

216 p-6434/2002/45/4
62

216

ISSN 0021-3482

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XLV 2002

РАДИОФИЗИКА

Васильев В. В., Рыбаков Н. А. Волны в нелинейной области распространения электромагнитных волн в плазме

Бенедиктов В. В., Бенедиктова Е. А. Влияние нелинейности на распространение электромагнитных волн в плазме

Кузнецов Н. К., Тихонов А. С., Шенников Е. О. Влияние нелинейности на распространение электромагнитных волн в плазме

Бискупин М. А., Малоземов Н. А. Влияние нелинейности на распространение электромагнитных волн в плазме

Усачев Д. А., Венин С. В., Фоминский А. В. Влияние нелинейности на распространение электромагнитных волн в плазме

Беломонок А. В., Яковлев А. В. Влияние нелинейности на распространение электромагнитных волн в плазме

Трифонов А. П., Костылев В. И. Влияние нелинейности на распространение электромагнитных волн в плазме

2002
ТОМ 45
6

ИЗДАНИЕ НИЖЕГОРОДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

РАДИОФИЗИКА

ежемесячный научно-технический журнал

Издаётся с апреля 1958 г.

Том XLV № 6

Нижний Новгород

2002

Содержание

Гавриленко В. Г., Липатов Б. Н., Нечаева М. Б. Анализ отклика радиоинтерферометра со сверхдлинной базой на излучение радиисточника, прошедшее через околосолнечную плазму	459
Данилкин Н. П., Котонаева Н. Г. Особенности радиозондирования ионосферы с орбитального комплекса «Мир»	473
Васьков В. В., Рябова Н. А. Возбуждение добавочной области коротковолновых колебаний плазмы в экспериментах по нагреву ионосферы полем мощной радиоволны	482
Беликович В. В., Бенедиктов Е. А. Исследование сумеречной D -области ионосферы с помощью искусственных периодических неоднородностей	502
Кузьмичёв И. К., Тищенко А. С., Шёнеманн К. О предельных возможностях уменьшения размеров зеркал открытых резонаторов	509
Бисярин М. А., Молотков И. А. Модовая структура и огибающая короткого импульса в градиентном световоде с продольной неоднородностью и пространственной кривизной	516
Усанов Д. А., Вениг С. Б., Флешель Б. Л. Особенности работы СВЧ генератора на диоде Ганна при смене знака нелинейной реактивной составляющей проводимости диода	527
Беляков А. В., Якимов А. В. Влияние аналого-цифрового преобразователя на вероятностные характеристики гауссова шума	533
Трифонов А. П., Костылев В. И. Энергетическое обнаружение узкополосных радиосигналов на фоне шума неизвестной интенсивности	538

УДК 537.86:519.2

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ УЗКОПОЛОСНЫХ РАДИОСИГНАЛОВ НА ФОНЕ ШУМА НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

А. П. Трифонов, В. И. Костылев

Найдено распределение решающей статистики адаптивного энергетического обнаружителя с обучением. Получены выражения для вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения.

ВВЕДЕНИЕ

В статистической радиофизике широко используется модель узкополосного радиосигнала [1]

$$s(t) = \operatorname{Re}[S(t) \exp(j2\pi f_0 t)], \quad f_0 \gg \Delta f, \quad (1)$$

где $S(t) = AU(t) \exp(j\varphi)$ — комплексная огибающая сигнала (A — амплитуда сигнала, $U(t)$ — нормированная комплексная огибающая, φ — начальная фаза), f_0 — несущая частота, Δf — ширина спектра. Для обнаружения в белом шуме узкополосных радиосигналов с известной огибающей $S(t)$ широко применяется корреляционный приёмник. Для обнаружения узкополосного радиосигнала $s(t)$ неизвестной формы в классической работе [2] предложено использовать энергетический обнаружитель, состоящий из последовательно соединённых полосового фильтра, энергетического приёмника и порогового устройства.

Входной сигнал энергетического обнаружителя

$$x_{\text{in}}(t) = \theta s(t) + n_{\text{in}}(t), \quad (2)$$

где $\theta = 0; 1$, представляет собой при гипотезе H_1 смесь обнаруживаемого узкополосного радиосигнала $s(t)$ и белого шума $n_{\text{in}}(t)$, а при гипотезе H_0 — только белый шум $n_{\text{in}}(t)$. Входящий в (2) априори неизвестный бинарный параметр θ [1] принимает значения 0 или 1, совпадающие с индексом гипотезы.

Полосовой фильтр предназначен [2] для ограничения ширины спектра шума, поэтому центральная частота и ширина полосы пропускания фильтра совпадают с несущей f_0 и шириной спектра Δf обнаруживаемого сигнала (1). Предполагается [2], что искажение обнаруживаемого сигнала $s(t)$ фильтром незначительно и им можно пренебречь. При этом выходной сигнал полосового фильтра имеет вид

$$x(t) = \theta s(t) + n(t), \quad (3)$$

где $n(t)$ — профильтрованный шум. Сигнал (3) подаётся на вход энергетического приёмника, назначение которого — сформировать на своём выходе напряжение $u(t)$, пропорциональное энергии обрабатываемой реализации сигнала $x(t)$, т. е.

$$u(t) = 1(t - T) \Xi, \quad (4)$$

где

$$1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

— единичная ступенчатая функция, T — длительность интервала $[0, T]$ времени обработки сигнала $x(t)$ в энергетическом приёмнике,

$$\Xi = 2E_T[x(t)]/N_0 \quad (5)$$

— негауссовская [3] статистика обнаружения (решающая статистика), $E_T[x(t)]$ — энергия части реализации сигнала $x(t)$, попадающей в интервал $[0, T]$ времени обработки, N_0 — односторонняя спектральная плотность мощности белого шума $n_{in}(t)$. Используя теорему Котельникова, энергию $E_T[x(t)]$ можно представить в виде

$$E_T[x(t)] = \frac{1}{2\Delta f} \sum_{k=0}^B \left| X\left(\frac{k}{\Delta f}\right) \right|^2, \quad (6)$$

где $B = T\Delta f$ — база обработки сигнала $x(t)$ (база обнаружения), $X(t)$ — комплексная огибающая узкополосного сигнала $x(t)$ на выходе полосового фильтра.

Выходной сигнал (4) энергетического приёмника подаётся на пороговое устройство, осуществляющее его сравнение с пороговым уровнем h . При $\Xi \geq h$ принимается решение о наличии сигнала, а при $\Xi < h$ — о его отсутствии.

1. ВЕРОЯТНОСТЬ ЛОЖНОЙ ТРЕВОГИ

Из (5) и (6) нетрудно получить, что в отсутствие на входе энергетического обнаружителя сигнала $s(t)$ решающая статистика Ξ имеет χ^2 -распределение [4, 5] с числом степеней свободы $\mu = 2(B + 1)$, т. е.

$$\Xi|H_0 = \chi_\mu^2, \quad (7)$$

где χ_a^2 — случайная величина, имеющая χ^2 -распределение с a степенями свободы.

Вероятность ложной тревоги $P_0 = \Pr\{\Xi \geq h|H_0\} = 1 - F_{\chi^2|\mu}(h)$ энергетического обнаружителя можно представить в виде

$$P_0 = \Gamma(B + 1, h/2)/B! = 1 - P(B + 1, h/2), \quad (8)$$

где $F_{\chi^2|a}(x)$ — функция χ^2 -распределения с a степенями свободы, $\Gamma(a, b) = \Gamma(a) - \gamma(a, b)$ — дополнительная неполная гамма-функция, $\Gamma(a)$ — гамма-функция, $\gamma(a, b)$ — неполная гамма-функция, $P(a, b) = \gamma(a, b)/\Gamma(a)$ — нормированная неполная гамма-функция [4]. Пороговый уровень h , необходимый для обеспечения требуемой вероятности ложной тревоги P_0 , может быть определён как

$$h = F_{\chi^2|\mu}^{-1}(1 - P_0). \quad (9)$$

Здесь $F_{\chi^2|a}^{-1}(P)$ — функция, обратная $F_{\chi^2|a}(x)$.

Выражения (7) и (8) неявно предполагают, что спектральная плотность мощности N_0 шума априори точно известна. Эта информация использовалась, в частности, при нормировке статистики обнаружения (5). Если величина N_0 априорно неизвестна, то вместо истинного значения N_0 в (5) будем использовать некоторое прогнозируемое (ожидаемое) значение $\tilde{N}_0$: $\tilde{\Xi} = 2E_T[x(t)]/\tilde{N}_0$. Если обозначить через $\delta N_0 = (\tilde{N}_0 - N_0)/N_0$ относительную погрешность, с которой известна спектральная плотность мощности шума, то, как нетрудно показать, выражение для вероятности ложной тревоги $\tilde{P}_0 = \Pr\{\tilde{\Xi} \geq h|H_0\}$ примет вид

$$\tilde{P}_0 = \Gamma(B + 1, (1 + \delta N_0)h/2)/B!. \quad (10)$$

Правая часть выражения (10) совпадает с правой частью (8) при $\delta N_0 \rightarrow 0$. На рис. 1 для $B = 100$ и нескольких пороговых уровней h , определенных по формуле (9) (пороговый уровень h_8 соответствует вероятности ложной тревоги $P_0 = 10^{-8}$, уровень h_6 — вероятности $P_0 = 10^{-6}$, а уровень h_4 — вероятности $P_0 = 10^{-4}$), приведены графики зависимости отношения $\tilde{P}_0/P_0$ от δN_0 , рассчитанные с использованием формул (8) и (10). Как следует из рис. 1, неточность знания спектральной плотности мощности шума существенно влияет на вероятность ложной тревоги: для принятых значений B и h погрешность δN_0 в $\pm 10\%$ может привести к изменению вероятности ложной тревоги на 3 порядка.

Неопределённость относительно N_0 не позволяет выбрать порог h , априорно обеспечивающий заданную вероятность ложной тревоги. Будем полагать, что в целях стабилизации вероятности ложной тревоги дисперсия $D = N_0 \Delta f/2$ шума $n(t)$ на выходе полосового фильтра измеряется заранее по известному правилу [6]

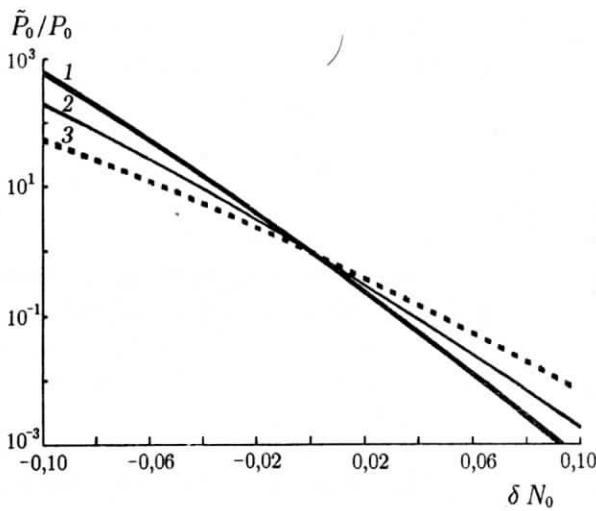


Рис. 1. Влияние погрешности, с которой известна спектральная плотность мощности шума, на вероятность ложной тревоги энергетического обнаружителя. Кривые 1–3 соответствуют $h = h_8$; h_6 ; h_4

$$\hat{D} = \frac{1}{2L} \sum_{k=0}^L \left| X \left(-\frac{k+1}{\Delta f} \right) \right|^2$$

в течение интервала времени $[-(L+1)/\Delta f, -1/\Delta f]$ длительностью $\tau = L/\Delta f$, где L — база обработки шума при обучении (база обучения), $\hat{D} = \hat{N}_0 \Delta f/2$ — оценка дисперсии D шума на выходе полосового фильтра, $\hat{N}_0$ — оценка спектральной плотности мощности входного белого шума. Описанная процедура соответствует задаче обнаружения при обучении с учителем, когда система до начала обнаружения сигнала настраивается на нужные значения параметра обстановки (в рассматриваемом случае — на интенсивность шума) [7]. При этом предполагается, что на интервале времени обучения обнаруживаемый сигнал отсутствует. Нетрудно убедиться, что

$$\hat{N}_0 = \frac{N_0}{\nu} \chi_\nu^2, \quad (11)$$

где $\nu = 2(L+1)$ — число степеней свободы.

Используя оценку $\hat{N}_0$ вместо истинного значения N_0 при нормировке, имеем следующее выражение для статистики обнаружения:

$$\hat{\Xi} = 2E_T[x(t)]/\hat{N}_0. \quad (12)$$

Из (7) и (11) можно получить

$$\hat{\Xi}|H_0 = \nu \chi_\mu^2 / \chi_\nu^2 = \mu \mathcal{F}_{(\mu, \nu)},$$

где $\mathcal{F}_{(a,b)}$ — случайная величина, имеющая распределение Фишера—Снедекора со степенями свободы a, b [4, 5]. Воспользовавшись формулой 26.6.11 из [4], нетрудно убедиться, что

$$\hat{\Xi}|H_0 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \chi_\mu^2 = \Xi|H_0. \quad (13)$$

Таким образом, при отсутствии обнаруживаемого сигнала распределения решающих статистик адаптивного (с обучением) и традиционного энергетических обнаружителей асимптотически одинаковые.

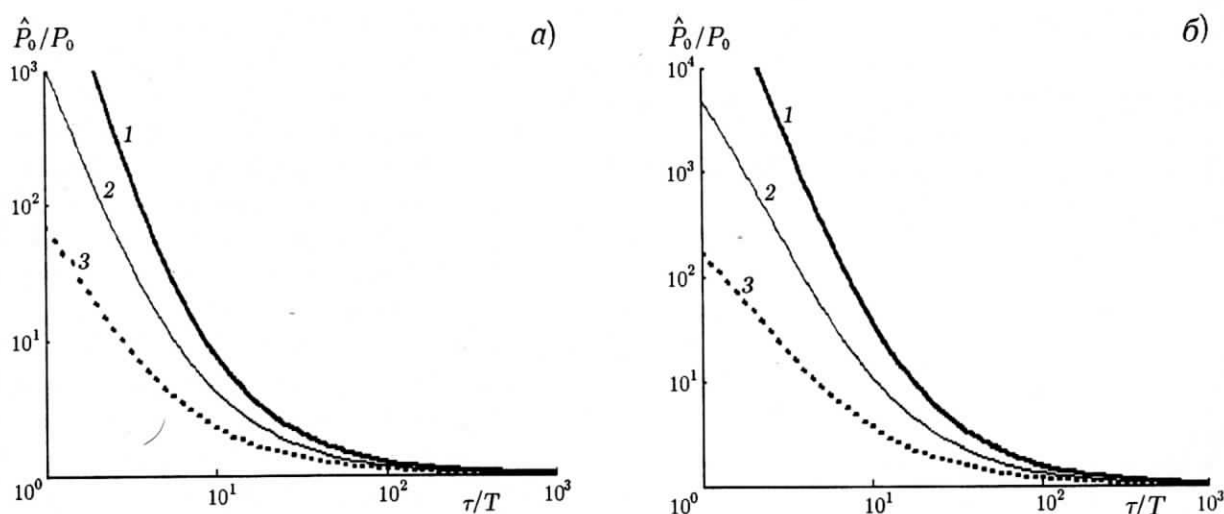


Рис. 2. Отношение вероятностей ложной тревоги адаптивного и традиционного энергетических обнаружителей при $B = 100$ (а) и $B = 10$ (б). Кривые 1–3 соответствуют $h = h_8; h_6; h_4$

Используя приведённые в [4] выражения для функции распределения Фишера—Снедекора, можно получить формулу для вероятности ложной тревоги энергетического обнаружителя с обучением в виде

$$\hat{P}_0 = \Pr\{\hat{\Xi} \geq h|H_0\} = I_{\frac{\nu}{\nu+h}}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\mu}{2}\right) = 1 - I_{\frac{h}{\nu+h}}\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}\right), \quad (14)$$

где $I_z(a, b) = B_z(a, b)/B(a, b)$ — нормированная неполная бета-функция, $B_z(a, b)$ — неполная бета-функция, $B(a, b)$ — бета-функция [4]. Воспользовавшись равенством [4]

$$1 - I_z(a, b) = (1 - z)^{a+b-1} \sum_{k=0}^{a-1} C_{a+b-1}^k \left(\frac{z}{1-z}\right)^k,$$

где a и b — произвольные целые числа, C_m^k — биномиальный коэффициент (число сочетаний из m по k), выражение (14) можно преобразовать к виду

$$\hat{P}_0 = \left(\frac{\nu}{\nu+h}\right)^{B+\nu/2} \sum_{k=0}^B C_{B+\nu/2}^k \left(\frac{h}{\nu}\right)^k. \quad (15)$$

Поскольку $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{\nu/(\nu+h)\}^{B+\nu/2} = \exp(-h/2)$ вследствие второго замечательного предела и $\lim_{\nu \rightarrow \infty} C_{B+\nu/2}^k / \nu^k = 2^{-k}/k!$ при любых конечных B и k , из (15) получаем

$$\hat{P}_0 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{h}{2}\right) \sum_{k=0}^B \frac{(h/2)^k}{k!} = \frac{\Gamma(B+1, h/2)}{B!} = P_0. \quad (16)$$

В (16) учтена возможность представления дополнительной неполной гамма-функции с целым первым параметром в виде произведения факториала, экспоненты и полинома [4]:

$$\Gamma(m, a) = (m-1)! \exp(-a) \sum_{l=0}^{m-1} \frac{a^l}{l!}. \quad (17)$$

Правая часть (16) подтверждает формулу (13): с точки зрения вероятности ложной тревоги энергетическое обнаружение с обучением асимптотически эквивалентно энергетическому обнаружению при априорно известной спектральной плотности мощности шума.

На рис. 2 в зависимости от отношения τ/T времён обучения и обнаружения приведены рассчитанные с использованием формул (14) и (8) графики отношения $\hat{P}_0/P_0$ вероятностей ложной тревоги адаптивного и традиционного энергетических обнаружителей для тех же значений параметра h , что и на рис. 1. Рис. 2а построен для $B = 100$, а рис. 2б — для $B = 10$. На рис. 3 для той же, что на рис. 1 и 2а, базы обработки сигнала приведена зависимость относительной разности $\delta h = (\hat{h} - h)/h$ порога $\hat{h}$ (необходимого для обеспечения требуемой вероятности ложной тревоги $\hat{P}_0$ адаптивного энергетического обнаружителя) и порога h (необходимого для обеспечения такой же вероятности ложной тревоги $P_0 = \hat{P}_0$ традиционного энергетического обнаружителя, использующего априорную информацию о спектральной плотности мощности шума) от отношения τ/T времён обучения и обнаружения.

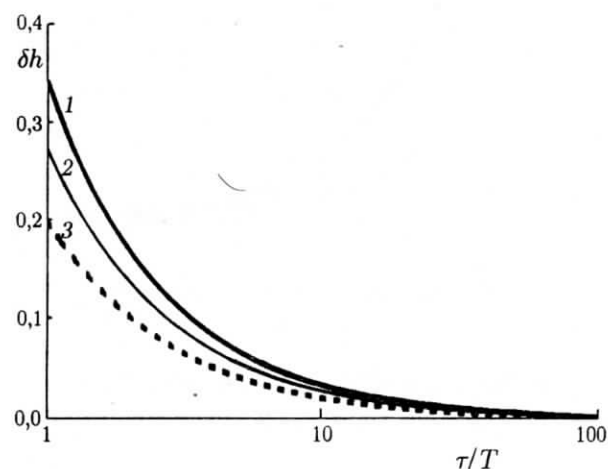


Рис. 3. Относительная разность пороговых уровней, обеспечивающих одинаковую вероятность ложной тревоги адаптивного и традиционного энергетических обнаружителей при $B = 100$. Кривые 1–3 соответствуют $P_0 = \hat{P}_0 = 10^{-8}$; 10^{-6} ; 10^{-4}

Как видно из хода кривых на рис. 2 и 3, различие вероятностей ложной тревоги $\hat{P}_0$ и P_0 и порогов $\hat{h}$ и h убывает с ростом времени обучения τ . Однако для обеспечения близких значений $\hat{P}_0$ и P_0 ($\hat{h}$ и h) необходимо время адаптации τ , превосходящее время обнаружения T почти в 100 раз. При этом с ростом базы обнаружения B необходимое относительное время адаптации τ/T несколько уменьшается.

2. ОБНАРУЖЕНИЕ РАДИОСИГНАЛА С ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ АМПЛИТУДОЙ

Если на входе энергетического обнаружителя наряду с шумом $n_{in}(t)$ существует детерминированный обнаруживаемый сигнал $s(t)$ (т. е. $\theta = 1$ в формуле (2)) и спектральная плотность мощности шума N_0 известна, то нетрудно показать, что

$$\Xi|H_1 = \chi_{\mu, d_T^2}^2, \quad (18)$$

где $\chi_{a, \lambda}^2$ — случайная величина, имеющая нецентральное χ^2 -распределение с a степенями свободы и параметром нецентральности λ ,

$$d_T^2 = 2E_T[s(t)]/N_0 \quad (19)$$

— энергетическое отношение сигнал/шум (сигнальная составляющая статистики обнаружения Ξ). Из (18) следует, что при гипотезе H_1 и детерминированных амплитуде A и начальной фазе φ обнаруживаемого радиосигнала характеристическая функция статистики обнаружения Ξ имеет вид

$$\Theta_{\Xi|H_1}(j\eta; \mu, Aq_T) = (1 - 2j\eta)^{-\mu/2} \exp\left(\frac{j\eta A^2 q_T^2}{1 - 2j\eta}\right), \quad (20)$$

где $q_T^2 = N_0^{-1} \int_0^T |U(t)|^2 dt$. При случайных параметрах A и φ выражение (20) можно трактовать как условную характеристическую функцию статистики обнаружения Ξ . Найти безусловную характери-

стическую функцию статистики Ξ можно посредством усреднения характеристической функции (20) по случайным параметрам.

Рассмотрим вначале случай обнаружения радиосигнала с детерминированной амплитудой A , но случайной начальной фазой φ , распределённой по произвольному закону. Поскольку правая часть (20) не зависит от φ , усреднение характеристической функции в этом случае не требуется, и формула (18) остаётся верной для случайной фазы. Вероятность правильного энергетического обнаружения $P_1 = \Pr\{\Xi \geq h | H_1\}$ радиосигнала с детерминированной амплитудой и случайной начальной фазой может быть представлена в виде ряда:

$$P_1 = \exp\left(-\frac{d_T^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_T^{2m} \Gamma(m+B+1, h/2)}{2^m m! (m+B)!}. \quad (21)$$

Как нетрудно убедиться, при малых значениях энергетического отношения сигнал/шум ($d_T^2 \approx 0$) вероятность правильного обнаружения мало отличается от вероятности ложной тревоги ($P_1 \approx P_0$), а при $h \approx 0$ вероятность правильного обнаружения близка к единице.

Если спектральная плотность мощности шума N_0 неизвестна и применяется обучение, так что статистика энергетического обнаружения имеет вид (12), то с учётом (11) и (18) можно получить

$$\hat{\Xi} | H_1 = \nu \chi_{\mu, d_T^2}^2 / \chi_{\nu}^2 = \mu \mathcal{F}_{(\mu, \nu), d_T^2}, \quad (22)$$

где $\mathcal{F}_{(a,b),\lambda}$ — случайная величина, имеющая нецентральное распределение Фишера—Снедекора [4, 5] со степенями свободы a, b и параметром нецентральности λ . Воспользовавшись формулой 26.6.23 из [4], нетрудно убедиться, что

$$\hat{\Xi} | H_1 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \chi_{\mu, d_T^2}^2 = \Xi | H_1. \quad (23)$$

Из (13) и (23) очевидно, что потери в эффективности адаптивного энергетического обнаружения радиосигнала со случайной начальной фазой, обусловленные априорной неопределённостью спектральной плотности мощности шума, асимптотически убывают с увеличением базы обучения L .

Приведённое в [4] выражение 26.6.21 позволяет записать формулу для вероятности правильного адаптивного энергетического обнаружения узкополосного радиосигнала с детерминированной амплитудой и случайной начальной фазой в виде

$$\hat{P}_1 = 1 - \Gamma(B-L) \frac{\nu^B h^L}{(\nu+h)^{B+L}} \exp\left(-\frac{d_T^2}{2}\right) \times \\ \times \sum_{k=0}^L \frac{(1+\nu/h)^k}{(B+k+1)!(L-k)!} {}_1F_1\left(B+L+2; B+k+2; d_T^2 \frac{L+1}{\nu+h}\right), \quad (24)$$

обобщающем формулу (21) и переходящем в последнюю при $L \rightarrow \infty$. Здесь ${}_1F_1(a; b; z)$ вырожденная (конфлюэнтная) гипергеометрическая функция (функция Куммера) [4, 8].

При целочисленных значениях первых двух параметров функцию Куммера можно выразить через полиномы и экспоненту [8]:

$${}_1F_1(k; m; z) = \frac{(m-2)!(1-m)_k}{(k-1)!} z^{1-m} \left[\sum_{l=0}^{m-k-1} \frac{(1+k-m)_l}{l!(2-m)_l} z^l - \exp(z) \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(1-k)_l}{l!(2-m)_l} (-z)^l \right],$$

где $(a)_k$ — символ Похгаммера [4]. Поскольку как база обнаружения B , так и база обучения L целые по определению, формулу (24) нетрудно преобразовать к виду

$$\hat{P}_1 = 1 - (B - L - 1)! \frac{\nu^B h^L}{(\nu + h)^{B+L}} \exp\left(-\frac{d_T^2}{2}\right) \sum_{k=0}^L \frac{(1 + \nu/h)^k (B + L)!}{[(B + k + 1)!]^2 (L - k)!} \times \\ \times (-1 - B - k)_{B+L+2} \left(d_T^2 \frac{L+1}{\nu + h}\right)^{-1-B-L} \left[\sum_{l=0}^{k-L-1} \frac{(1 + L - k)_l}{l! (-B - k)_l} \left(d_T^2 \frac{L+1}{\nu + h}\right)^l - \right. \\ \left. - \exp\left(d_T^2 \frac{L+1}{\nu + h}\right) \sum_{l=0}^{B+L+1} \frac{(-1 - B - L)_l}{l! (-B - k)_l} \left(-d_T^2 \frac{L+1}{\nu + h}\right)^l \right].$$

3. ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАМИРАЮЩЕГО РАДИОСИГНАЛА

Рассмотрим теперь обнаружение замирающего радиосигнала $s(t)$, имеющего не только случайную начальную фазу φ , но и случайную амплитуду A . От амплитуды обнаруживаемого сигнала $s(t)$ зависит его энергия $E_T[s(t)]$ и, следовательно, энергетическое отношение сигнал/шум d_T^2 , определённое в (19). Обе эти величины при обнаружении замирающего радиосигнала случайны. Очевидно также, что если амплитуда A обнаруживаемого радиосигнала случайна, то закон распределения решающей статистики Ξ традиционного энергетического обнаружителя будет отличаться от нецентрального χ^2 -распределения, а закон распределения решающей статистики $\hat{\Xi}$ адаптивного энергетического обнаружителя — от нецентрального распределения Фишера—Снедекора. Следовательно, если обнаруживаемый по энергии сигнал имеет случайную амплитуду, формулы (18) и (22) использовать нельзя.

Предположим вначале, что спектральная плотность мощности шума N_0 известна. В этом случае найти безусловную характеристическую функцию статистики энергетического обнаружения можно, усредняя характеристическую функцию (20) по случайной амплитуде A :

$$\Theta_{\Xi|H_1}(j\eta; \mu, q_T^2, \Omega) = (1 - 2j\eta)^{-\mu/2} \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{j\eta A^2 q_T^2}{1 - 2j\eta}\right) W(A; \Omega) dA, \quad (25)$$

где $W(A; \Omega)$ — плотность вероятности случайной амплитуды A , Ω — вектор параметров, характеризующих закон распределения случайной амплитуды. В частности, если амплитуда A распределена по закону Рэлея, то, вычисляя интеграл в (25), можно получить

$$\Theta_{\Xi|H_1}(j\eta; B, d_{Tm}^2) = [1 - 2(d_{Tm}^2 + 1)j\eta]^{-1} (1 - 2j\eta)^{-B}, \quad (26)$$

где $d_{Tm}^2 = \overline{E_T[s(t)]}/N_0 = \overline{A^2} q_T^2 / 2$.

Правая часть (26) представляет собой произведение характеристических функций экспоненциального и χ^2 -распределений. Следовательно, при энергетическом обнаружении замирающего радиосигнала решающая статистика может быть представлена в виде

$$\Xi|H_1 = e_{2(d_{Tm}^2+1)} + \chi_{2B}^2, \quad (27)$$

где e_a — случайная величина, распределённая по экспоненциальному закону с параметром a , и слагаемые в правой части (27) статистически независимы. Формула, аналогичная (27), была получена другим способом в [9] для частного случая, а именно в предположении, что обнаруживаемый сигнал имеет равномерно распределённую случайную начальную фазу. В настоящей работе показано, что эта формула

верна при любой начальной фазе, как детерминированной, так и случайной с произвольным законом распределения.

Воспользовавшись результатами [10], можно получить выражение для вероятности правильного энергетического обнаружения замирающего радиосигнала со случайной рэлеевской амплитудой и произвольной начальной фазой на фоне шума известной интенсивности:

$$P_1 = P_0 + \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2} \right)^B \exp \left[-\frac{h}{2(d_{Tm}^2 + 1)} \right] P \left(B + 1, \frac{d_{Tm}^2 h}{2(d_{Tm}^2 + 1)} \right). \quad (28)$$

Здесь, как и в (8), $P(a, b)$ — нормированная неполная гамма-функция. Если воспользоваться формулой (17), выражение (28) можно преобразовать к виду

$$P_1 = P_0 + \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2} \right)^B \left\{ \exp \left[-\frac{h}{2(d_{Tm}^2 + 1)} \right] - \exp \left(-\frac{h}{2} \right) \sum_{k=0}^B \frac{1}{k!} \left[\frac{d_{Tm}^2 h}{2(d_{Tm}^2 + 1)} \right]^k \right\}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда спектральная плотность мощности шума неизвестна и используется процедура обучения. Из (27) и (11) находим

$$\hat{\Xi} | H_1 = \nu \frac{e^{2(d_{Tm}^2 + 1)} + \chi_{2B}^2}{\chi_\nu^2} = 2 \left[(d_{Tm}^2 + 1) \mathcal{F}_{(2, \nu)} + B \mathcal{F}_{(2B, \nu)} \right],$$

т. е. при гипотезе H_1 решающая статистика $\hat{\Xi}$ представляет собой взвешенную сумму двух независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение Фишера—Снедекора. Функция распределения $F(x | H_1)$ статистики $\hat{\Xi}$ в этом случае запишется как

$$F(x | H_1) = \Pr \left\{ \nu \frac{e^{2(d_{Tm}^2 + 1)} + \chi_{2B}^2}{\chi_\nu^2} < x \right\} = \Pr \left\{ e^{2(d_{Tm}^2 + 1)} + \chi_{2B}^2 - \frac{x \chi_\nu^2}{\nu} < 0 \right\}. \quad (29)$$

Вычисляя стоящую в правой части (29) вероятность, после громоздких преобразований получаем

$$F(x | H_1) = \frac{(B + L)!}{L! B!} \left(\frac{x}{\nu} \right)^B \left\{ {}_2F_1 \left(B; B + L + 1; B + 1; -\frac{x}{\nu} \right) - \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2 + 1 + x/\nu} \right)^{B+L+1} {}_2F_1 \left(B; B + L + 1; B + 1; -\frac{x d_{Tm}^2}{\nu(d_{Tm}^2 + 1) + x} \right) \right\},$$

где ${}_2F_1(a, b, c; z)$ — гипергеометрическая функция (функция Гаусса) [4, 8]. Выражение для вероятности правильного адаптивного энергетического обнаружения радиосигнала со случайной рэлеевской амплитудой можно представить в виде

$$\hat{P}_1 = \frac{(B + L + 1)!}{(L + 1)! B!} \frac{(d_{Tm}^2 + 1)^{B+L+1}}{R^{L+1}} F_2 \left(B + L + 2, B, L + 1; B + 1, L + 2; -d_{Tm}^2, -\frac{d_{Tm}^2 + 1}{R} \right), \quad (30)$$

где $R = h/\nu$ — нормированный пороговый уровень, $F_2(a, b, b'; c, c'; y, z)$ — функция Аппеля второго порядка [11]. С учётом целочисленности B и L выражение (30) удастся преобразовать к более удобной для компьютерных расчётов форме:

$$\hat{P}_1 = \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2} \right)^B \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2 + R + 1} \right)^{\nu/2} + \frac{1}{(R + 1)^{\nu/2}} \sum_{k=0}^{B-1} \frac{(\nu/2)_k}{k!} \left(\frac{R}{R + 1} \right)^k \left[1 - \left(\frac{d_{Tm}^2 + 1}{d_{Tm}^2} \right)^{B+k} \right]. \quad (31)$$

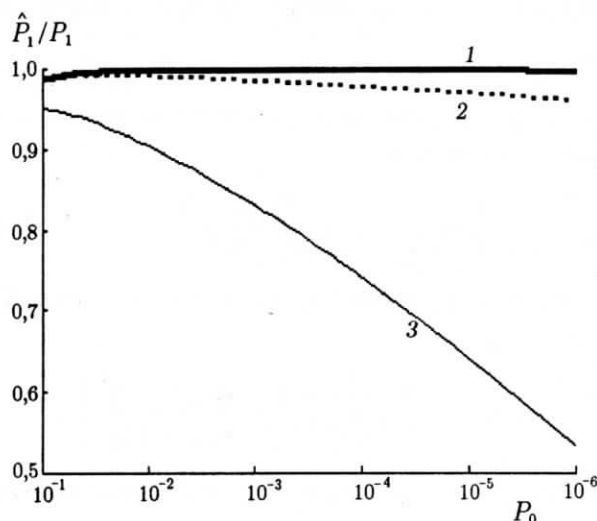


Рис. 4. Отношение вероятности правильного адаптивного энергетического обнаружения сигнала с рэлеевской амплитудой на фоне шума неизвестной интенсивности и вероятности правильного традиционного энергетического обнаружения того же сигнала на фоне шума известной интенсивности при $B = 10$. Кривые 1–3 соответствуют $\tau/T = 100; 10; 1$

На рис. 4 приведена рассчитанная с использованием формул (28) и (31) зависимость отношения $\hat{P}_1/P_1$ вероятностей правильного адаптивного ($\hat{P}_1$) и традиционного (P_1) энергетического обнаружения радиосигнала со случайной рэлеевской амплитудой и произвольной начальной фазой на фоне шума неизвестной интенсивности в зависимости от одинаковой вероятности ложной тревоги $P_0 = \hat{P}_0$ традиционного (P_0) и адаптивного ($\hat{P}_0$) энергетических обнаружителей. Кривые рассчитаны для $B = 10$, $d_{Tm} = 10$ и нескольких значений отношения τ/T длительностей интервалов обучения и обнаружения. Из хода кривых следует, что, как и в случае обнаружения радиосигнала с детерминированной амплитудой, различие эффективности адаптивного и традиционного энергетического обнаружения радиосигнала с рэлеевской амплитудой убывает с ростом длительности обучения. При этом необходимое относительное время обучения τ/T возрастает по мере уменьшения требуемого уровня ложных тревог.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Априорная неопределённость интенсивности шума может быть преодолена при энергетическом обнаружении узкополосных радиосигналов посредством предварительного обучения (адаптации). Характеристики адаптивного энергетического обнаружения узкополосных радиосигналов могут быть выражены через специальные функции, такие как неполная бета-функция, гипергеометрические функции (Куммера и Гаусса) и функция Аппеля. Различие характеристик адаптивного и традиционного энергетических обнаружителей может быть значительным, хотя асимптотически исчезает с увеличением длительности обучения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И. Оптимальный приём сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
2. Уркович Г. // ТИИЭР. 1967. Т. 55, № 4. С. 50.
3. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовских случайных процессов и их преобразований. М.: Советское радио, 1978.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
5. Корольюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
6. Куликов Е. И. Методы измерения случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986.

7. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределённости и адаптация информационных систем. М.: Советское радио, 1977.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
9. Костылев В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 10. С. 926.
10. Костылев В. И. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 5. С. 530.
11. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.

Воронежский госуниверситет,
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию
2 августа 2001 г.

ENERGY DETECTION OF NARROW-BAND RADIO SIGNALS ON THE BACKGROUND OF A NOISE OF UNKNOWN INTENSITY

A. P. Trifonov and V. I. Kostylev

The distribution of deciding statistics of an adaptive energy detector with training is found. The expressions for the probabilities of false alarm and exact detection are obtained.