \theta_s \in [\Gamma_1, \Gamma_2]. \tag{19}$$

Отметим, что для аппаратурной реализации этого алгоритма требуется приемник, многоканальный по неизвестному параметру θ_s. В каждом из каналов этого приемника, аналогично [1], формируется функционал (6) для соответствующего значения параметра $\theta_s \in [\Gamma_1, \Gamma_2]$.

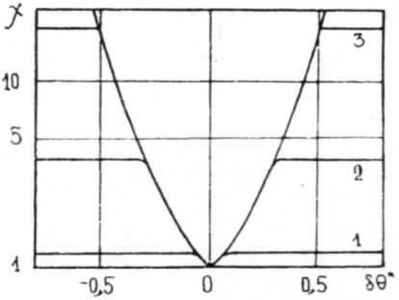


Рис. 1

Определим характеристики совместной ОМП длительности (19). Представим функционал $M(\tau, \theta_s)$ в виде суммы

$$M(\tau, \theta_s) = S(\tau, \theta_s) + N(\tau, \theta_s) \tag{20}$$

сигнальной

$$S(\tau, \theta_s) = < M(\tau, \theta_s) >$$

и шумовой

$$N(\tau, \theta_s) = M(\tau, \theta_s) - < M(\tau, \theta_d) >$$

функций. Обозначим $\delta = \max\left\{|\tau - \tau_0| / \tau_0, |\theta_s - \theta_{s0}| / \Omega_s\right\}$. Как и ранее, учтем, что в условиях высокой апостериорной точности характеристики оценки (19) определяются поведением функционала $M(\tau, \theta_s)$ в малой окрестности точки (τ_0, θ_{s0}). Полагая $\delta \to 0$, для сигнальной и корреляционной функций шумовой функции в (20) находим асимптотические выражения

$$S(\tau, \theta_s) \simeq S_t(\tau) + S_f(\theta_s), \tag{21}$$

$$K_N(\tau_1, \tau_2, \theta_{s1}, \theta_{s2}) = \langle N(\tau_1, \theta_{s1}) N(\tau_2, \theta_{s2}) \rangle \simeq K_t(\tau_1, \tau_2) + K_f(\theta_{s1}, \theta_{s2}), \tag{22}$$

где обозначено

$$S_t(\tau) = S(\tau, \theta_s^* = \theta_{s0}), \tag{23}$$

$$K_t(\tau_1, \tau_2) = K_N(\tau_1, \tau_2, \theta_s^* = \theta_{s0}).$$

Здесь функции $S(\tau, \theta_s^*)$ и $K_V(\tau_1, \tau_2, \theta_s^*)$ определяются из (10), (11), а

$$S_f(\theta_s) = -\mu_0\, b_1\, |\, \theta_s - \theta_{s0}\, |\, /\, \Omega_s, \tag{24}$$

$$K_f(\theta_{s1}, \theta_{s2}) = \mu_0 \frac{q_0^2\, \varepsilon\, (\varepsilon - 1)}{[q_0 + \varepsilon\, (1 + Q_0)\,]^2} +$$

$$+ b_2 \{|\, \theta_{s1} - \theta_{s2}\,| + 2\, [\min(\theta_{s1}, \theta_{s2}, \theta_{s0}) - \max(\theta_{s1}, \theta_{s2}, \theta_{s0})\,]\,\},$$

$$b_1 = \frac{q_0^2}{(1 + Q_0)\,(1 + q_0 + Q_0)},$$

$$b_2 = \frac{\tau_0\, \varepsilon\, q_0^2}{2\,\pi\, [q_0 + \varepsilon\, (1 + Q_0)\,]^2} \left\{\varepsilon + \frac{(1 + q_0 + Q_0)^2 + (\varepsilon - 1)\,(1 + Q_0)^2}{(1 + Q_0)\,(1 + q_0 + Q_0)}\right\}.$$

Согласно (9) при $\mu_{\min} \to \infty$ распределение функционала (20) сходится к гауссовскому [2]. Учитывая (21), (22), представим этот функционал в виде

$$M(\tau, \theta_s) = M_t(\tau) + M_f(\theta_s). \tag{25}$$

Здесь $M_t(\tau)$ и $M_f(\theta_s)$ — статистически независимые гауссовские процессы с математическими ожиданиями $S_t(\tau)$ (23) и $S_f(\theta_s)$ (24) и корреляционными функциями $K_t(\tau_1, \tau_2)$ и $K_f(\theta_{s1}, \theta_{s2})$ соответственно. Подставляя (25) в (19), для совместной ОМП длительности находим

$$\hat{\tau} = \arg\sup \left\{\sup_{\theta_s} [M_t(\tau) + M_f(\theta_s)\,]\right\} =$$

$$= \arg\sup_{\tau} \left[M_t(\tau) + \sup_{\theta_s} M_f(\theta_s)\right] = \arg\sup_{\tau} M_t(\tau)$$

Сопоставляя (23) и (10), нетрудно заметить, что статистические характеристики процессов $M_t(\tau)$ и $M(\tau, \theta_s^* = \theta_{s0})$ совпадают. Следовательно, характеристики совместной ОМП $\hat{\tau}$ в условиях высокой апостериорной точности оценки асимптотически совпадают с характеристиками ОМП, найденными в [1]. С учетом этого, выражения для смещения и рассеяния совместной ОМП длительности случайного радиосигнала можно получить из соответствующих выражений (15) для характеристик КПО длительности, положив в них

$\delta\,\theta^* = 0$. Таким образом, $\tilde{d}(\hat{\tau}) = \tilde{d}(\tau_q)\,|_{\delta\,\theta^* = 0}$, $\tilde{V}(\hat{\tau}) = \tilde{V}(\tau_q)\,|_{\delta\,\theta^* = 0}$, где $\tilde{d}(\tau_q)$ и $\tilde{V}(\tau_q)$ определены в (15). Учитывая, как и ранее, ограниченность интервала изменения неизвестной длительности, получаем окончательное выражение для рассеяния ОМП $\hat{\tau}$ (19) в виде

$$V(\hat{\tau}) = \min\,\{\tilde{V}(\hat{\tau}),\, V_0\}, \tag{26}$$

где V_0 определено в (18).

Таким образом, величина χ, зависимость которой от $\delta\,\theta^*$ показана на рис. 1, является также отношением рассеяния КПО (5) к рассеянию совместной ОМП (19). Следовательно, зависимость $\chi\,(\delta\,\theta^*)$ характеризует также выигрыш в точности совместной ОМП (19) по сравнению с КПО (5) при неизвестной центральной частоте спектра мощности. Как следует из рис. 1, этот выигрыш возрастает с увеличением $|\,\delta\,\theta^*\,|$, q_0 и уменьшением Q_0.

Формулы (15), (18), (26) для рассеяния совместной ОМП (19) являются лишь асимптотически точными с ростом μ_0 и z. С целью определения границ применимости найденных формул для характеристик оценки и с целью проверки работоспособности алгоритма оценки (19) было выполнено статистическое моделирование алгоритма (19) на ЭВМ. В процессе моделирования формировались отсчеты случайного поля $\tilde{M}(\tilde{\tau}, \tilde{\theta}_s) = M(\tilde{\tau}\,T_2, \tilde{\theta}_s\,\Omega_s)$, где $\hat{\tau} = \tau\,/\,T_2$ и $\tilde{\theta}_s = \theta_s\,/\,\Omega_s$. Априорные интервалы возможных значений параметров $\tilde{\tau}$ и $\tilde{\theta}_s$ при моделировании определялись условиями

$$\tilde{\tau} \in [0{,}25;\ 1\,],\ \tilde{\theta}_s \in [k_s - 1;\ k_s + 1\,],\ k_s = \theta_{s0}\,/\,\Omega_s = 50,$$

что соответствует значениям $T_1\,/\,T_2 = 0{,}25$, $T\,/\,T_2 = 1$, $\mu_{\min} = 25$. Кроме того, полагалось $\tilde{\tau}_0 = \tau_0\,/\,T_2 = 1\,/\,2$, $k = \Omega_N\,/\,\Omega_s = 3$, $\mu_0 = 50$. В процессе моделирования при формировании отсчетов процессов $\tilde{y}_N(\tilde{t}) = y_N(\tilde{t}\,T_2)$ и $\tilde{y}_s(\tilde{t}, \tilde{\theta}_s) = y_s(\tilde{t}\,T_2, \tilde{\theta}_s\,\Omega_s)$, где $\tilde{t} = t\,/\,T_2$, соответствующие интегралы представлялись в дискретной форме через отсчеты входного процесса (1). При этом отсчеты процессов $\tilde{y}_N(\tilde{t})$ и $\tilde{y}_s(\tilde{t}, \tilde{\theta}_s)$ формировались с шагом $\Delta\,\tilde{t} = 5 \cdot 10^{-4}$, что обеспечивало относительную среднеквадратическую ошибку аппроксимации этих процессов ступенчатыми функциями не более 15%. Шаг дискретизации по нормированной центральной частоте $\tilde{\theta}_s$ и шаг по нормированной длительности $\tilde{\tau}$ выбирались равными $\Delta\,\tilde{\theta}_s = 0{,}04$ и $\Delta\,\tilde{\tau} = 0{,}01$ соответственно, что обеспечивало относительную среднеквадратическую ошибку аппроксимации функционала $\widetilde{M}(\tilde{\tau}, \tilde{\theta}_s)$ ступенчатыми функциями не более 20%. Выбор шага дискретизации по частоте $\Delta\tilde{\theta}_s = 0,04$ приводит к использованию 50 параллельных каналов по частоте при многоканальной реализации алгоритма совместной оценки (19). Оценка $\hat{\tau}_i$ нормированной длительности $\tilde{\tau}$ находилась как положение наибольшего максимума i-й реализации статистики $\widetilde{M}(\tilde{\tau}, \tilde{\theta}_s)$. Далее по $N = 500$ реализациям статистики $\widetilde{M}(\tilde{\tau}, \tilde{\theta}_s)$ определялось выборочное нормированное рассеяние оценки $\sum_{i=1}^{N}(\hat{\tau}_i - \tilde{\tau}_0)^2 / N$ для каждого значения q_0 и Q_0.

Вместе с алгоритмом совместной оценки длительности (19) моделировался также алгоритм оценки длительности при априори известной центральной частоте $\tau_m = \arg\sup_{\tau} M(\tau, \theta_s^* = \theta_{s0}), \tau \in [T_1, T_2]$, синтезированный в [1]. На рис.2 представлены некоторые результаты моделирования этого алгоритма. Сплошными линиями на этом рисунке изображены зависимости нормированного рассеяния оценки длительности $V(\tau_m) / T_2^2$ от параметра q_0, найденные в [1]. Кривая 1 построена для $Q_0 = 0$, 2 — $Q_0 = 0,5$, 3 — $Q_0 = 1$, 4 — $Q_0 = 5$. Экспериментальные значения рассеяния оценки длительности изображены на этом рисунке «треугольниками» для $Q_0 = 0$, «кружками» — для $Q_0 = 0,5$, «плюсами» — для $Q_0 = 1$ и «квадратами» — для $Q_0 = 5$. Как следует из рис.2, найденные в [1] выражения для рассеяния ОМП длительности удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные зависимости при $\mu_0 \geq 50$.

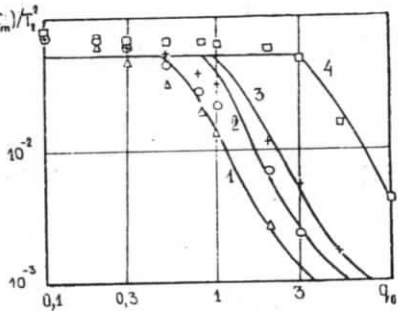


Рис. 2

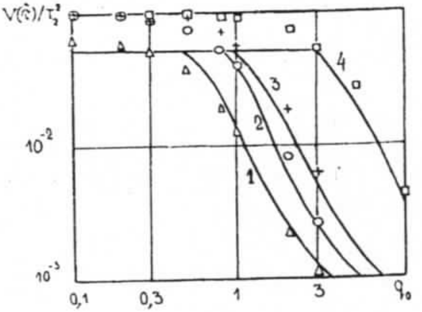


Рис. 3

Результаты моделирования алгоритма совместной оценки длительности (19) приведены на рис.3. Здесь сплошными линиями нанесены зависимости нормированного рассеяния совместной оценки длительности $V(\hat{\tau})/T_2^2$ от q_0, рассчитанные по формулам (15), (18), (26). Обозначения рис.3 совпадают с обозначениями рис.2. Сопоставление рис. 2 и рис.3 подтверждает сделанный ранее вывод об асимптотическом равенстве рассеяний совместной ОМП $\hat{\tau}$ (19) сигнала с неизвестной центральной частотой и ОМП τ_m [1] сигнала с априори известной центральной частотой в условиях высокой апостериорной точности, т. е., когда $V(\hat{\tau})/T_2^2 << 1$ и $V(\tau_m)/T_2^2 << 1$. Однако, если оценки длительности не обладают высокой апостериорной точностью, что имеет место при $q_0 \to 0$, то экспериментальные значения рассеяния совместной ОМП (19) могут быть в 1,1...2 раза больше,чем рассеяние ОМП длительности при априори известной центральной частоте.

Таким образом, определены асимптотически точные характеристики квазиправдоподобной и совместной оценок длительности случайного радиосигнала. Показано, что, по крайней мере, для $\mu_0 \geq 50$ найденные теоретические зависимости удовлетворительно аппроксимируют кспериментальные. В результате полученные выражения позволяют сделать обоснованный выбор между оценками (5) и (19) в зависимости от имеющейся априорной информации о центральной частоте случайного радиосигнала, а также в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценок и степени простоты их аппаратурной реализации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Трифонов А. П., Парфенов В. И.* Оценка длительности случайного радиосигнала при наличии помехи с неизвестной интенсивностью // Радиоэлектроника.— 1999.— Т. 42.— № 6.— С. 28—38. (Изв. высш. учеб. заведений).

2. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника.— М. : Радио и связь, 1982.— 624 с.

3. *Палий А. И.* Радиоэлектронная борьба.— М. : Воениздат, 1981.— 320 с.

4. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М. : Сов. радио, 1978.— 296 с.

5. *Kailath T.* Some Integral Equations with Nonrational Kernels // IEEE Trans. on Inf.Theory.— 1966.— Vol. IT-12.— No. 4.— P. 442—447.

6. *Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех.— М. : Радио и связь, 1986.— 264 с.

Воронежский госуниверситет.

Поступила в редакцию 20.07.2000.