

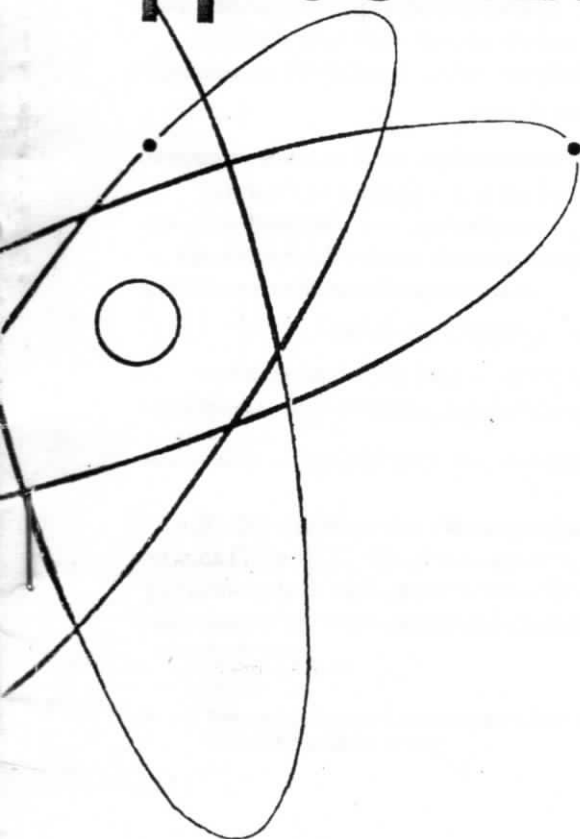
214



ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА



ТОМ 45

~~5-6~~
май-июнь

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2002

423

ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВМЕСТНОЙ ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ПРИХОДА И ЧАСТОТЫ СЛУЧАЙНОГО РАДИОИМПУЛЬСА*

Найдены характеристики оценок максимального правдоподобия времени прихода и частоты флуктуирующего радиоимпульса с учетом аномальных ошибок. Границы применимости полученных выражений установлены с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

В процессе функционирования радиоэлектронных систем локации, навигации и связи часто необходимо измерять время прихода (время задержки) и частоту (доплеровский сдвиг частоты) флуктуирующих импульсных сигналов, наблюдаемых на фоне помех [1, 2].

В [3] рассмотрена оценка максимального правдоподобия (ОМП) времени прихода λ_0 случайного радиоимпульса

$$s(t) = \xi(t)I[(t - \lambda_0)/\tau] \quad (1)$$

наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума.

Здесь $I(x) = 1$ при $|x| < 1/2$, $I(x) = 0$ при $|x| \geq 1/2$ — прямоугольная модулирующая функция, τ — длительность радиоимпульса, $\xi(t) = a(t)\cos[v_0 t + \varphi(t)]$ — узкополосный стационарный центрированный гауссовский случайный процесс со спектральной плотностью

$$G(\omega) = (\gamma/2)\{g[(v_0 - \omega)/\Omega] + g[(v_0 + \omega)/\Omega]\},$$

γ — интенсивность, v_0 и Ω — центральная частота и ширина полосы частот спектральной плотности, а функция $g(x) \geq 0$ описывает форму спектральной

плотности и нормирована так, что $\max_x g(x) = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx = 1$

В [4] исследована квазиправдоподобная оценка времени прихода импульса (1), но в [3, 4] предполагается, что центральная частота v_0 случайного радиоимпульса априори известна. В [5] выполнены синтез и анализ совместных оценок времени прихода и центральной частоты спектральной плотности

* Работа выполнена при поддержке CDRF, Минобразования РФ и РФФИ (проекты VZ-010-0, EOO-3,5-5 и 02-01-00057).

регулярного случайного импульса $s(t) = \xi(t)f[(t - \lambda_0)/\tau]$, где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая модулирующая функция. Однако характеристики оценок [5] получены в предположении, что моменты решающей статистики алгоритма оценки непрерывно дифференцируемы по времени прихода и частоте сигнала хотя бы дважды. Из [3, 4] следует, что производные моментов логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП) для радиоимпульса (1) имеют разрывы первого рода по времени прихода, поэтому результаты [5] нельзя использовать для анализа эффективности совместных ОМП времени прихода и частоты случайного радиоимпульса.

Рассмотрим пороговые (с учетом аномальных ошибок) характеристики совместных ОМП времени прихода и частоты радиоимпульса (1), наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Для получения ОМП по принятой реализации $x(t) = s(t) + n(t)$ смеси сигнала и шума необходимо формировать логарифм ФОП $L(\lambda, \nu)$ как функцию сигнала и шума необходимо формировать логарифм ФОП возможных значений λ и ν времени прихода и частоты сигнала (1) [2, 6]. Будем считать, что время прихода и частота случайного радиоимпульса принимают значения из априорных интервалов $\lambda_0 \in [\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ и $\nu_0 \in [\nu_{\min}; \nu_{\max}]$. Тогда совместные ОМП времени прихода и частоты определяются как координаты (λ_m, ν_m) положения абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП $L(\lambda, \nu)$ на интервалах $\lambda \in [\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ и $\nu \in [\nu_{\min}; \nu_{\max}]$ соответственно [2, 6].

Аналогично [3—5], будем полагать, что время корреляции узкополосного случайного процесса $\xi(t)$ значительно меньше длительности τ импульса (1), т. е. выполняются условия

$$\mu = \tau\Omega / 2\pi \gg 1, \nu_0 \gg \Omega. \quad (2)$$

Тогда логарифм ФОП с точностью до несущественного постоянного слагаемого можно представить в виде [3—5]

$$L(\lambda, \nu) = \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} y^2(t, \nu) dt / N_0, \quad (3)$$

где $y(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t - t', \nu) dt'$ — отклик фильтра с импульсной переходной функцией $h(t, \nu)$ на принимаемую реализацию $x(t)$, причем передаточная функция $H(\omega, \nu)$ этого фильтра удовлетворяет условию $|H(\omega, \nu)|^2 = H_0[(\nu - \omega)/\Omega] + H_0[(\nu + \omega)/\Omega]$, $H_0(x) = qg(x)/[1 + qg(x)]$, $q = \gamma / N_0$.

Найдем характеристики нормированных совместных ОМП $\eta_m = \lambda_m / \tau$ и $\kappa_m = \nu_m / \Omega$ времени прихода и частоты случайного радиоимпульса (1). Обо-

значим $\eta = \lambda / \tau$, $\eta_j = \lambda_j / \tau$, $\kappa = v / \Omega$, $\kappa_j = v_j / \Omega$, $j = 1, 2$. Логарифм ФАП (3) представим в виде суммы

$$L(\lambda, v) = S(\eta, \kappa) + N(\eta, \kappa) + B, \quad B = \mu q \int_{-\infty}^{\infty} \{g(x) / [1 + qg(x)]\} dx,$$

где $S(\eta, \kappa) = \langle L(\eta\tau, \kappa\Omega) \rangle - B$ — сигнальная, $N(\eta, \kappa) = L(\eta\tau, \kappa\Omega) - \langle L(\eta\tau, \kappa\Omega) \rangle$ — шумовая функции, а усреднение выполняется по реализациям $x(t)$ при фиксированных η_0 и κ_0 [6, 7]. При выполнении (2) для сигнальной функции получаем

$$S(\eta, \kappa) = S_0 C_f(\eta - \eta_0) C_{f0}(\kappa - \kappa_0), \quad S_0 = \mu q^2, \quad (4)$$

$$C_f(\eta) = \max(0, 1 - |\eta|), \quad C_{f0}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)g(x+\kappa)}{1 + qg(x)} dx.$$

Шумовая функция $N(\eta, \kappa)$ является асимптотически (при $\mu \rightarrow \infty$) гауссовским центрированным случайным полем, поэтому, в силу (2), ограничимся рассмотрением ее корреляционной функции

$$\begin{aligned} K(\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2) &= \langle N(\eta_1, \kappa_1) N(\eta_2, \kappa_2) \rangle = \\ &= K_1 R_f(\eta_1, \eta_2, \eta_0) R_f(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_0) + K_0 C_f(\eta_1 - \eta_2) C_{f0}(\kappa_1 - \kappa_2), \end{aligned} \quad (5)$$

$$K_0 = \mu q^2, \quad K_1 = \mu q^3, \quad C_f(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)g(x-\kappa)}{[1 + qg(x)][1 + qg(x-\kappa)]} dx,$$

$$R_f(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x-\kappa_1)g(x-\kappa_2)g(x-\kappa_0)[2 + qg(x-\kappa_0)]}{[1 + qg(x-\kappa_1)][1 + qg(x-\kappa_2)]} dx,$$

$$R_f(\eta_1, \eta_2, \eta_0) = \max(0, 1 - \max(|\eta_1 - \eta_2|, |\eta_2 - \eta_0|, |\eta_1 - \eta_0|))$$

В процессе анализа все оценки целесообразно разделить на надежные и аномальные [6, 7]. Обозначим буквой Λ область возможных значений нормированных времени прихода и частоты сигнала, задаваемую условиями $\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]$ и $\kappa \in [\kappa_{\min}; \kappa_{\max}]$, где $\eta_{\min} = \lambda_{\min} / \tau$, $\eta_{\max} = \lambda_{\max} / \tau$, $\kappa_{\min} = v_{\min} / \Omega$, $\kappa_{\max} = v_{\max} / \Omega$. Оценки η_m и κ_m являются надежными, если они находятся в сигнальной подобласти Λ_S области Λ , задаваемой условиями $\eta \in [\eta_0 - 1; \eta_0 + 1]$, $\kappa \in [\kappa_0 - \Delta; \kappa_0 + \Delta]$, в пределах которой сигнальная функция $S(\eta, \kappa)$ отлична от нуля. Здесь величину 2Δ можно интерпретировать как длительность сигнальной функции по переменной κ и определять из условия $C_{f0}(\kappa) \leq \delta \ll 1$ при $|\kappa| > \Delta$. При $q \leq 1$ можно выбирать $\Delta = 1$. Например, при $q \ll 1$ и $g(x) = [1 + (\pi x / 2)^2]^{-1}$ получаем $C_{f0}(\kappa) \leq 0,05$, если $|\kappa| > 1$. Если ОМП η_m и κ_m находятся в пределах шумовой подобласти Λ_N , являющейся дополнением по-

добласти Δ_S до области Λ , то оценки и ошибки оценивания называются аномальными [6, 7]. Отметим, что в пределах шумовой подобласти сигнальная функция приблизительно равна нулю, а шумовая функция является однородным центрированным случайным полем с корреляционной функцией $\langle N(\eta_1, \kappa_1) N(\eta_2, \kappa_2) \rangle = K_0 C_f(\eta_1 - \eta_2) C_f(\kappa_1 - \kappa_2)$.

Рассмотрим вначале надежные ОМП η_m и κ_m , являющиеся координатами η и κ положения абсолютного максимума логарифма ФОП $L(\eta, \kappa)$ (3) в пределах сигнальной подобласти Δ_S . Так как сигнальная функция $S(\eta, \kappa)$ (4) достигает абсолютного максимума при $\eta = \eta_0$, $\kappa = \kappa_0$, а реализации шумовой функции $N(\eta, \kappa)$ непрерывны с вероятностью 1, то отношение сигнал/шум (ОСШ) для принятого сигнала [3—7]

$$z^2 = \frac{S^2(\eta_0, \kappa_0)}{K(\eta_0, \eta_0, \kappa_0, \kappa_0)} = \mu q^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(x) dx}{1 + qg(x)} \right]^2. \quad (6)$$

Так как $q > 0$ то при $\mu \rightarrow \infty$ ОСШ $z^2 \rightarrow \infty$. Будем полагать, что кроме (2) выполняется условие

$$z^2 \gg 1, \quad (7)$$

обеспечивающее высокую апостериорную точность надежных оценок [6]. При выполнении (7) надежные ОМП η_m и κ_m расположены в малой окрестности точки (η_0, κ_0) , причем с ростом ОСШ размер этой окрестности уменьшается. Поэтому для расчета характеристик надежных ОМП η_m и κ_m при выполнении (2), (7) достаточно исследовать поведение моментов (4), (5) логарифма ФОП в малой окрестности точки (η_0, κ_0) .

При $\delta_S = \max(|\eta - \eta_0|, |\eta_i - \eta_0|, |\kappa - \kappa_0|, |\kappa_i - \kappa_0|) \rightarrow 0$, $i = 1, 2$ моменты (4), (5) функционала (3) допускают асимптотические представления:

$$S(\eta, \kappa) = S_f(\eta - \eta_0) + S_f(\kappa - \kappa_0) + o(\delta_S^2), \quad (8)$$

$$S_f(\eta) = S_0 C_{f0}(0) \max(0, 1 - 2|\eta|) / 2, \quad S_f(\kappa) = S_0 [C_{f0}(\kappa) - C_{f0}(0) / 2],$$

$$K(\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2) = K_f(\eta_1, \eta_2) + K_f(\kappa_1, \kappa_2) + o(\delta_S^2), \quad (9)$$

$$K_f(\eta_1, \eta_2) = \sigma_S^2 \max \left[0, 1/2 - |\eta_1 - \eta_2| - \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} g \min(|\eta_1 - \eta_0|, |\eta_2 - \eta_0|) \text{ при } (\eta_1 - \eta_0)(\eta_2 - \eta_0) \geq 0; \\ 0 \text{ при } (\eta_1 - \eta_0)(\eta_2 - \eta_0) < 0; \end{array} \right]$$

$$\sigma_S^2 = K(\eta_0, \eta_0, \kappa_0, \kappa_0) = \mu q^2, \quad g = K_1 R_f(\kappa_0, \kappa_0, \kappa_0) / \sigma_S^2,$$

$$K_f(\kappa_1, \kappa_2) = K_1 [R_f(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_0) - R_f(\kappa_0, \kappa_0, \kappa_0) / 2] +$$

$$+K_0[C_f(\kappa_1 - \kappa_2) - C_f(0)/2]$$

Обозначим $L_t(\eta)$, $L_f(\kappa)$ — статистически независимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $S_f(\kappa - \kappa_0)$ (8) и корреляционными функциями $K_t(\eta_1, \eta_2)$, $K_f(\kappa_1, \kappa_2)$ (9) соответственно. Из (8), (9) следует, что первые два момента асимптотически гауссовского (при $\mu \rightarrow \infty$) случайного поля $L(\eta, \kappa)$ (3) и гауссовского случайного поля $M(\eta, \kappa) = L_t(\eta) + L_f(\kappa)$ асимптотически совпадают в малой окрестности точки (η_0, κ_0) . Тогда при выполнении (2), (7) характеристики надежных ОМП η_m и κ_m приближенно совпадают с характеристиками положений абсолютных максимумов случайных процессов $L_t(\eta)$ и $L_f(\kappa)$ на интервалах $\eta \in [\eta_0 - \Delta, \eta_0 + \Delta]$ и $\kappa \in [\kappa_0 - \Delta, \kappa_0 + \Delta]$ соответственно.

Воспользовавшись локально-марковской аппроксимацией приращений случайного процесса $L_t(\eta)$ и решая уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова с соответствующими начальными и граничными условиями [7], аналогично [3, 4] находим приближенное выражение для условной (при фиксированных η_0 и κ_0) маргинальной плотности вероятности $W_{t0}(\eta_m)$ надежной оценки η_m :

$$W_{t0}(\eta_m) = \frac{2z^2}{2-g} \left\{ 3 \exp\left(\frac{4z^2}{2-g} |\eta_m - \eta_0|\right) \left[1 - \Phi\left(3z \sqrt{\frac{|\eta_m - \eta_0|}{2-g}}\right) \right] + \Phi\left(z \sqrt{\frac{|\eta_m - \eta_0|}{2-g}}\right) - 1 \right\}, \quad (10)$$

где $\Phi(x) = \int_x^\infty \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности.

Используя метод малого параметра [6], аналогично [5] для условной маргинальной плотности вероятности $W_{f0}(\kappa_m)$ надежной оценки κ_m получаем

$$W_{f0}(\kappa_m) = z \sqrt{\theta / 2\pi} \exp[-z^2 \theta (\kappa_m - \kappa_0)^2 / 2], \quad (11)$$

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[dg(x)/dx]^2 dx}{[1 + qg(x)]^2} \bigg/ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(x) dx}{1 + qg(x)} \right]^2.$$

Точность выражений (10), (11) возрастает с увеличением μ и z^2 [6, 7]. В силу статистической независимости случайных процессов $L_t(\eta)$ и $L_f(\kappa)$, надежные ОМП η_m и κ_m приближенно (при выполнении (2), (7)) статистически независимы. Тогда условную совместную плотность вероятности надежных оценок η_m и κ_m можно приближенно представить в виде

$$W_{m0}(\eta_m, \kappa_m) = W_{i0}(\eta_m) W_{f0}(\kappa_m) \quad (12)$$

Из (10), (11) следует, что при выполнении (2), (7) совместные надежные ОМП η_m и κ_m являются несмещенными, а рассеяния оценок равны

$$V_{i0} = \langle (\eta_m - \eta_0)^2 \rangle = 13(2-g)^2 / 8z^4, \quad V_{f0} = \langle (\kappa_m - \kappa_0)^2 \rangle = 1/z^2 \theta. \quad (13)$$

Следовательно, характеристики надежной ОМП η_m времени прихода асимптотически (с ростом ОСШ) совпадают с соответствующими характеристиками надежной ОМП времени прихода случайного радиопульса с априорной известной частотой [3]. Штриховыми линиями на рис. 1 нанесены предельные (при $q \ll 1$) зависимости $V = V_{i0}(z)$ и $V = V_{f0}(z)$ рассеяний надежных ОМП времени прихода (кривая 1) и частоты (кривая 2) сигнала (1) при $g(x) = [1 + (\pi x / 2)^2]^{-1}$. Из рис. 1 видно, что с ростом ОСШ рассеяние надежной оценки времени прихода убывает существенно быстрее, чем рассеяние надежной оценки частоты.

Рассмотрим влияние аномальных ошибок на характеристики ОМП. Аномальные ошибки возможны, если размеры априорной области Λ значений нормированных времени прихода η_0 и частоты κ_0 сигнала значительно больше размеров сигнальной подобласти Λ_S [6, 7], т. е.

$$m_i = \eta_{\max} - \eta_{\min} \gg 1, \quad m_f = \kappa_{\max} - \kappa_{\min} \gg 1 \quad (14)$$

Аномальные ошибки могут привести к существенному увеличению рассеяния оценки. Поэтому необходимо найти вероятности надежной оценки

$$P_0 = P[(\eta_m, \kappa_m) \in \Lambda_S]$$

или аномальной ошибки

$$P_a = P[(\eta_m, \kappa_m) \in \Lambda_N] = 1 - P_0.$$

Согласно определению [6, 7], $P_0 = P[L_S > L_N]$, где L_S и L_N — величины абсолютных максимумов логарифма ФОП (3) в пределах сигнальной и шумовой подобластей соответственно. В силу (14), случайные величины L_S и L_N приближенно статистически независимы [6, 7], поэтому

$$P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} F_N(u) W_S(u) du, \quad (15)$$

где $F_N(u)$ и $W_S(u)$ — функция распределения и плотность вероятности случайных величин L_N / σ_N и L_S / σ_N соответственно, а $\sigma_N^2 = K_0 C_f(0)$ — дисперсия шумовой функции $N(\eta, \kappa)$ в пределах шумовой подобласти Λ_N .

Точные выражения для функций $F_N(u)$ и $W_S(u)$ неизвестны. Будем считать, что выполняются условия (2), (7), (14). Для расчета вероятности P_0 при

выполнении (7) достаточно использовать аппроксимацию функции $F_N(u)$, асимптотически точную при $u \rightarrow \infty$ [7]. При выполнении (2), (14) функция $F_N(u)$ аппроксимируется функцией распределения величины абсолютного максимума однородного центрированного гауссовского случайного поля $r_0(\eta, \kappa)$ с корреляционной функцией

$$\langle r_0(\eta_1, \kappa_1) r_0(\eta_2, \kappa_2) \rangle = C_f(\eta_1 - \eta_2) C_f(\kappa_1 - \kappa_2) / C_f(0)$$

в пределах области значений $(\eta, \kappa) \in \Lambda$.

Получим асимптотически точное (с ростом u) выражение для функции $F_N(u)$, используя асимптотическую пуассоновость потока A -выходов случайного поля $r_0(\eta, \kappa)$ за уровень $u \rightarrow \infty$ [8]. Согласно [8], A -выходом случайного поля $r_0(\eta, \kappa)$ за уровень u называется такое пересечение уровня реализацией поля в произвольной точке (η^*, κ^*) , что для некоторого $a > 0$ существует область Σ , задаваемая условиями $\eta \in [\eta^* - a/2, \eta^* + a/2]$, $\kappa \in [\kappa^* - a, \kappa^*]$ и $\eta \in [\eta^* - a/2, \eta^*]$, $\kappa = \kappa^*$, в пределах которой $r_0(\eta, \kappa) < u$. В силу пуассоновости потока A -выходов при $u \rightarrow \infty$

$$F_N(u) = \exp[-\Pi(u)], \quad (16)$$

где $\Pi(u)$ — среднее число A -выходов случайного поля $r_0(\eta, \kappa)$ за уровень u в пределах области значений $(\eta, \kappa) \in \Lambda_N$.

В [8] получено асимптотическое выражение для интенсивности потока A -выходов, откуда следует, что при выполнении (14) и $u \rightarrow \infty$

$$\Pi(u) = m_f \sigma_f u^2 \exp(-u^2/2) / 2\pi, \quad (17)$$

$$\sigma_f = m_f \sqrt{-\frac{\partial^2 C_f(x) / \partial x^2}{C_f(0)}} \Big|_{x=0} = m_f \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} [dg(x)/dx]^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} [1+qg(x)]^4 dx} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} [1+qg(x)]^2 dx}}.$$

При конечных значениях u аппроксимируем распределение $F_N(u)$ его предельным выражением (16), где $\Pi(u)$ определяется из (17). Так как функция $\Pi(u)$ (17) является невозрастающей функцией u только при $u > \sqrt{2}$, то аналогично [3—7] используем аппроксимацию

$$F_N(u) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{m_f \sigma_f}{2\pi} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] & \text{при } u \geq \sqrt{2}; \\ 0 & \text{при } u < \sqrt{2}. \end{cases} \quad (18)$$

Точность формулы (18) возрастает с увеличением m , u , m_f и $m_f(\sigma_f)$.

Найдем теперь выражение для функции $W_S(u)$. Учтем, что при выполнении (7) надежные ОМП η_m и κ_m расположены в малой окрестности точки

(η_0, κ_0). Поэтому для расчета плотности вероятности $W_S(u)$ достаточно исследовать поведение логарифма ФОП (3) в малой окрестности этой точки. Как мечалось выше, статистические характеристики логарифма ФОП в окрестности точки (η_0, κ_0) асимптотически совпадают с характеристиками гауссовского случайного поля $M(\eta, \kappa) = L_t(\eta) + L_f(\kappa)$. Тогда при выполнении (2), получаем $W_S(u) = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} W_t(u\sigma - x)W_f(x)dx$, где $W_t(x)$ и $W_f(x)$ — плотности ве-

роятностей величин абсолютных максимумов случайных процессов $L_t(\eta)\sqrt{2}/\sigma_S$ и $L_f(\kappa)\sqrt{2}/\sigma_S$ при $\eta, \kappa \in \Lambda_S$, $\sigma = \sqrt{2}\sigma_N/\sigma_S = \sqrt{2C_f(0)}$. В пользу этого, аналогично [3, 4], методом локально-марковской аппроксимации [7], при выполнении (2), (7) получаем выражение

$$W_t(x) = \frac{2\sqrt{2}}{2-g} z \exp\left[\frac{2z^2(3-g)}{(2-g)^2}\right] \left\{ \exp\left(-\frac{\sqrt{2}xz}{2-g}\right) \Phi\left(x - \frac{z}{\sqrt{2}} \frac{4-g}{2-g}\right) - \exp\left[\frac{3z^2}{(2-g)^2} + \frac{z}{2-g}(z - 2\sqrt{2}x)\right] \Phi\left(x - \frac{z}{\sqrt{2}} \frac{6-g}{2-g}\right) \right\}. \quad (1)$$

Аналогично [5] при выполнении (2), (7) находим

$$W_f(x) = \exp[-(x\sqrt{2} - z)^2/4]/\sqrt{2\pi}. \quad (2)$$

Точность формул (19), (20) возрастает с увеличением μ и z .

Таким образом, согласно (15) получаем

$$P_0 = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} F_N(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} W_t(u\sigma - x)W_f(x)dx \right] du, \quad (21)$$

где функции $F_N(u)$, $W_t(x)$ и $W_f(x)$ определяются из (18)–(20).

Точность аппроксимации (21) возрастает с увеличением μ , z , m_t , m_f (σ_f). Сплошной линией на рис. 2 показана предельная (при $q \ll 1$) зависимость вероятности $P_a = 1 - P_0$ аномальной ошибки от ОСШ (6), рассчитанная по формуле (21) для случая совместных ОМП времени прихода и частоты радиопульса (1). Там же штриховой линией нанесена соответствующая зависимость для ОМП времени прихода случайного радиопульса с априори известной частотой [3]. Кривые на рис. 2 рассчитаны при $m_t = m_f = 20$ и $g(x) = [1 + (\pi x/2)^2]^{-1}$. Из рис. 2 следует, что отсутствие априорной информации о частоте случайного радиопульса приводит к заметному увеличению вероятности аномальных ошибок ОМП его времени прихода.

Исследуем теперь распределения совместных ОМП времени прихода и частоты случайного радиопульса при наличии аномальных ошибок. Так как

надежные и аномальные решения об оценке являются несовместимыми событиями, то условную (при фиксированных η_0 и κ_0) совместную плотность вероятности $W_m(\eta_m, \kappa_m)$ нормированных оценок η_m и κ_m с учетом аномальных ошибок можно представить в виде

$$W_m(\eta_m, \kappa_m) = P_0 W_{m0}(\eta_m, \kappa_m) + (1 - P_0) W_{ma}(\eta_m, \kappa_m),$$

где $W_{m0}(\eta, \kappa)$ — совместная плотность вероятности надежных, а $W_{ma}(\eta, \kappa)$ — аномальных оценок. Если выполняются условия (7), (14), то распределения надежных и аномальных оценок можно считать непрерывными в пределах области Λ значений времени прихода и частоты [6, 7]. При этом для распределения аномальных оценок можно использовать аппроксимацию

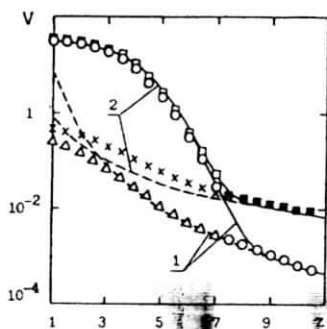


Рис. 1

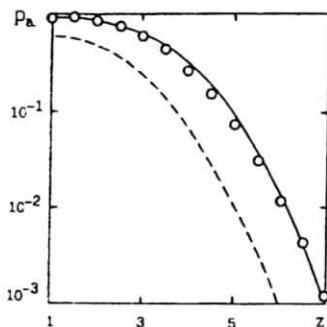


Рис. 2

$W_{ma}(\eta, \kappa) = 1/m_t m_f$ при $(\eta, \kappa) \in \Lambda$ и $W_{ma}(\eta, \kappa) = 0$ при $(\eta, \kappa) \notin \Lambda$ [6, 7], а для надежных оценок — аппроксимацию (12). Тогда условные маргинальные плотности вероятностей оценок η_m и κ_m равны

$$W_t(\eta_m) = P_0 W_{t0}(\eta_m) + (1 - P_0) / m_t$$

и

$$W_f(\kappa_m) = P_0 W_{f0}(\kappa_m) + (1 - P_0) / m_f$$

соответственно, где $W_{t0}(\eta_m)$ и $W_{f0}(\kappa_m)$ определяются из (10), (11). В результате для условных смещений и рассеяний ОМП η_m и κ_m при наличии аномальных ошибок получаем выражения

$$\begin{aligned} b_t &= \langle \eta_m - \eta_0 \rangle = (1 - P_0)(\eta_a - \eta_0), \quad b_f = \langle \kappa_m - \kappa_0 \rangle = (1 - P_0)(\kappa_a - \kappa_0), \\ V_t &= \langle (\eta_m - \eta_0)^2 \rangle = P_0 V_{t0} + (1 - P_0)[(\eta_a - \eta_0)^2 + m_t^2 / 12], \end{aligned} \quad (22)$$

$$V_f = \langle (\kappa_m - \kappa_0)^2 \rangle = P_0 V_{f0} + (1 - P_0) [(\kappa_a - \kappa_0)^2 + m_f^2 / 12]$$

$$V_{gf} = \langle (\eta_m - \eta_0)(\kappa_m - \kappa_0) \rangle = (1 - P_0)(\eta_a - \eta_0)(\kappa_a - \kappa_0)$$

где V_{f0} , V_{t0} и P_0 определяются из (13), (21), $\eta_a = (\eta_{\max} + \eta_{\min}) / 2$, $\kappa_a = (\kappa_{\max} + \kappa_{\min}) / 2$. Из (22) следует, что при $\eta_0 = \eta_a$ и $\kappa_0 = \kappa_a$ ОМП η_m и κ_m являются несмещенными и некоррелированными. Сплошными линиями рис. 1 нанесены предельные (при $q \ll 1$) зависимости $V = V_t(z)$, $V = V_f(z)$ рассеяний (22) совместных ОМП времени прихода (кривая 1) и частоты (кривая 2) случайного радиоимпульса (1). Кривые на рис. 1 рассчитаны при $\eta_0 = \eta_a$, $\kappa_0 = \kappa_a$, $m_t = m_f = 20$, $g(x) = [1 + (\pi x / 2)^2]^{-1}$. Из рис. 1 видно, что зависимости рассеяний оценок от ОСШ z имеют пороговый характер — с уменьшением ОСШ рассеяния оценок быстро возрастают от значений рассеяний надежных оценок (штриховые линии) до предельных значений $m_t^2 / 12$ и $m_f^2 / 12$.

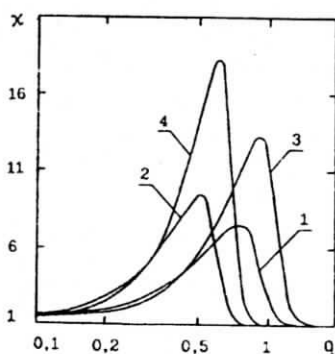


Рис. 3

вая 2 — $\mu = 200$, $m_t = m_f = 20$, кривая 3 — $\mu = 100$, $m_t = m_f = 50$, кривая 4 — $\mu = 200$, $m_t = m_f = 50$. Из рис. 3 видно, что в случаях надежной (большие ОСШ) и аномальной оценок (малые ОСШ) рассеяния ОМП времени прихода при априори известной и неизвестной частоте сигнала практически совпадают. Однако в пороговой области $z = 3 \dots 9$, когда возможны как надежные, так и аномальные оценки, проигрыш может быть значительным и увеличивается с ростом m_t и m_f .

С целью экспериментальной проверки эффективности совместных ОМП времени прихода и частоты случайного радиоимпульса (1) и установлении границ применимости асимптотически точных формул для характеристик оценок выполнялось статистическое моделирование алгоритма ОМП

ЭВМ. В процессе моделирования с шагом $\Delta\eta = 0,01$ по переменной η и с шагом $\Delta\kappa = 0,1$ по переменной κ формировались отсчеты гауссовского случайного поля с математическим ожиданием (4) и корреляционной функцией (5), а оценки η_m и κ_m фиксировались как координаты наибольшего отсчета поля в пределах области значений $\eta \in [0; m_\eta]$, $\kappa \in [0; m_\kappa]$. При этом среднеквадратическая погрешность ступенчатой аппроксимации непрерывных реализаций поля не превышала 14%. На основе обработки не менее 10^4 реализаций случайного поля вычислялись выборочные характеристики ОМП. Некоторые результаты моделирования при $\eta_0 = \eta_a$, $\kappa_0 = \kappa_a$, $m_\eta = m_\kappa = 20$ и $g(x) = [1 + (\pi x / 2)^2]^{-1}$ показаны на рис. 1, 2, где приведены соответствующие теоретические зависимости. На рис. 1 треугольниками и крестиками нанесены предельные (при $q \ll 1$) экспериментальные значения рассеяний надежных ОМП η_m и κ_m соответственно, а кружочками и прямоугольниками — рассеяния ОМП η_m и κ_m с учетом аномальных ошибок. На рис. 2 кружочками нанесены экспериментальные значения вероятности P_0 аномальной ошибки.

Из результатов моделирования следует, что теоретические асимптотические выражения для характеристик ОМП удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные уже при $z > 1,5$. 2 и $m_\eta = m_\kappa = 7 \dots 10$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сосулин Ю. Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. — М.: Радио и связь, 1992. — 304 с.
2. Радиотехнические системы / Под ред. Ю. М. Казаринова. — М.: Высшая школа, 1990. — 496 с.
3. Трифонов А. П., Захаров А. В. Прием сигнала с неизвестной задержкой при наличии модулирующей помехи // Радиотехника. — 1986. — №4. — С. 36—41. (Изв. высш. учеб. заведений).
4. Трифонов А. П., Захаров А. В., Черноярков О. В. Пороговые характеристики квазиравдоподобной оценки времени прихода случайного импульса // Радиотехника. — 1998. — №10. — С. 18—28. (Изв. высш. учеб. заведений).
5. Трифонов А. П., Парфенов В. И. Прием случайного импульса с неизвестными временем прихода и центральной частотой спектра мощности // Радиотехника и электроника. — 1998. — Т. 43. — №8. — С. 959—965.
6. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
7. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
8. Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских процессов и полей. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — 176 с.

Воронежский государственный ун-т.

Поступила в редакцию 20.04.2001.