

219

P-5014/
202/47/9

62

ISSN 0033-8494

Том 47, Номер 9

Сентябрь 2002



РАДИОТЕХНИКА и ЭЛЕКТРОНИКА

<http://www.malk.ru>



“НАУКА”

МАИК “НАУКА/ИНТЕРПЕРИОДИКА”

429

ПОРОГОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК
ВРЕМЕНИ ПРИХОДА И ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ
ФЛУКТУИРУЮЩЕГО РАДИОИМПУЛЬСА

© 2002 г. А. П. Трифонов, А. В. Захаров

Поступила в редакцию 16.02.2000 г.

С учетом аномальных ошибок получены асимптотические выражения для характеристик оценок максимального правдоподобия времени прихода и частоты флуктуирующего радиоимпульса, наблюдаемого на фоне аддитивного белого шума. Границы применимости найденных выражений установлены при помощи статистического моделирования на электронно-вычислительной машине.

Задача оценки времени прихода и частоты случайных импульсных радиосигналов встречается в различных приложениях радиофизики и радиотехники [1–6]. Адекватной моделью таких сигналов является флуктуирующий радиоимпульс.

$$s(t) = a(t)I[(t - \lambda_0)/\tau] \cos[v_0 t - \varphi(t)], \quad (1)$$

где $I(x) = 1$ при $|x| < 1/2$; $I(x) = 0$ при $|x| \geq 1/2$; λ_0 – время прихода; τ – длительность; v_0 – несущая частота радиоимпульса; $a(t)$ и $\varphi(t)$ – случайные процессы, описывающие законы его амплитудных и фазовых флуктуаций. Согласно [1–6], сигнал (1) можно представить в виде $s(t) = \xi(t)I[(t - \lambda_0)/\tau]$, где $\xi(t) = a(t)\cos[v_0 t - \varphi(t)]$ – узкополосный стационарный центрированный гауссовский случайный процесс. При этом случайные процессы $a(t)$ и $\varphi(t)$ имеют соответственно рэлеевское и равномерное распределение [6]. Спектральную плотность флуктуаций $\xi(t)$ аппроксимируем выражением $G(\omega) = (\gamma/2)\{I[(v_0 - \omega)/\Omega] + I[(v_0 + \omega)/\Omega]\}$, $v_0 > \Omega/2$, где γ – величина, а Ω – ширина полосы частот спектральной плотности. Полагаем, что время корреляции случайных флуктуаций $\xi(t)$ сигнала (1) значительно меньше его длительности, т.е.

$$\mu = \tau\Omega/2\pi \gg 1. \quad (2)$$

Рассмотрим совместные оценки максимального правдоподобия (ОМП) времени прихода λ_0 и центральной частоты v_0 флуктуирующего радиоимпульса (1), наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Будем считать, что время прихода и центральная частота неизвестны и принимают значения из априорных интервалов $\lambda_0 \in [\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ и $v_0 \in [v_{\min}; v_{\max}]$. Для получения ОМП по принятой реализации $x(t) = s(t) + n(t)$ необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) $L(\lambda, v)$ как

функцию возможных значений λ и v времени прихода и частоты сигнала. Совместные ОМП λ_m и v_m времени прихода λ_0 и частоты v_0 являются координатами положения абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП на интервалах $\lambda \in [\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ и $v \in [v_{\min}; v_{\max}]$ [4, 7, 8].

Аналогично [2, 9] логарифм ФОП при приеме быстро флуктуирующего сигнала (1) на фоне белого шума с точностью до несущественного постоянного слагаемого запишем как

$$L(\lambda, v) = \frac{\gamma}{N_0(N_0 + \gamma)} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} y^2(t, v) dt, \quad (3)$$

где $y(t, v)$ – отклик линейного фильтра на входную реализацию $x(t)$, передаточная функция $H(\omega)$ которого удовлетворяет условию $|H(\omega)|^2 = I[(v - \omega)/\Omega] + I[(v + \omega)/\Omega]$.

Найдем характеристики совместных ОМП λ_m и v_m . Обозначим $\eta = \lambda/\tau$, $\eta_0 = \lambda_0/\tau$, $\kappa = v/\Omega$, $\kappa_0 = v_0/\Omega$ – нормированные значения времени прихода и частоты радиоимпульса. Представим функционал (3) в виде суммы: $L(\lambda, v) = S(\eta, \kappa) + N(\eta, \kappa) + A$ сигнальной $S(\eta, \kappa) = \langle L(\lambda, v) \rangle - A$ и шумовой $N(\eta, \kappa) = L(\lambda, v) - \langle L(\lambda, v) \rangle$ функций, где $A = \mu q/(1 + q)$, а усреднение выполняется по реализациям $x(t)$ при фиксированных η_0 и κ_0 [7, 8]. Учитывая условие (2) и опуская далее несущественное постоянное слагаемое A , находим сигнальную функцию:

$$S(\eta, \kappa) = S_m C(\eta - \eta_0) C(\kappa - \kappa_0), \quad (4)$$

$$S_m = S(\eta_0, \kappa_0) = \mu q^2/(1 + q),$$

где $C(t) = \max(0; 1 - |t|)$; $q = \gamma/N_0$. Шумовая функция является асимптотически (при $\mu \rightarrow \infty$) гауссовским центрированным неоднородным случайным

полем [2, 6], поэтому в силу (2) ограничимся рассмотрением ее корреляционной функции:

$$K(\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2) = \langle N(\eta_1, \kappa_1) N(\eta_2, \kappa_2) \rangle = \\ = K_m [gR(\eta_1, \eta_2, \eta_0)R(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_0) + \\ + (1-g)C(\eta_1 - \eta_2)C(\kappa_1 - \kappa_2)], \quad (5)$$

$$K_m = K(\eta_0, \eta_0, \kappa_0, \kappa_0) = \mu q^2,$$

$$g = q(2+q)/(1+q)^2,$$

$$\text{где } R(t_1, t_2, t_0) = \max[0; 1 - \max(|t_1 - t_2|, |t_1 - t_0|, |t_2 - t_0|)]; \\ \eta_j = \lambda_j/\tau; \kappa_j = \nu_j/\Omega, j = 1, 2.$$

В процессе анализа целесообразно разбить оценки на надежные и аномальные [4, 7, 8]. Введем нормированные ОМП $\eta_m = \lambda_m/\tau$ и $\kappa_m = \nu_m/\Omega$ времени прихода и частоты сигнала (1). Обозначим Λ область возможных значений нормированных времени прихода и частоты, задаваемая условиями $\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]$, $\kappa \in [\kappa_{\min}; \kappa_{\max}]$, где $\eta_{\min} = \lambda_{\min}/\tau$, $\eta_{\max} = \lambda_{\max}/\tau$, $\kappa_{\min} = \nu_{\min}/\Omega$, $\kappa_{\max} = \nu_{\max}/\Omega$. Тогда оценки η_m и κ_m являются надежными, если находятся в сигнальной подобласти Λ_S , задаваемой условиями $\eta \in [\eta_0 - 1; \eta_0 + 1]$, $\kappa \in [\kappa_0 - 1; \kappa_0 + 1]$, в пределах которой сигнальная функция (4) отлична от нуля. Если же ОМП η_m и κ_m находятся в пределах шумовой подобласти Λ_N , являющейся дополнением подобласти Λ_S до области Λ , то оценки и ошибки оценивания называются аномальными [7, 8].

Рассмотрим нормированные надежные ОМП η_m и κ_m времени прихода и частоты радиопульса (1), являющиеся координатами положения абсолютного максимума логарифма ФОП $M(\eta, \kappa) = L(\eta\tau, \kappa\Omega)$ (3) в пределах сигнальной подобласти Λ_S . Так как сигнальная функция (4) достигает абсолютного максимума при $\eta = \eta_0$ и $\kappa = \kappa_0$, а реализации шумовой функции непрерывны с вероятностью единица, то отношение сигнал/шум (ОСШ) для принятого сигнала (1) равно [7, 8]

$$z^2 = S^2(\eta_0, \kappa_0)/K(\eta_0, \eta_0, \kappa_0, \kappa_0) = \mu q^2/(1+q)^2. \quad (6)$$

Поскольку $q > 0$, то $z^2 \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \infty$. Будем считать, что кроме (2) выполняется условие

$$z^2 \gg 1, \quad (7)$$

обеспечивающее высокую апостериорную точность надежных оценок [7, 8]. При выполнении (7) надежные ОМП η_m и κ_m расположены в малой окрестности значений $\eta = \eta_0$ и $\kappa = \kappa_0$ соответственно, причем с ростом ОСШ размер этой окрестности уменьшается. Поэтому для расчета характеристик надежных ОМП η_m и κ_m при выполнении (2), (7) достаточно исследовать поведение моментов логарифма ФОП (3) в малой окрестности точки (η_0, κ_0) .

Полагая $\delta_S = \max(|\eta - \eta_0|, |\eta_i - \eta_0|, |\kappa - \kappa_0|, |\kappa_i - \kappa_0|) \rightarrow 0$, $i = 1, 2$, аналогично [10] можем представить случайное поле (3) в виде $L(\eta\tau, \kappa\Omega) = L_1(\eta) + L_2(\kappa)$. Здесь $L_i(x)$, $i = 1, 2$ — статистически не зависящие гауссовские случайные процессы, моменты которых приведены в [10]. Тогда при выполнении (2), (7) характеристики надежных ОМП η_m и κ_m приближенно совпадают с характеристиками положений абсолютных максимумов случайных процессов $L_1(\eta)$ и $L_2(\kappa)$ на интервалах $\eta \in [\eta_0 - 1; \eta_0 + 1]$ и $\kappa \in [\kappa_0 - 1; \kappa_0 + 1]$ соответственно.

Воспользовавшись локально-марковской аппроксимацией приращений случайных процессов $L_1(\eta)$ и $L_2(\kappa)$ [7] и решая уравнения Фоккера-Планда-Колмогорова [11] с соответствующими начальными и граничными условиями, получаем, что при выполнении (2), (7) совместные надежные ОМП η_m и κ_m являются несмещенными, а рассеяние оценок равно

$$V_0 = \langle (\eta_m - \eta_0)^2 \rangle = \\ = \langle (\kappa_m - \kappa_0)^2 \rangle = 13(2-g)^2/8z^4. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь пороговые (с учетом аномальных ошибок) характеристики ОМП. Аномальные ошибки возможны, если размеры области Λ возможных значений времени прихода η_0 и частоты κ_0 сигнала значительно больше размеров сигнальной подобласти Λ_S [4, 7, 8], т.е.

$$m_1 = \eta_{\max} - \eta_{\min} \gg 1, \quad m_2 = \kappa_{\max} - \kappa_{\min} \gg 1. \quad (9)$$

Параметр m_1 определяет число сигналов (1), которые могут быть размещены на интервале времени $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$, а параметр m_2 — число сигналов, которые могут быть размещены в диапазоне частот $[\nu_{\min}; \nu_{\max}]$. На практике необходимо знать вероятности надежной оценки $P_0 = P[(\eta_m, \kappa_m) \in \Lambda_S]$ или аномальной ошибки $P_a = P[(\eta_m, \kappa_m) \in \Lambda_N] = 1 - P_0$ [4, 7, 8].

Согласно определению [8], $P_0 = P[L_S > L_N]$, где L_S и L_N — величины абсолютных максимумов логарифма ФОП (3) в пределах сигнальной и шумовой подобластей. При выполнении условия (9) случайные величины L_S и L_N приближенно статистически не зависимы, поэтому $P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} F_N(u) dF_S(u)$ [8], где $F_N(u)$ и $F_S(u)$ — функции распределения случайных величин L_S/σ_N и L_N/σ_N соответственно, а $\sigma_N^2 = \mu q^2/(1+q)^2$. Воспользовавшись найденными

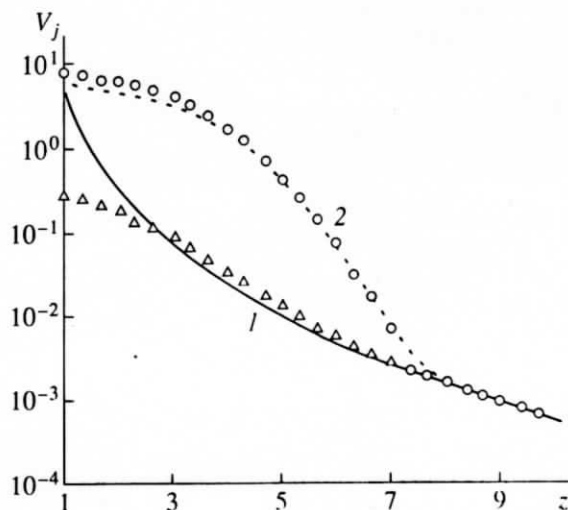


Рис. 1. Рассеяния оценок.

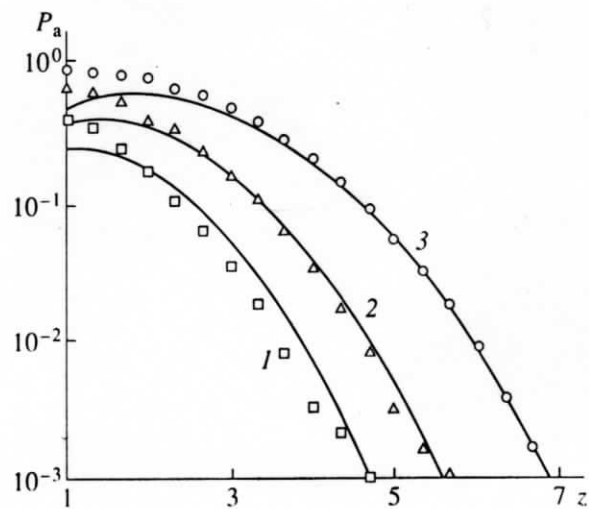


Рис. 2. Вероятность аномальной оценки.

в [10] асимптотическими выражениями для функций $F_N(u)$ и $F_S(u)$, получаем

$$P_0 = \zeta \int_{\sqrt{2}}^{\infty} F_N(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} W(u\zeta - x) W(x) dx \right] du,$$

$$P_a = 1 - P_0,$$

$$F_N(u) = \exp \left\{ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[m_2 \exp \left(-\frac{1}{2} \right) + m_1 (u\sqrt{2} - 1) \exp \left(-\frac{(u\sqrt{2} - 1)^2}{2} \right) \right] \right\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_2 \times$$

$$\times \int_1^{u\sqrt{2}-1} (x^2 - 1) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[m_2 x \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) + \right. \right. \quad (10)$$

$$\left. + m_1 (u\sqrt{2} - x) \exp \left(-\frac{(u\sqrt{2} - x)^2}{2} \right) \right] \right\} dx.$$

$$W(x) = \frac{2\sqrt{2}}{2-g} z \exp \left[\frac{2z^2(3-g)}{(2-g)^2} \right] \times$$

$$\times \left\{ \exp \left(-\frac{\sqrt{2}xz}{2-g} \right) \Phi \left(x - \frac{z(4-g)}{\sqrt{2}(2-g)} \right) - \right.$$

$$\left. - \exp \left[\frac{3z^2}{(2-g)^2} + \frac{z(z-2\sqrt{2}x)}{2-g} \right] \Phi \left(x - \frac{z(6-g)}{\sqrt{2}(2-g)} \right) \right\},$$

где $\zeta = \sigma_N \sqrt{2/K_m} = \sqrt{2}/(1+q)$. Точность формулы (10) возрастает с увеличением μ (2), z (6), m_1 и m_2

(9). Используя (8) и (10), условные смещения и рассеяния ОМП η_m и κ_m с учетом аномальных ошибок можем записать в виде [8]

$$b_1 = \langle \eta_m - \eta_0 \rangle = (1 - P_0)(\eta_a - \eta_0),$$

$$b_2 = \langle \kappa_m - \kappa_0 \rangle = (1 - P_0)(\kappa_a - \kappa_0),$$

$$V_1 = \langle (\eta_m - \eta_0)^2 \rangle =$$

$$= P_0 V_0 + (1 - P_0)[(\eta_a - \eta_0)^2 + m_1^2/12], \quad (11)$$

$$V_2 = \langle (\kappa_m - \kappa_0)^2 \rangle =$$

$$= P_0 V_0 + (1 - P_0)[(\kappa_a - \kappa_0)^2 + m_2^2/12],$$

где $\eta_a = (\eta_{\max} + \eta_{\min})/2$; $\kappa_a = (\kappa_{\max} + \kappa_{\min})/2$. Из выражений (11) следует, что при $\eta_0 = \eta_a$ и $\kappa_0 = \kappa_a$ ОМП η_m и κ_m являются несмещенными.

С целью экспериментальной проверки эффективности совместных ОМП времени прихода и частоты флуктуирующего радиоимпульса (1) и установления границ применимости найденных асимптотически точных формул для характеристик оценок выполнено статистическое моделирование алгоритма ОМП на ЭВМ. В процессе моделирования с шагом $\Delta t = 0.01$ по переменным η и κ формировались отсчеты гауссовского случайного поля с математическим ожиданием (4) и корреляционной функцией (5), а оценки η_m и κ_m фиксировались как координаты наибольшего отсчета поля в пределах области значений $\eta \in [0, m_1]$, $\kappa \in [0, m_2]$. При этом среднеквадратическая погрешность ступенчатой аппроксимации непрерывных реализаций поля не превышала 15%. На основе обработки не менее 10^4 реализаций случайного поля вычислялись выборочные характеристики ОМП. Некоторые результаты моделирования при $m_1 = m_2 = 10$, $\eta_0 = \eta_a = m_1/2$, $\kappa_0 = \kappa_a = m_2/2$ пока-

заны на рис. 1 и 2, где приведены соответствующие теоретические зависимости. На рис. 1 показаны предельные (при $q \ll 1$) экспериментальные значения рассеяния надежной ОМП η_m и рассеяния ОМП η_m с учетом аномальных ошибок (кривая 2), которые практически совпали с аналогичными значениями для ОМП κ_m . Там же сплошными и штриховыми линиями показаны соответствующие теоретические зависимости $V_0(z)$ и $V_1(z) = V_2(z)$ рассеяний ОМП, рассчитанные по формулам (8) и (11). На рис. 2 приведены экспериментальные значения вероятности P_a аномальной ошибки при $g = 0.075$ (прямоугольники), $g = 0.5$ (треугольники) и $g \ll 1$ ($q \ll 1$) (кружочки), которым соответствуют теоретические кривые 1, 2 и 3, рассчитанные по формуле (10). Из результатов моделирования следует, что полученные теоретически новые асимптотически точные выражения для характеристик ОМП удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные уже при $z > 1.5 \dots 2$ и $m_1, m_2 > 3 \dots 5$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, CRDF и Министерства образования (проекты 02-07-00057, VZ-010-0 и E00-3.5-5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Караваев В.В., Сазонов В.В. Статистическая теория пассивной локации. М.: Радио и связь, 1987.
2. Бакут П.А., Большаков И.А., Герасимов Б.М. и др. Вопросы статистической теории радиолокации. Т. 1 / Под ред. Тартаковского Г.П. М.: Сов. радио, 1963.
3. Кремер И.Я., Владимиров В.И., Карпунин В.И. Модулирующие помехи и прием радиосигналов. М.: Сов. радио, 1972.
4. Радиотехнические системы / Под ред. Казаринова Ю.М. М.: Высш. шк., 1990.
5. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
6. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
7. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
8. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
9. Трифонов А.П., Парфенов В.И. // РЭ. 1998. Т. 44. № 8. С. 959.
10. Трифонов А.П., Захаров А.В. // РЭ. 2000. Т. 45. № 11. С. 1329.
11. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977.