213

р-150
2002 / 4
62

ISSN 0033-8486

РАДИОТЕХНИКА

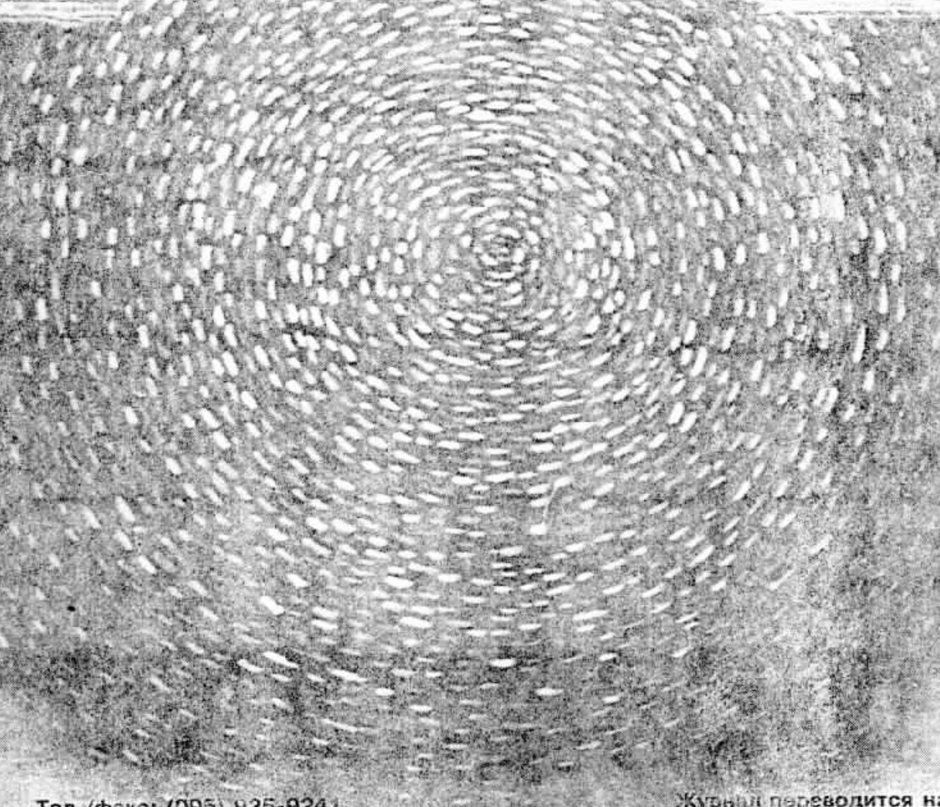
4 2002

www.webcenter.ru/~iprzhr/

В НОМЕРЕ:

ЖУРНАЛ В ЖУРНАЛЕ
РАДИОСИСТЕМЫ

Выпуск 59 Обработка сигналов и полей, № 5



Тел./факс: (095) 925-9241
E-mail: iprzhr@online.ru
http://www.webcenter.ru/~iprzhr/

Журнал переводится на английский язык
и издается компанией Begell House, Inc. под названием
TELECOMMUNICATIONS AND RADIO ENGINEERING

УДК 621.391

Характеристики оценок периода следования прямоугольных импульсов при наличии модулирующих помех с неизвестными параметрами

А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова

Методом локально-марковской аппроксимации найдены дисперсии оценок периода следования импульсов, искаженных гауссовской модулирующей помехой с неизвестными математическим ожиданием и интенсивностью.

Method of locally-Marcov approximation the estimate dispersions of pulses repetition period in Gaussian multiplicative noise with unknown mathematical expectation and intensity are founded.

В [1] получено аналитическое выражение для дисперсии оценки максимального правдоподобия (ОМП) периода следования прямоугольных импульсов, искаженных модулирующей (мультипликативной) помехой и наблюдаемых на фоне белого шума. При этом статистические характеристики гауссовской модулирующей помехи полагались априори известными. В то же время в реальных каналах передачи информации часто действуют модулирующие помехи, статистические характеристики которых содержат априори неизвестные параметры [2, 3]. Наличие у модулирующих помех неизвестных параметров не позволяет использовать известные результаты для оценки периода следования импульсов.

Ц е л ь р а б о т ы – *синтез и анализ оценок периода следования прямоугольных видеоимпульсов при модулирующих помехах с неизвестными параметрами.*

Аналогично [1], последовательность прямоугольных видеоимпульсов, искаженных модулирующей помехой, запишем в виде

$$s(t,\theta)=\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k(t)I\left[(t-k\theta)/\tau\right], \tag{1}$$

где θ – период следования; τ – длительность k-го импульса; $I(x)=1$ при $|x|<\frac{1}{2}$ и $I(x)=0$ при $|x|>\frac{1}{2}$; $\xi_k(t)$ – независимые гауссовские стационарные случайные процессы, описывающие действие модулирующих помех, для которых

$$\langle\xi_k(t)\rangle=a_k, \quad \langle\xi_k(t)\xi_k(t+\lambda)\rangle-a_k^2=K_k(\lambda). \tag{2}$$

В соответствии с методом максимального правдоподобия [4], для получения оценки периода следования надо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП). Положим, что полезный сигнал (1) наблюдается на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0; интервал наблюдения больше длительности всей последовательности, т. е. $T>N\theta$; скважность последовательности (1) не слишком мала и длительность τ импульсов последовательности значительно больше времени корреляции процесса $\xi_k(t)$, так что

$$\mu_k=\tau\,\frac{\Omega_k}{4\pi}>>1, \tag{3}$$

где $\Omega_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_k^2(\omega)d\omega/\sup\limits_{\omega}G_k^2(\omega)$ – эквивалентная полоса частот модулирующей помехи, а

$G_k(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_k(\lambda)\exp(-i\omega\lambda)d\lambda$ – ее спектральная плотность в k-м периоде повторения.

При выполнении (3) и перечисленных условий, используя результаты [1], логарифм ФОП можно записать как

$$L(\theta)=\frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{Y_k(\theta)+\frac{2a_k}{1+g_k}X_k(\theta)-\frac{a_k^2\tau}{1+g_k}-\frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[1+\frac{2G_k(\omega)}{N_0}\right]d\omega\right\}. \tag{4}$$

Здесь

$$Y_k(\theta)=\int_{k\theta-\tau/2}^{k\theta+\tau/2}y_k^2(t)dt\ ,\quad X_k(\theta)=\int_{k\theta-\tau/2}^{k\theta+\tau/2}x(t)dt\ ,\quad g_k=2G_k(0)/N_0\ ,\quad y_k(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t')h_k(t-t')dt' \tag{5}$$

– отклик фильтра с передаточной функцией $H_k(\mathrm{i}\omega)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t)=s(t,\theta_0)+n(t)$; θ_0 – истинное значение периода следования. Передаточная функция фильтра выбирается из условия $\left|H_k(\mathrm{i}\omega)\right|^2=2G_k(\omega)/\left[N_0+2G_k(\omega)\right]$, $k=\overline{0,N-1}$.

Рассмотрим вначале случай, когда неизвестны математические ожидания a_k (2) случайных процессов $\xi_k(t)$, описывающих модулирующую помеху в k-ом периоде повторения. Тогда в (4) можно не учитывать последний член, и выражение для логарифма ФОП несколько упрощается:

$$L(\theta,a_k)=\frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}\left[Y_k(\theta)+\frac{2a_k}{1+g_k}X_k(\theta)-\frac{a_k^2\tau}{1+g_k}\right]. \tag{6}$$

Для того чтобы исключить влияние неизвестных параметров a_k на оценку периода следования, заменим их неизвестные значения на ОМП. Максимизируя с этой целью (6) по a_k, имеем

$$L_a(\theta)=\sup_{a_k}L(\theta,a_k)=\frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N-1}\left[Y_k(\theta)+\frac{X_k^2(\theta)}{\tau(1+g_k)}\right]. \tag{7}$$

В результате ОМП $\hat{\theta}_a$ периода следования последовательности (1) с неизвестными математическими ожиданиями a_k определяется по положению абсолютного (наибольшего) максимума функционала (7).

Для расчета характеристик ОМП подставим в (7) реализацию наблюдаемых данных $x(t)=s(\theta_0,a_{0k})+n(t)$ и представим его в виде суммы сигнальной и шумовой функций [4]:

$$L_a(\theta)=S_a(\theta)+N_a(\theta). \tag{8}$$

Учитывая (3), пренебрегая ошибками измерения периода следования порядка времени корреляции модулирующей помехи и полагая, что ОМП обладает высокой апостериорной точностью, получаем для сигнальной функции в (8)

$$S_a(\theta)=\langle L_a(\theta)\rangle\cong A_s-B_s\left|\theta-\theta_0\right|. \tag{9}$$

Шумовая функция $N_a(\theta)=L_a(\theta)-\langle L_a(\theta)\rangle$ является реализацией случайного процесса, для которого $\langle N_a(\theta)\rangle=0$,

$$B_a(\theta_1,\theta_2)=\langle N_a(\theta_1)N_a(\theta_2)\rangle\cong A_N-B_N\left|\theta_1-\theta_2\right|-C_N\left[\max(\theta_0,\theta_1,\theta_2)-\min(\theta_0,\theta_1,\theta_2)\right]. \tag{10}$$

В (9), (10)

$$A_s = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\tau}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_k^2(\omega)}{N_0 + 2G_k(\omega)} d\omega + z_{0k}^2 \frac{2+g_k}{2(1+g_k)} \right]; \; B_s = \sum_{k=0}^{N-1} k \left[\frac{1}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_k^2(\omega)}{N_0 + 2G_k(\omega)} d\omega + z_{0k}^2 \frac{2+g_k}{2\tau(1+g_k)} \right];$$

$$A_N = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\tau}{\pi N_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_k^2(\omega) d\omega + z_{0k}^2 (1+g_k) \right]; \; B_N = \sum_{k=0}^{N-1} k \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_k^2(\omega)}{\left[N_0 + 2G_k(\omega)\right]^2} d\omega + \frac{z_{0k}^2}{\tau(1+g_k)^2} \right]; \tag{11}$$

$$C_N = \sum_{k=0}^{N-1} k \left\{ \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_k^3(\omega)\left[1 + G_k(\omega)/N_0\right]}{\left[N_0 + 2G_k(\omega)\right]^3} d\omega + z_{0k}^2 \frac{g_k\left(3 + 3g_k + g_k^2\right)}{\tau(1+g_k)^2} \right\},$$

$z_{0k}^2 = 2a_{0k}^2 \tau / N_0$ – отношение сигнал-шум (ОСШ) для регулярной (неискаженной) составляющей k-го импульса [4]; a_{0k} – истинное значение математического ожидания модулирующей помехи в k-ом периоде повторения. При выводе сигнальной (9) и корреляционной (10) функций предполагалось, что

$$\max\left(|\theta - \theta_0|, \; |\theta_1 - \theta_2| \; , |\theta_1 - \theta_0| \; , |\theta_2 - \theta_0|\right) << \tau \; . \tag{12}$$

Поэтому (8), (9) описывают центральные пики соответствующих функций [4].

Сигнальная функция (9) достигает максимума при $\theta = \theta_0$, так что выходное ОСШ для всей последовательности (1) будет равно [4]:

$$z_a^2 = \frac{S_a^2(\theta_0)}{B_a(\theta_0, \theta_0)} = \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\tau}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_k^2(\omega)}{N_0 + 2G_k(\omega)} d\omega + z_{0k}^2 \frac{2+g_k}{2(1+g_k)} \right] \right\}^2 \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\tau}{\pi N_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_k^2(\omega) d\omega + z_{0k}^2 (1+g_k) \right] \right\}^{-1} . \tag{13}$$

В дальнейшем полагаем, что ОСШ (13) достаточно велико, так что ОМП $\hat{\theta}_a$ обладает высокой апостериорной точностью [4].

Согласно (9), (10) у сигнальной и корреляционной функций не существует второй производной по оцениваемому параметру при $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_0$. Найти дисперсию оценки периода следования в этом случае можно с помощью метода локально-марковской аппроксимации [5]

$$D = 13\left(2B_N + C_N\right)^2 / 8B_s^4 \; . \tag{14}$$

Подставляя (11) в (14), для дисперсии ОМП периода следования импульсов с неизвестными математическими ожиданиями модулирующей помехи получаем выражение

$$D\left(\hat{\theta}_a | \theta_0, a_{0k}\right) = \left\langle \left(\hat{\theta}_a - \theta_0\right)^2 \right\rangle = \frac{13\tau^2}{8} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} k \left[\frac{2\tau}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_k^2(\omega)\left[1 + G_k(\omega)/N_0\right]}{N_0 + 2G_k(\omega)} d\omega + \right.\right.$$

$$\left.\left. + z_{0k}^2 \frac{1 + (1+g_k)^3}{(1+g_k)^2} \right] \right\}^2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} k \left[\frac{\tau}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_k^2(\omega)}{N_0 + 2G_k(\omega)} d\omega + z_{0k}^2 \frac{2+g_k}{2(1+g_k)} \right] \right\}^{-4}, \tag{15}$$

точность которого улучшается с ростом μ_k (3) и z_a^2 (13).

Положим далее, что спектральная плотность $G_k(\omega)$ модулирующей помехи в k-ом периоде повторения имеет вид

$$G_k(\omega) = \gamma_k I(\omega / \Omega_k) \ , \tag{16}$$

где γ_k – интенсивность, а Ω_k – полоса частот модулирующей помехи. Пусть кроме математических ожиданий a_k (2) неизвестны также интенсивности γ_k (16) модулирующей помехи. Подставляя (16) в (4), логарифм ФОП перепишем в виде

$$L(\theta, a_k, \gamma_k) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{q_k}{1+q_k} Y_{1k}(\theta) + \frac{2a_k}{1+q_k} X_k(\theta) - \frac{a_k^2 \tau}{1+q_k} - N_0 \mu_k \ln(1+q_k) \right] , \tag{17}$$

где $q_k = 2\gamma_k / N_0$, а $Y_{1k}(\theta)$ определяется из (5) при замене в ней $y_k(t)$ на $y_{1k}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t') h_{1k}(t - t') dt'$ – отклик фильтра с передаточной функцией $H_{1k}(\mathrm{i}\omega)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t) = s(t, \theta_0, a_{0k}, \gamma_{0k}) + n(t)$. Передаточная функция фильтра теперь выбирается из условия $\left| H_{1k}(\mathrm{i}\omega) \right|^2 = I(\omega / \Omega_k)$.

Для того чтобы исключить влияние неизвестных параметров a_k и γ_k на оценку периода следования, заменим их неизвестные значения на ОМП. Максимизируя с этой целью (17) по a_k и γ_k ,имеем

$$L_\gamma(\theta) = \sup_{a_k, \gamma_k} L(\theta, a_k, \gamma_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ Y_{1k}(\theta)/N_0 - \mu_k \left[1 + \ln\left\{ \left[Y_{1k}(\theta) - X_k^2(\theta)/\tau \right] / \mu_k N_0 \right\} \right] \right\} . \tag{18}$$

В результате ОМП $\hat{\theta}_\gamma$ периода следования последовательности (1) с неизвестными математическими ожиданиями a_k и интенсивностями γ_k модулирующей помехи определяется по положению абсолютного максимума функционала (18).

Для расчета характеристик ОМП $\hat{\theta}_\gamma$ введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$S_{1k}(\theta) = \langle Y_{1k}(\theta) \rangle / N_0 \ , \quad N_{1k}(\theta) = \left[Y_{1k}(\theta) - \langle Y_{1k}(\theta) \rangle \right] / N_0 \ , \quad S_{2k}(\theta) = \left[\langle Y_{1k}(\theta) \rangle - \langle X_k^2(\theta) \rangle / \tau \right] / N_0 \mu_k \ ,$$

$$N_{2k}(\theta) = \left\{ Y_{1k}(\theta) - \langle Y_{1k}(\theta) \rangle - \left[X_k^2(\theta) - \langle X_k^2(\theta) \rangle \right] / \tau \right\} / N_0 \mu_k \ , \tag{19}$$

используя которые, преобразуем (18) к виду

$$L_\gamma(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ S_{1k}(\theta) + N_{1k}(\theta) - \mu_k \left[1 + \ln\left\{ S_{2k}(\theta) + N_{2k}(\theta) \right\} \right] \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ S_{1k}(\theta) + N_{1k}(\theta) - \mu_k \left[1 + \ln S_{2k}(\theta) + \ln\left\{ 1 + N_{2k}(\theta) / S_{2k}(\theta) \right\} \right] \right\}. \tag{20}$$

Положим, что ОМП $\hat{\theta}_\gamma$ обладает высокой апостериорной точностью. Тогда достаточно исследовать поведение функционала (20) в малой окрестности истинного значения периода следования θ_0 . В этой окрестности при выполнении (3) функционал (20) можно приближенно переписать как

$$L_\gamma(\theta) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ S_{1k}(\theta) + N_{1k}(\theta) - \mu_k \left[1 + \ln S_{2k}(\theta) + N_{2k}(\theta)/S_{2k}(\theta) \right] \right\} . \tag{21}$$

Точность (21) возрастает с увеличением μ_k, так как при выполнении (3) $\langle N_{2k}^2(\theta)\rangle / S_{2k}^2(\theta) = \dfrac{1}{\mu_k} \ll 1$.

Представим (21) в виде суммы сигнальной и шумовой функций [4]:

$$L_\gamma(\theta) = S_\gamma(\theta) + N_\gamma(\theta) , \tag{22}$$

где $S_\gamma(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left\{ S_{1k}(\theta) - \mu_k \left[1 + \ln S_{2k}(\theta) \right] \right\}$, $N_\gamma(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left[N_{1k}(\theta) - \mu_k N_{2k}(\theta)/S_{2k}(\theta) \right]$. Если выполняется (12), то сигнальную $S_\gamma(\theta)$ и корреляционную $B_\gamma(\theta_1,\theta_2) = \langle N_\gamma(\theta_1) N_\gamma(\theta_2)\rangle$ функции шумовой функции $N_\gamma(\theta)$ в (22) можем записать аналогично (9) и (10) соответственно. Необходимо лишь в (9) и (10) вместо (11) подставить выражения:

$$A_s = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mu_k \left[q_{0k} - \ln(1+q_{0k}) \right] + z_{0k}^2/2 \right\} ; \quad B_s = \sum_{k=0}^{N-1} k \left[\mu_k q_{0k}^2 + z_{0k}^2 (1 + q_{0k}/2) \right] / \tau(1+q_{0k}) ;$$

$$A_N = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\mu_k q_{0k}^2 + z_{0k}^2 (1+q_{0k}) \right] ; \quad B_N = \sum_{k=0}^{N-1} k \left(\mu_k q_{0k}^2 + z_{0k}^2 \right) / \tau(1+q_{0k})^2 ; \tag{23}$$

$$C_N = \sum_{k=0}^{N-1} k \left[\mu_k q_{0k}^3 (2+q_{0k}) + z_{0k}^2 \left(3 + 3q_{0k} + q_{0k}^2 \right) \right] / \tau(1+q_{0k})^2 ,$$

где $q_{0k} = 2\gamma_{0k}/N_0$, а γ_{0k} – истинное значение интенсивности модулирующей помехи в k-ом периоде повторения.

Сигнальная функция $S_\gamma(\theta)$ в (22) достигает максимума при $\theta = \theta_0$. Поэтому выходное ОСШ для всей последовательности (1) при неизвестных математических ожиданиях и интенсивностях модулирующей помехи будет равно [4]

$$z_\gamma^2 = \frac{S_\gamma^2(\theta_0)}{B_\gamma(\theta_0,\theta_0)} = \frac{\left[\sum\limits_{k=0}^{N-1} \left\{ \mu_k \left[q_{0k} - \ln(1+q_{0k}) \right] + z_{0k}^2/2 \right\} \right]^2}{\sum\limits_{k=0}^{N-1} \left[\mu_k q_{0k}^2 + z_{0k}^2 (1+q_{0k}) \right]} . \tag{24}$$

Далее полагаем, что ОСШ (24) достаточно велико, так что ОМП $\hat{\theta}_\gamma$ обладает высокой апостериорной точностью [4]. Опять используя метод локально-марковской аппроксимации, подставляем (23) в (14). В результате получаем для дисперсии ОМП периода следования $\hat{\theta}_\gamma$ выражение

$$D\left(\hat{\theta}_\gamma | \theta_0, a_{0k}, \gamma_{0k} \right) = 26\tau^2 \left[\sum_{k=0}^{N-1} k \left\{ \mu_k q_{0k}^2 \left[1 + (1+q_{ok})^2 \right] + z_{0k}^2 \left[1 + (1+q_{0k})^3 \right] \right\} (1+q_{0k})^{-2} \right]^2 \times$$

$$\times \left\{ 2 \sum_{k=0}^{N-1} k \left[\mu_k q_{0k}^2 + z_{0k}^2 (1 + q_{0k}/2) \right] (1+q_{0k})^{-1} \right\}^{-4} , \tag{25}$$

точность которого улучшается с ростом μ_k (3) и z_γ^2 (24). Подставляя (16) в (15), находим, что для частного случая прямоугольной спектральной плотности модулирующей помехи дисперсии ОМП $\hat{\theta}_a$ (15) и $\hat{\theta}_\gamma$ (25) совпадают. Следовательно, в условиях высокой апостериорной точности незнание интенсивностей модулирующей помехи асимптотически (с увеличением μ_k и z_γ) не влияет на точность ОМП периода следования. Незнание интенсивностей модулирующей помехи лишь приводит к более сложной структуре измерителя (18), по сравнению с измерителем (7) в случае незнания только математических ожиданий. К аналогичным выводам приходим, сопоставляя (15) и (23) с результатами [1], полученными при априори известных значениях математических ожиданий и интенсивностей модулирующей помехи.

- Показано, что незнание математических ожиданий и интенсивностей модулирующей помехи в каждом периоде повторения асимптотически не влияет на точность оценки периода следования, однако приводит к заметному усложнению структуры алгоритмов оценки.

Работа выполнена при финансовой поддержке CRDF, Минобразования РФ и РФФИ (проекты B-EM P/241, E00-3.5-5 и 02-01-00057).

Литература

1. *Трифонов А.П., Беспалова М.Б.* – Радиотехника, 1998, № 1.
2. *Кремер И.Я., Владимиров В.И., Карпухин В.И.* Модулирующие помехи и прием радиосигналов. – М.: Сов. радио, 1972.
3. *Васильев К.К.* Прием сигналов при мультипликативных помехах. – Саратов: Изд. СГУ, 1983
4. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. – М.: Сов. радио. 1978.
5. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1986.

Поступила 31 января 2002 г.