

7
p-6454/2002/45/4
62
ISSN 0021-3462

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОФИЗИКА

2002
ТОМ 45
7

ИЗДАНИЕ НИЖЕГОРОДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.391.1

ПРИЁМ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин

Синтезированы максимально правдоподобный и оптимальный (байесовский) алгоритмы обнаружения и измерения длительности сигнала произвольной формы, наблюдаемого на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Найдены точные выражения для характеристик максимально правдоподобных алгоритмов. С помощью моделирования на ЭВМ определены характеристики байесовских алгоритмов.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] рассмотрена задача оптимального приёма прямоугольного импульса с неизвестной длительностью на фоне гауссовского белого шума. Показано, что полезный сигнал является разрывным по неизвестному параметру, выполнен синтез максимально правдоподобных (МП) и байесовских обнаружителей и измерителей длительности импульса. Найдены точные выражения для характеристик эффективности МП обнаружителя и измерителя длительности.

Однако реальные условия генерации и распространения приводят к необходимости приёма сигналов, форма которых отличается от прямоугольной. В связи с этим представляет интерес синтез и анализ алгоритмов приёма сигнала произвольной формы с неизвестной длительностью.

В данной работе синтезированы МП и байесовские алгоритмы обнаружения и оценки длительности сигнала произвольной формы, принимаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. С использованием методики, изложенной в работе [4], найдены точные характеристики эффективности МП обнаружителя и измерителя длительности сигнала. Выполнено статистическое моделирование байесовских алгоритмов обнаружения и оценки длительности сигнала на ЭВМ.

1. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала

$$s(t, \tau) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & t < 0, t > \tau, \end{cases} \quad (1)$$

наблюдаемого в течение интервала времени $[0, T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь $f(t)$ — функция, описывающая форму сигнала, длительность импульса $\tau \in [T_1, T_2]$ предполагается случайной величиной с априорной плотностью вероятности $W(\tau)$. Реализация наблюдаемых данных при этом запишется в виде $x(t) = \gamma_0 s(t, \tau_0) + n(t)$. Индекс нуль здесь и далее означает истинное значение соответствующего параметра. Параметр γ_0 дискретный и принимает два значения: $\gamma_0 = 0$ (в наблюдаемой реализации сигнал отсутствует) и $\gamma_0 = 1$ (в наблюдаемой реализации сигнал присутствует).

Будем считать, что априорные вероятности отсутствия и наличия сигнала известны: $p_0 = P(\gamma_0 = 0)$ и $p_1 = P(\gamma_0 = 1)$. По наблюдаемой реализации $x(t)$ необходимо оптимальным образом решить, какое значение принимает параметр γ .

Логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) в этом случае будет зависеть от параметров γ и τ и согласно [1, 2] может быть записан в виде

$$L(\gamma, \tau) = \frac{2\gamma}{N_0} \int_0^\tau f(t) [x(t) - f(t)/2] dt.$$

В соответствии с МП алгоритмом [1, 2] оценка дискретного параметра γ может быть найдена как

$$\gamma_m = \arg \sup_{\gamma} \left[\sup_{\tau} L(\gamma, \tau) \right].$$

Учитывая, что $L(\gamma = 0, \tau) = 0$, получаем, что МП алгоритм обнаружения заключается в сравнении абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП с нулём. Если выполняется неравенство

$$L = \sup L(\tau) > 0, \quad (2)$$

где

$$L(\tau) = L(\gamma = 1, \tau), \quad (3)$$

то выносится решение о наличии сигнала в принятой реализации ($\gamma_m = 1$), в противном случае — об отсутствии сигнала ($\gamma_m = 0$).

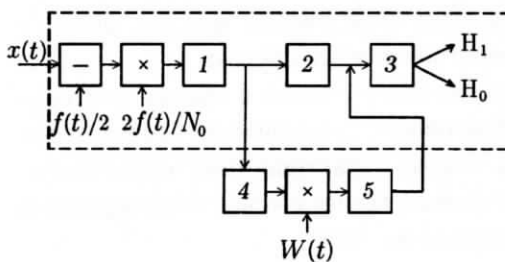


Рис. 1

Аналогично [3] вместо алгоритма (2) можно использовать обобщённый МП алгоритм обнаружения [1], основанный на сравнении абсолютного максимума логарифма ФОП с некоторым порогом c . Если

$$L > c, \quad (4)$$

выносится решение о наличии сигнала ($\gamma_m = 1$), если $L < c$ — о его отсутствии ($\gamma_m = 0$). Порог c в выражении (4) может выбираться исходя из различных критериев оптимальности [1, 2].

На рис. 1 штриховой линией выделена структурная схема МП обнаружителя сигнала (1), где 1 обозначает интегратор на интервале времени $[0, t]$; $t \in [0, T_2]$, 2 — пиковый детектор, определяющий наибольшее значение сигнала, 3 — пороговое устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала пикового детектора с порогом c и выносящее решение о наличии или отсутствии сигнала.

Качество обнаружения будем характеризовать средней вероятностью ошибки [1]

$$P_e = p_0\alpha + p_1\beta, \quad (5)$$

где α — вероятность ошибки 1-го рода (ложной тревоги), $\beta = \int_{T_1}^{T_2} \beta(\tau) W(\tau) d\tau$ — безусловная вероятность ошибки 2-го рода (пропуска сигнала); а $\beta(\tau_0)$ — условная вероятность пропуска сигнала с длительностью τ_0 .

Согласно [1] вероятности ошибок определяются выражениями

$$\alpha = P[\sup L(\tau) > c | \gamma_0 = 0] = 1 - P_0(c), \quad (6)$$

$$\beta = P[\sup L(\tau) < c | \gamma_0 = 1] = P_1(c), \quad (7)$$

где $P_j(c) = F_{2j}(c, c, T_2)$,

$$F_{2j}(u, v, T) = P \left[\sup_{T_1 \leq \tau \leq T} L(\tau) < u, \sup_{T < \tau \leq T_2} L(\tau) < v \mid \gamma_0 = j \right], \quad j = 0; 1. \quad (8)$$

Для нахождения функций (8) воспользуемся методикой [4]. Случайный процесс $L(\tau)$ (3) является гауссовским, следовательно, для его полного статистического описания достаточно найти первые два момента [5]. Обозначая аналогично [4] $L_j(\tau) = L(\tau \mid \gamma_0 = j)$, где $j = 0; 1$, и выполняя усреднение, получаем

$$S_0(\tau) = \langle L_0(\tau) \rangle = -\frac{1}{N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt, \quad S_1(\tau) = \langle L_1(\tau) \rangle = \frac{2}{N_0} \int_0^{\min(\tau, \tau_0)} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B(\tau_1, \tau_2) &= \langle [L_0(\tau_1) - S_0(\tau_1)] [L_0(\tau_2) - S_0(\tau_2)] \rangle = \\ &= \langle [L_1(\tau_1) - S_1(\tau_1)] [L_1(\tau_2) - S_1(\tau_2)] \rangle = \frac{2}{N_0} \int_0^{\min(\tau_1, \tau_2)} f^2(t) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Известно [1, 4], что функция

$$Q(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt \quad (11)$$

представляет собой отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе МП приёмника для сигнала (1), наблюдаемого на фоне белого шума.

Положим аналогично [4], что функция $f(t)$, описывающая форму сигнала, обращается в нуль только на части интервала $[0, \tau]$, имеющей нулевую меру. Тогда $Q(\tau)$ (11) является монотонно возрастающей функцией, и моменты (9), (10) логарифма ФОП можно переписать как

$$S_0(\tau) = -Q(\tau)/2; \quad S_1(\tau) = \min[Q(\tau), Q(\tau_0)] - Q(\tau)/2; \quad B(\tau_1, \tau_2) = \min[Q(\tau_1), Q(\tau_2)]. \quad (12)$$

Перейдём в выражении (3) к новой переменной $\lambda = Q(\tau)$, причём $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$, где $\Lambda_1 = Q(T_1)$, $\Lambda_2 = Q(T_2)$. Учитывая (12), можно при $\gamma_0 = 0$ представить логарифм ФОП (3) в виде

$$L_0(\tau) = L_0[\tau(\lambda)] = \mu_0(\lambda) = -\lambda/2 + \nu(\lambda). \quad (13)$$

Здесь $\tau(\lambda)$ определяется из решения уравнения $Q(\tau) = \lambda$, а $\nu(\lambda)$ — гауссовский случайный процесс, который обладает моментами

$$\langle \nu(\lambda) \rangle = 0, \quad \langle \nu(\lambda_1) \nu(\lambda_2) \rangle = \min(\lambda_1, \lambda_2). \quad (14)$$

Соответственно при $\gamma_0 = 1$ логарифм ФОП (3) допускает представление

$$L_1(\tau) = L_1[\tau(\lambda)] = \mu_1(\lambda) = \min(\lambda_0, \lambda) - \lambda/2 + \nu(\lambda), \quad (15)$$

где $\lambda_0 = Q(\tau_0)$ — ОСШ для принятого сигнала.

Используя представления (13) и (15), функции распределения (8) запишем как

$$F_{2j}(u, v, T) = F_{2j}(u, v, \Lambda) = P \left[\sup_{\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda} \mu_j(\lambda) < u, \sup_{\Lambda < \lambda \leq \Lambda_2} \mu_j(\lambda) < v | \gamma_0 = j \right], \quad (16)$$

где $\Lambda = Q(T)$, $j = 0; 1$.

Марковские свойства случайного процесса $\mu_0(\lambda)$ позволяют найти функцию $F_{20}(u, v, T)$, при подстановке которой в выражение (6) получаем вероятность ложной тревоги в виде [4]

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(\xi - c - \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1} \right] \left\{ \Phi \left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}} \right) - \exp(-\xi) \Phi \left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}} \right) \right\} d\xi, \quad (17)$$

где $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$ — интеграл вероятности. Как следует из (17), вероятность ложной тревоги α не зависит от вида функции $f(t)$, описывающей форму сигнала, и от вида функции $Q(\tau)$ (11), представляющей собой ОСШ на выходе МП приёмника [4]. Вероятность ложной тревоги полностью определяется минимальным $\Lambda_1 = \min Q(\tau) = Q(T_1)$ и максимальным $\Lambda_2 = \max Q(\tau) = Q(T_2)$ значениями ОСШ (11). При этом вероятность ложной тревоги возрастает с уменьшением минимального значения ОСШ $Q(T_1)$ и с увеличением диапазона изменения ОСШ $Q(T_2) - Q(T_1)$.

Перейдём к определению вероятности пропуска сигнала (1). Согласно (7) для нахождения вероятности пропуска β необходимо найти функцию $F_{21}(u, v, \Lambda)$ (16).

Введём вспомогательный случайный процесс

$$\chi_1(\lambda) = \begin{cases} u - \mu_1(\lambda), & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda; \\ v - \mu_1(\lambda), & \Lambda < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases}$$

который согласно (14) и (15) является марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{1}{2} \times \begin{cases} -1, & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0; \\ 1, & \lambda_0 < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases} \quad k_2 = 1$$

соответственно. Тогда вероятность (16) при $j = 1$ определяется выражением [2, 6]

$$F_{21}(u, v, \Lambda) = P[\chi_1(\lambda) > 0] = \int_0^\infty W(\chi, \Lambda_2) d\chi. \quad (18)$$

Здесь $W(\chi, \lambda)$ — решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова

$$\frac{\partial W(\chi, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \chi} [k_1 W(\chi, \lambda)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} [k_2 W(\chi, \lambda)] = 0 \quad (19)$$

при граничных условиях

$$W(\chi = 0, \lambda) = W(\chi = -\infty, \lambda) = 0$$

и начальном условии

$$W(\chi, \lambda = \Lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \exp \left[-\frac{(\chi - u + \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1} \right].$$

Решая уравнение (19) методом отражения с переменной знака [6] и используя выражение (18), находим функцию распределения

$$F_{21}(u, v, \Lambda) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\Lambda(\lambda_0 - \Lambda)}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(\xi_1 - \xi_2 + (\lambda_0 - \Lambda)/2)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda)} \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{2\xi_1 \xi_2}{\lambda_0 - \Lambda} \right] \right\} \times \\ \times \left[\Phi \left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} + \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) - \exp(-\xi_2) \Phi \left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} - \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) \right] \times \\ \times \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi_1 - v + \Lambda/2)^2}{2\Lambda} \right] \Phi \left(\frac{u\Lambda + (\xi_1 - v)\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda\Lambda_1(\Lambda - \Lambda_1)}} \right) - \exp \left[u - \frac{(\xi_1 + 2u - v + \Lambda/2)^2}{2\Lambda} \right] \times \right. \\ \left. \times \Phi \left(\frac{u\Lambda - (\xi_1 + 2u - v)\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda\Lambda_1(\Lambda - \Lambda_1)}} \right) \right\} d\xi_1 d\xi_2$$

при $\Lambda \leq \lambda_0$ и

$$F_{21}(u, v, \Lambda) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\lambda_0(\Lambda - \lambda_0)}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(\xi_2 - \xi_1 + u - v - (\Lambda - \lambda_0)/2)^2}{2(\Lambda - \lambda_0)} \right] \times \\ \times \left[\Phi \left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}}{2} + \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}} \right) - \exp(-\xi_2) \Phi \left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}}{2} - \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}} \right) \right] \times \\ \times \left\{ \Phi \left(u \sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0 \Lambda_1}} + \xi_1 \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}} \right) - \Phi \left(u \sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0 \Lambda_1}} - \xi_1 \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{2u\xi_1}{\lambda_0} \right] \right\} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{2\xi_1(\xi_2 + u - v)}{\Lambda - \lambda_0} \right] \right\} \exp \left[-\frac{(u - \xi_1 - \lambda_0/2)^2}{2\lambda_0} \right] d\xi_1 d\xi_2 \quad (20)$$

при $\Lambda > \lambda_0$.

Подставляя функцию (20) в формулу (7), получаем точное выражение для вероятности пропуска сигнала:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(\xi + \lambda_0/2)^2 + c^2 - c\lambda_0}{2\lambda_0} \right] \left[\Phi \left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) - \right. \\ \left. - \exp(-\xi) \Phi \left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) \right] \left\{ \Phi \left(c \sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0 \Lambda_1}} + \xi \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[\frac{u\xi}{\lambda_0} \right] - \Phi \left(c \sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0 \Lambda_1}} - \xi \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}} \right) \exp \left[-\frac{u\xi}{\lambda_0} \right] \right\} d\xi. \quad (21)$$

Аналогично (17) вероятность пропуска (21) сигнала (1) с неизвестной длительностью не зависит от вида функции $f(t)$, описывающей форму сигнала, и от вида функции $Q(\tau)$, представляющей собой ОСШ. Вероятность пропуска полностью определяется минимальным Λ_1 , максимальным Λ_2 и истинным $\lambda_0 = Q(\tau_0)$ значениями ОСШ. Для определения порога обнаружения c (4) можно использовать критерий минимума средней вероятности ошибки (5) [1, 3]. Получаемый таким образом порог $c^* = \arg \inf P_e(c)$ будет зависеть от p_0 , Λ_1 , Λ_2 и плотности вероятности $W(\tau)$. Алгоритм обнаружения (4) при оптимальном пороге c^* будем называть МП обнаружителем с оптимизированным порогом.

В качестве примера рассмотрим обнаружение прямоугольного импульса со скошенной вершиной [7]:

$$f(t) = A[1 + (d - 1)t/T_2] \sqrt{3/(d^2 + d + 1)}. \quad (22)$$

Здесь A характеризует амплитуду импульса, $d = f(T_2)/f(0)$ — наклон его скошенной вершины. Множитель $\sqrt{3/(d^2 + d + 1)}$ в выражении (22) обеспечивает неизменность полной энергии сигнала при различном наклоне вершины, что позволяет сравнивать эффективность обнаружения сигналов с разными наклонами и неизменной энергией.

Длину априорного интервала длительности импульса будем характеризовать величиной $\eta_1 = T_1/T_2$. Тогда

$$\lambda = \frac{3z_r^2\eta}{d^2 + d + 1} [1 + (d - 1)\eta + (d - 1)^2\eta^2/3],$$

где $\eta = \tau/T_2$,

$$z_r^2 = 2A^2T_2/N_0. \quad (23)$$

На рис. 2 представлены зависимости средней вероятности ошибки P_e (5) от ОСШ z_r (23) для $\eta_1 = 0,1$, равномерной априорной плотности вероятности неизвестной длительности импульса:

$$W(\tau) = \frac{1}{T_2 - T_1} \times \begin{cases} 1, & T_1 \leq \tau \leq T_2; \\ 0, & \tau < T_1, \tau > T_2, \end{cases} \quad (24)$$

при различном наклоне вершины импульса d . При построении кривых на рис. 2а предполагалось $p_0 = 0,1$, на рис. 2б — $p_0 = 0,7$. Сплошные линии на рис. 2 соответствуют оптимизированному порогу обнаружения $c = c^*$, штриховые линии — порогу $c = 0$. Кривые 1 построены для $d = 0,5$, кривые 2 — для $d = 1$, кривые 3 — для $d = 2$. Сопоставление сплошных и штриховых кривых на рис. 2 показывает, что использование МП обнаружителя с оптимизированным порогом приводит к заметному уменьшению вероятности ошибки. Кривые 2 на рис. 2 соответствуют прямоугольному импульсу [3]. Сопоставление кривых 2 с кривыми 1 и 3 свидетельствует о существенном влиянии отклонения формы импульса от прямоугольной на эффективность обнаружения сигнала с неизвестной длительностью.

Хорошо известно [1, 2], что при байесовском подходе оптимальным правилом обнаружения сигнала является правило, обеспечивающее минимум риска. Рассмотрим возможность применения байесовского подхода для обнаружения сигнала (1) с неизвестной длительностью.

Для синтеза байесовского алгоритма используем простую матрицу потерь, у которой стоимости правильных решений принимаются нулевыми, а стоимости ошибок первого и второго рода [1, 2] одинаковыми, что соответствует критерию идеального наблюдателя. Тогда байесовский алгоритм обнаружения сигнала (1) при априорной плотности вероятности длительности импульса $W(\tau)$ заключается в формировании величины

$$I = \int_{T_1}^{T_2} \exp[L(\tau)] W(\tau) d\tau \quad (25)$$

и сравнении её с порогом p_0/p_1 .

Структурная схема байесовского обнаружителя (БО) (25) приведена на рис. 1, из которого необходимо исключить блок 2. Блок 4 обозначает нелинейный элемент с экспоненциальной характеристикой, блок 5 — интегратор на интервале $[T_1, T_2]$. Пороговое устройство 3 осуществляет сравнение выходного сигнала интегратора 5 с порогом p_0/p_1 и выносит решение о наличии сигнала, если порог превышен, и о его отсутствии в противном случае. Из рис. 1 следует, что схема БО является одноканальной, однако она несколько сложнее схемы МП обнаружителя.

Отметим, что исследование БО (25) затруднительно, и найти аналитически его характеристики не удаётся.

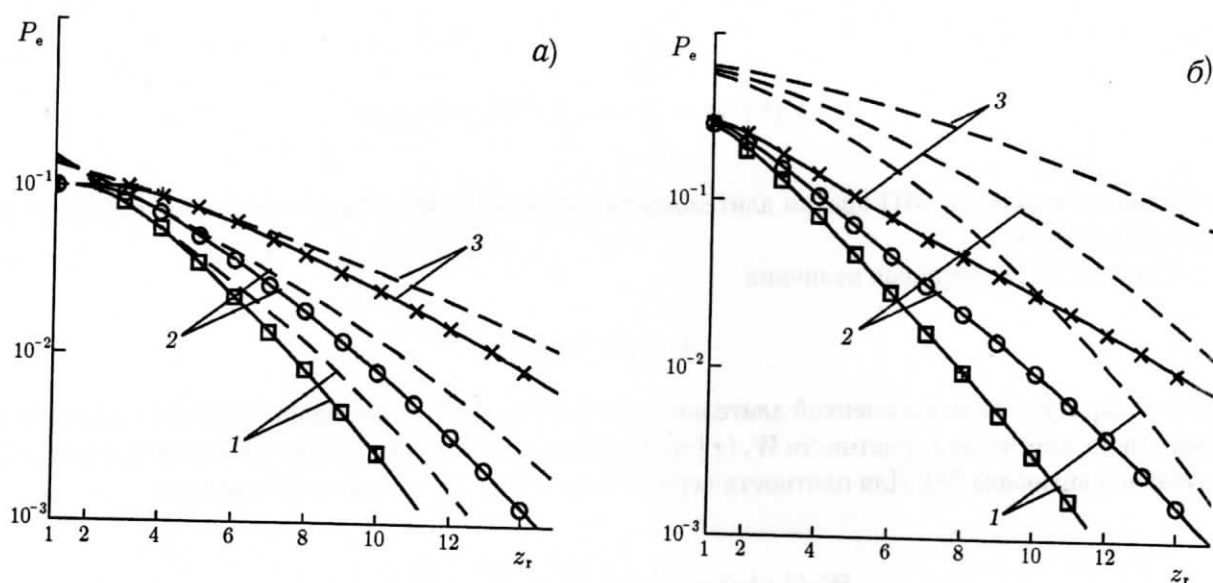


Рис. 2

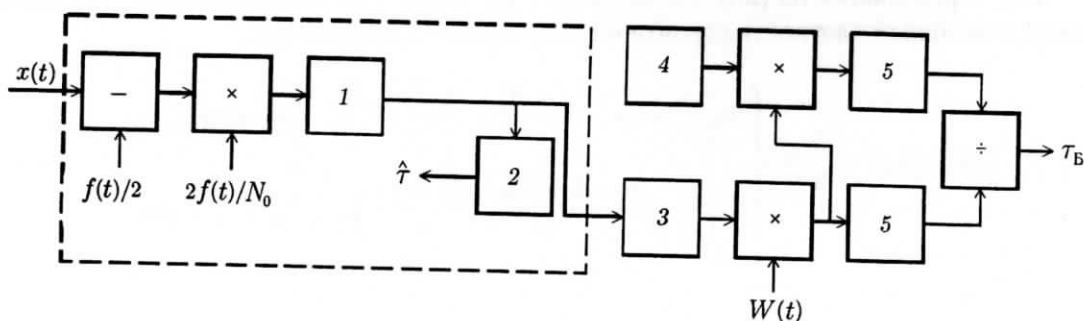


Рис. 3

2. ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА

Рассмотрим теперь задачу оценки длительности импульса (1), полагая, что сигнал присутствует в принятой реализации с вероятностью $p_1 = 1$. Алгоритм МП оценки длительности [2, 8] состоит в отыскании положения абсолютного максимума функционала $L(\tau)$ (3):

$$\hat{\tau} = \arg \sup L_1(\tau), \quad \tau \in [T_1; T_2]. \quad (26)$$

Следовательно, структура МП алгоритма оценивания не зависит от априорной плотности вероятности параметра τ .

Структурная схема МП измерителя длительности выделена на рис. 3 штриховой линией, где 1 обозначает интегратор на интервале времени $[0, t]$, 2 — устройство поиска положения абсолютного максимума сигнала на интервале $[T_1, T_2]$, которое является МП оценкой $\hat{\tau}$.

Точность оценки аналогично [3] будем характеризовать безусловным рассеянием (средним квадратом ошибки) оценки длительности

$$V(\hat{\tau}) = \int_{T_1}^{T_2} V(\hat{\tau} | \tau) W(\tau) d\tau, \quad (27)$$

где

$$V(\hat{\tau} | \tau_0) = \int_{T_1}^{T_2} (\tau - \tau_0)^2 W_{\tau}(\tau | \tau_0) d\tau \quad (28)$$

— условное рассеяние МП оценки длительности сигнала (1), $W_{\tau}(\tau | \tau_0)$ — условная плотность вероятности оценки $\hat{\tau}$.

Согласно (11) случайная величина

$$\hat{\lambda} = \arg \sup \mu_1(\lambda), \quad (29)$$

где $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$, связана с оценкой длительности $\hat{\tau}$ (26) взаимно-однозначным преобразованием. Следовательно, плотность вероятности $W_{\tau}(\tau | \tau_0)$ можно выразить через плотность вероятности $W_{\lambda}(\lambda | \lambda_0)$ случайной величины (29). Для плотности вероятности $W_{\lambda}(\lambda | \lambda_0)$ согласно [2] запишем

$$W_{\lambda}(\lambda | \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F_{21}(u, v, \lambda)}{\partial u} \Big|_{v=u} du, \quad (30)$$

где $F_{21}(u, v, \lambda)$ определяется из (20). Подставляя выражение (20) в формулу (30), получаем точное выражение для условной плотности вероятности случайной величины (29):

$$W_{\lambda}(\lambda | \lambda_0) = \frac{1}{2} \times \begin{cases} \Psi\left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{2}, \frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{2}, \frac{\Lambda_2 - \lambda_0}{2}\right), & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0; \\ \Psi\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{2}, \frac{\Lambda_2 - \lambda_0}{2}, \frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{2}\right), & \lambda_0 < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(y, y_1, y_2) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}y^{3/2}} \left[\frac{\exp[-(y_1 - y)/4]}{\sqrt{\pi}(y_1 - y)} + \Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - y}{2}}\right) \right] \times \\ & \times \int_0^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x + y)^2}{4y}\right] \left[\Phi\left(\frac{y_2 + x}{\sqrt{2y_2}}\right) - \exp(-x)\Phi\left(\frac{y_2 - x}{\sqrt{2y_2}}\right) \right] dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda = Q(\tau)$, то из (26) и (29) имеем

$$W_{\tau}(\tau | \tau_0) = W_{\lambda}(Q(\tau) | Q(\tau_0))Q'(\tau).$$

На основе этого выражения, а также используя (31), запишем выражение для условного рассеяния (28) оценки длительности (26):

$$V(\hat{\tau} | \tau_0) = \int_{T_1}^{T_2} (\tau - \tau_0)^2 W_{\lambda}(Q(\tau) | Q(\tau_0))Q'(\tau) d\tau. \quad (32)$$

Точные выражения (31), (32) для характеристик МП оценки длительности довольно громоздки, и расчёт по ним возможен только численными методами. Поэтому рассмотрим асимптотическое поведение этих характеристик при увеличении ОСШ $z^2 = Q(\tau_0)$ для принятого сигнала. Обозначим

$q_{\min} = Q(T_1)/Q(\tau_0) < 1$, $q_{\max} = Q(T_2)/Q(\tau_0) > 1$ при $\tau_0 \in (T_1, T_2)$. Перейдём в (31) к новой переменной

$$\kappa = [Q(\tau) - Q(\tau_0)]/2, \quad (33)$$

причём

$$-\frac{(1 - q_{\min})z^2}{2} < \kappa < \frac{(q_{\max} - 1)z^2}{2}.$$

Плотность вероятности для переменной (33) запишется в виде

$$W_z(\kappa) = \begin{cases} \Psi[-\kappa, (1 - q_{\min})z^2/2, (q_{\max} - 1)z^2/2], & -(1 - q_{\min})z^2/2 < \kappa \leq 0; \\ \Psi[\kappa, (q_{\max} - 1)z^2/2, (1 - q_{\min})z^2/2], & 0 < \kappa < (q_{\max} - 1)z^2/2. \end{cases} \quad (34)$$

Полагая в (34) $z \rightarrow \infty$, находим предельную плотность вероятности для переменной (33):

$$W_0(\kappa) = 3 \exp(2|\kappa|) \left[1 - \Phi\left(3\sqrt{|\kappa|/2}\right) \right] + \Phi\left(\sqrt{|\kappa|/2}\right) - 1, \quad (35)$$

где $\kappa \in (-\infty, +\infty)$. По мере роста ОСШ z^2 для принятого сигнала МП оценка длительности $\hat{\tau}$ (26) сходится к истинному значению длительности τ_0 в среднеквадратическом смысле [8]. Поэтому при достаточно больших z допустима аппроксимация переменной (33) выражением

$$\kappa \approx (\tau - \tau_0) Q'(\tau_0)/2.$$

Следовательно, при $z \rightarrow \infty$ плотность вероятности нормированной ошибки МП оценки длительности сигнала

$$\hat{\kappa} = (\hat{\tau} - \tau_0) Q'(\tau_0)/2 \quad (36)$$

сходится к $W_0(\kappa)$ (35).

Впервые плотность вероятности (35) была получена, по-видимому, в [9], а её свойства изучены и описаны в [10]. Плотность вероятности (35) существенно отличается от гауссовской, имеет нулевые математическое ожидание и коэффициент асимметрии, обладает дисперсией $13/2$ и коэффициентом эксцесса $1779/169 \approx 10,53$. Используя (35) и (36), для асимптотического значения условного рассеяния (28) МП оценки длительности можно записать

$$V_0(\hat{\tau} | \tau_0) = 26 [Q'(\tau_0)]^{-2}, \quad (37)$$

или с учётом (11)

$$V_0(\hat{\tau} | \tau_0) = 13N_0^2/[2f^4(\tau_0)]. \quad (38)$$

Формула (38) непосредственно следует из результатов [8], если МП оценку длительности сигнала интерпретировать как оценку момента скачкообразного изменения сигнала, наблюдаемого на фоне белого шума. Согласно (38) предельная (при $z \rightarrow \infty$) точность МП оценки длительности не зависит от вида функции $f(t)$, описывающей форму сигнала, а определяется лишь величиной скачка сигнала в момент его исчезновения.

На основе предельной плотности вероятности (35) можно получить более точное, чем (37), выражение для условного рассеяния МП оценки длительности. Для этого аппроксимируем плотность вероятности оценки на ограниченном интервале $[T_1, T_2]$ выражением

$$W_a(\tau | \tau_0) = \frac{Q'(\tau)W_0[(Q(\tau) - Q(\tau_0))/2]}{\int_{T_1}^{T_2} Q'(\tau)W_0[(Q(\tau) - Q(\tau_0))/2] d\tau}.$$

Соответственно, более простое, чем (32), но более точное, чем (37), выражение для условного рассеяния МП оценки длительности получаем в виде

$$V_a(\hat{\tau} | \tau_0) = \frac{\int_{T_1}^{T_2} (\tau - \tau_0)^2 f^2(\tau) W_0[(Q(\tau) - Q(\tau_0))/2] d\tau}{\int_{T_1}^{T_2} f^2(\tau) W_0[(Q(\tau) - Q(\tau_0))/2] d\tau}. \quad (39)$$

Таким образом, точность МП оценки длительности сигнала произвольной формы можно охарактеризовать величиной безусловного рассеяния (27), где $V(\hat{\tau} | \tau_0)$ определяется из (32), (37) или (39).

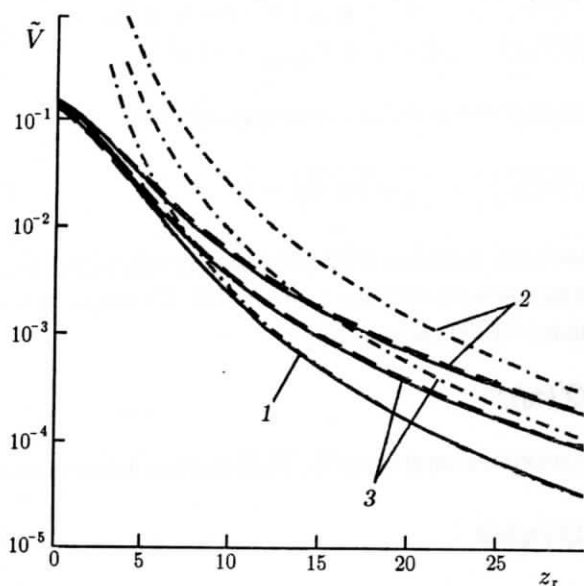


Рис. 4

В качестве примера на рис. 4 приведены зависимости нормированного безусловного рассеяния $\tilde{V} = V(\hat{\tau})/T_2^2$ МП оценки длительности прямоугольного импульса со скошенной вершиной (22) от ОСШ z_r при равномерной априорной плотности вероятности (24) длительности импульса и $\eta_1 = 0,1$. Сплошными линиями изображены точные зависимости рассеяния, рассчитанные с использованием выражений (27), (32), штрих-пунктирными — асимптотические зависимости рассеяния, рассчитанные с использованием (37). Штриховыми линиями показаны асимптотические зависимости нормированного безусловного рассеяния, рассчитанные с помощью выражения (39). Кривые 1 на рис. 4 соответствуют наклону вершины импульса $d = 1$, кривые 2 — $d = 0,2$, кривые 3 — $d = 5$.

Как следует из рис. 4, выражение (39) для рассеяния оценки длительности удовлетворительно аппроксимирует точные выражения (27), (32) при любых ОСШ. Точность аппроксимации рассеяния выражением (37) зависит от формы сигнала.

Так, для сигнала прямоугольной формы ($d = 1$) выражение (37) удовлетворительно аппроксимирует точные формулы при $z_r \geq 10$, а для сигналов с наклонной вершиной ($d = 0,2; 5$) — при $z_r \geq 50$. Заметим также, что отклонение формы сигнала от прямоугольной приводит к снижению точности МП оценки длительности.

Как известно [11, 12], байесовский алгоритм оценивания при квадратичной функции потерь минимизирует средний квадрат ошибки (рассеяние) оценки. Байесовская оценка длительности в рассматриваемых условиях определяется как [11]

$$\tau_B = \frac{\int_{T_1}^{T_2} \tau W(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau}{\int_{T_1}^{T_2} W(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau}. \quad (40)$$

Структурная схема байесовского алгоритма оценивания изображена на рис. 3, из которого следует исключить блок 2. Блок 3 обозначает нелинейный элемент с экспоненциальной характеристикой, 4 — генератор линейно изменяющегося напряжения, 5 — интеграторы на интервале времени $[T_1, T_2]$.

Очевидно, аппаратная реализация байесовского измерителя длительности несколько сложнее, чем у МП измерителя. Тем не менее она является одноканальной по оцениваемому параметру.

Теоретический анализ байесовской оценки (40) наталкивается на существенные трудности. Однако, используя результаты [8], можно записать приближённое выражение для условного рассеяния

байесовской оценки, справедливое при больших ОСШ:

$$V_0(\hat{\tau}_B | \tau_0) \approx 19,5 [Q'(\tau_0)]^{-2} = 4,88 N_0^2 / f^4(\tau_0). \quad (41)$$

Используя (41), получаем асимптотическое значение безусловного рассеяния байесовской оценки длительности:

$$V_0(\hat{\tau}_B) \approx 19,5 \int_{T_1}^{T_2} W(\tau) [Q'(\tau)]^{-2} d\tau. \quad (42)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Исследование работоспособности байесовских алгоритмов обнаружения и оценки длительности сигнала на примере прямоугольного импульса со скошенной вершиной (22) было выполнено методами статистического моделирования на ЭВМ.

Логарифм ФОП $L(\tau)$ (3) представлялся в виде $L(\eta) = S(\eta, \eta_0) + N(\eta)$, где $\eta = \tau/T_2$, $\eta_0 = \tau_0/T_2$,

$$S(\eta, \eta_0) = z_r^2 \gamma_0 \min(\eta, \eta_0) \frac{1 + b \min(\eta, \eta_0) + b^2 \min^2(\eta, \eta_0)/3}{1 + b + b^2/3} - \frac{z_r^2 \eta}{2} \frac{1 + b\eta + b^2 \eta^2/3}{1 + b + b^2/3},$$

$$b = d - 1, \quad N(\eta) = \frac{z_r \sqrt{2/(N_0 T_2)}}{\sqrt{1 + b + b^2/3}} \int_0^\eta n(T_2 x) (1 + bx) T_2 dx$$

— гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$\langle N(\eta_1) N(\eta_2) \rangle = z_r^2 \min(\eta_1, \eta_2) \{1 + b \min(\eta_1, \eta_2) + b^2 \min^2(\eta_1, \eta_2)/3\} / (1 + b + b^2/3).$$

При моделировании с шагом $\Delta\eta$ вырабатывались отсчёты функции $N(\eta)$, на основе которых реализация логарифма ФОП (3) аппроксимировалась ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\varepsilon = 0,1$. Согласно [13] дискретные отсчёты логарифма ФОП можно представить в виде

$$L(n \Delta\eta) = S(n \Delta\eta, n_0 \Delta\eta) + z_r \varepsilon \sqrt{\eta_1} \sum_{k=1}^n (1 + bk \Delta\eta) X[k] / \sqrt{1 + b + b^2/3}, \quad (43)$$

где $X[k]$ — гауссовские независимые случайные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией, $n = n_1, n_1 + 1, \dots, n_2$; $n_1 = \text{ent}(1/\varepsilon^2)$; $n_2 = \text{ent}[1/(\eta_1 \varepsilon^2)]$; $n_0 = \text{ent}[\eta_0/(\eta_1 \varepsilon^2)]$; $\text{ent}(x)$ — целая часть числа x ; $\Delta\eta = \eta_1 \varepsilon^2$.

Для моделирования байесовского алгоритма обнаружения сигнала на основе отсчётов (43) вырабатывалась величина (25)

$$I = \frac{\eta_1 \varepsilon^2}{1 - \eta_1} \sum_{n=n_1}^{n_2} \exp[L(n \Delta\eta)]$$

при $\gamma_0 = 0$, $\gamma_0 = 1$ и сравнивалась с порогом p_0/p_1 . Если при $\gamma_0 = 0$ порог был превышен, то фиксировалась ошибка пропуска сигнала. В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска использовались относительные частоты появления соответствующих ошибок.

Для моделирования байесовского алгоритма оценивания длительности сигнала формировалась величина (40)

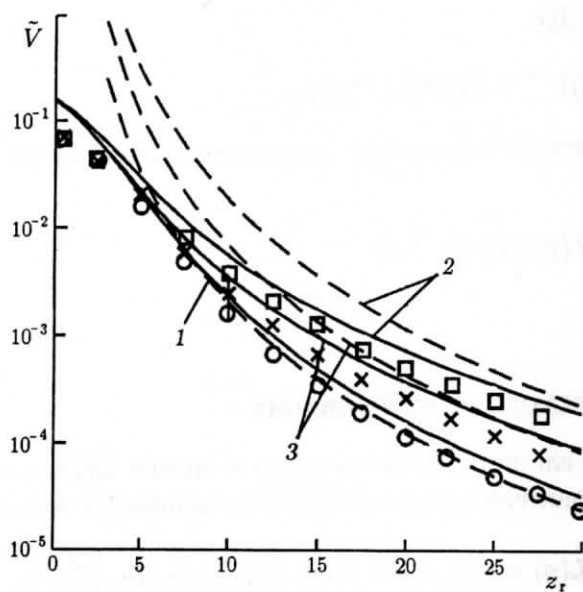


Рис. 5

$$\eta_B = \frac{\tau_B}{T_2} = \varepsilon^2 \eta_1 \frac{\sum_{n=n_1}^{n_2} n \exp[L(n \Delta \eta)]}{\sum_{n=n_1}^{n_2} \exp[L(n \Delta \eta)]},$$

которая является нормированной байесовской оценкой длительности импульса (22). При наличии сигнала ($\gamma_0 = 1$) истинное значение нормированной длительности выбиралось случайным, распределённым равномерно на интервале $[\eta_1, 1]$. В процессе моделирования было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого z_r . Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений средней вероятности ошибки P_e и безусловного рассеяния не более чем на 15 % при $P_e > 10^{-3}$ и $V(\tau_B)/T_2^2 > 10^{-3}$.

Результаты моделирования приведены на рис. 2 и 5. На рис. 2 кружочками (для $d = 1$), квадратиками ($d = 0,5$) и крестиками ($d = 2$) нанесены экспериментальные значения безусловной средней вероятности ошибки байесовского обнаружителя при $\eta_1 = 0,1$ и априорной плотности вероятности (24). Сопоставление экспериментальных значений со сплошными кривыми на рис. 2 свидетельствует о практически полном совпадении характеристик байесовского обнаружителя и МП обнаружителя с оптимизированным порогом. Это позволяет рекомендовать выражения (5), (17) и (21) для расчёта средней вероятности ошибки при использовании байесовского обнаружителя: $P_{eB} \approx \inf P_e(c)$.

На рис. 5 кружочками (для $d = 1$), квадратиками ($d = 0,2$) и крестиками ($d = 5$) нанесены экспериментальные значения нормированного безусловного рассеяния байесовской оценки длительности $\tilde{V} = V(\tau_B)/T_2^2$. Штриховыми линиями показана асимптотическая теоретическая зависимость нормированного безусловного рассеяния байесовской оценки $\tilde{V} = V_0(\tau_B)/T_2^2$ (42) от ОСШ z_r , которая верна лишь при больших z_r . Для сравнения на рис. 5 сплошными линиями нанесена точная теоретическая зависимость нормированного безусловного рассеяния МП оценки $\tilde{V} = V(\hat{\tau})/T_2^2$ от ОСШ z_r , рассчитанная по формулам (27), (31), (32). Кривые 1 на рис. 5 соответствуют значению $d = 1$ в (22), кривые 2 — $d = 0,2$, кривые 3 — $d = 5$. Анализ рис. 5 свидетельствует о том, что возможность аппроксимации экспериментальных значений рассеяния выражением (42) существенно зависит от наклона скошенной вершины импульса. Так, например, для импульса прямоугольной формы выражение (42) удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные при $z_r \geq 10$. Для сигналов с наклонами $d = 0,2$ и 5 удовлетворительная аппроксимация экспериментальных данных наблюдается при очень больших ОСШ $z_r \geq 50$. Как и следовало ожидать, экспериментальное безусловное рассеяние байесовской оценки длительности сигнала меньше рассеяния МП оценки при всех значениях ОСШ. В частности, $\chi_{\max} = V(\tau_B)/V(\hat{\tau}) \approx 0,7$ при $z_r \gg 1$, что также следует из формул (27), (37) и (42). Анализ рис. 5 позволяет предложить выражение для грубого приближения безусловного рассеяния байесовской оценки: $V(\tau_B) \approx \min[gV(\hat{\tau}), V_0(\tau_B)]$, где $g \approx 0,5$ при $z_r \leq 2 \div 3$ и $g \approx 0,7$ при $z_r \geq 4 \div 5$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Точные выражения для условных вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала не зависят от формы сигнала. Вероятности ошибок обнаружения полностью определяются минимальным и макси-

мальными значениями отношения сигнал/шум, а также отношением сигнал/шум для принятого сигнала. Для одинакового объёма априорной информации и равномерного распределения случайной длительности сигнала характеристики байесовского алгоритма и максимально правдоподобного алгоритма обнаружения с оптимизированным порогом практически совпадают.

При оценке длительности сигнала, если не требуется очень высокая точность оценки, возможно применение максимально правдоподобного измерителя, который более просто реализуется аппаратно. Если же необходимо обеспечить предельную достижимую точность оценки, то целесообразно использовать байесовский измеритель. Точные характеристики эффективности максимально правдоподобного алгоритма оценивания длительности зависят от формы сигнала, однако асимптотические (при больших отношениях сигнал/шум) условные характеристики максимально правдоподобной и байесовской оценок определяются только величиной скачка сигнала в момент его исчезновения.

Приведённые результаты получены при поддержке CRDF и Минобразования РФ (проекты VZ-010-0 и E00-3.5-5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П. А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984.
2. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
3. Трифонов А. П., Парфёнов В. И., Мишин Д. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 12. С. 1531.
4. Трифонов А. П. // Сборник «Памяти А. Н. Малахова». Нижний Новгород: ТАЛАН, 2000. С. 65.
5. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
6. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977.
7. Грязнов М. И., Гуревич М. А., Рябинин М. А. Измерение параметров импульсов. М.: Радио и связь, 1991.
8. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
9. Терентьев А. С. // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13, № 4. С. 652.
10. Трифонов А. П. // Прикладная теория случайных процессов и полей. Ульяновск: УлГТУ, 1995. С. 164.
11. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
12. Ванжа А. В., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 12. С. 1257.
13. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971.

Воронежский госуниверситет,
г. Воронеж, Россия

Поступила в редакцию
28 августа 2001 г.

RECEIVING A SIGNAL WITH UNKNOWN DURATION

A. P. Trifonov and Yu. É. Korchagin

The maximum likely and optimal (Bayesian) algorithms for detecting and measuring the duration of an arbitrary-shaped signal observed against a background of white Gaussian noise are synthesized. Exact expressions for the characteristics of maximum likely algorithms are found. The characteristics of the Bayesian algorithms are obtained from computer simulations.