

721

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПРОБЛЕМЫ
ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

ТОМ 38, ВЫП. 3

2002

МОСКВА

428

УДК 621.391.1: 519.27

© 2002 г. А.П. Трифонов, А.В. Захаров, Е.В. Проняев

**АДАПТИВНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА
В УСЛОВИЯХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ¹**

Получен алгоритм максимального правдоподобия обнаружения гауссовского стохастического сигнала с неизвестными моментом появления (исчезновения) и средней мощностью. Найдены асимптотические выражения для вероятностей ошибок обнаружения 1-го и 2-го рода. Границы применимости полученных выражений устанавливаются с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

§ 1. Введение

Задача обнаружения сигналов на фоне аддитивного шума является одной из классических задач теории информационных систем. В [1–3 и др.] рассмотрено обнаружение стохастического сигнала, представляющего собой стационарный гауссовский случайный процесс, время корреляции которого значительно меньше величины интервала наблюдения (обработки). При этом предполагается, что все параметры стохастического сигнала априори известны.

Однако прием и обработку информации часто приходится производить в условиях априорной неопределенности, когда законы распределения вероятностей наблюдаемых случайных процессов известны с точностью до конечного числа параметров [4, 5]. В частности, могут быть неизвестны такие параметры стохастического сигнала, как моменты появления, исчезновения (длительность), интенсивность и ширина полосы частот (средняя мощность) и др. В этом случае результаты [1–3], полученные в условиях полной априорной определенности, оказываются неприменимы. В [5–7] на основе байесовского подхода в непрерывном и дискретном времени синтезированы алгоритмы обнаружения стохастического сигнала со случайными моментом появления и (или) длительностью при известных априорных распределениях этих параметров. Однако предложенные в [5–7] алгоритмы обнаружения являются весьма сложными и требуют значительных априорных сведений, а характеристики эффективности алгоритмов в случае непрерывного времени найти не удается. В [8] выполнен синтез более простых алгоритмов обнаружения, не требующих знания априорных распределений неизвестных моментов появления и исчезновения стохастического сигнала, получены выражения для характеристик синтезированных алгоритмов. При этом обнаружение производится в дискретном времени на основе обработки независимых отсчетов наблюдаемых данных.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке CRDF (Grant VZ-010-0) и Минобразования РФ (номер проекта Е00-3.5-5).

Определенный интерес представляют синтез и анализ алгоритмов обработки стохастических сигналов в непрерывном времени. В частности, обработка сигналов в непрерывном времени позволяет избежать ухудшения эффективности обнаружения вследствие потери части информации о наблюдаемых данных в процессе их дискретизации. Очевидно, характеристики обнаружения в непрерывном времени являются потенциальными (предельными) характеристиками для дискретного времени, которые достигаются при неограниченном уменьшении времени дискретизации. Кроме того, часто характеристики обнаружения сигналов в непрерывном времени достаточно хорошо аппроксимируют соответствующие характеристики для дискретного времени, если отсчеты наблюдаемых данных существенно коррелированы.

Ниже рассмотрена задача максимально правдоподобного обнаружения гауссовского стохастического сигнала с неизвестными моментами появления или исчезновения и с неизвестными интенсивностью и шириной полосы частот (с неизвестной средней мощностью) при наблюдении и обработке в непрерывном времени. Выполнен синтез адаптивного алгоритма обнаружения стохастического сигнала, получены асимптотические выражения для вероятностей ошибок обнаружения 1-го и 2-го рода (ложной тревоги и пропуска сигнала). Работоспособность алгоритма обнаружения и границы применимости полученных асимптотических выражений установлены с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

§ 2. Постановка задачи

Под гауссовским стохастическим сигналом с неизвестным моментом появления λ_{01} будем понимать сигнал

$$s(t) = I(t - \lambda_{01}) \xi(t), \quad t \in [0; T], \quad (1)$$

где $I(t) = 0$ при $t < 0$, $I(t) = 1$ при $t \geq 0$ — функция единичного скачка, $\xi(t)$ — стационарный центрированный гауссовский случайный процесс со спектральной плотностью $G(\omega)$, а $[0; T]$ — интервал наблюдения. Стохастический сигнал с неизвестным моментом исчезновения λ_{02} , аналогично (1), можно представить в виде

$$s(t) = I(\lambda_{02} - t) \xi(t), \quad t \in [0; T]. \quad (2)$$

Спектральную плотность $G(\omega)$ случайного процесса $\xi(t)$ аппроксимируем выражением

$$G(\omega) = \gamma_0 G_0(\omega/\Omega_0),$$

где

$$G_0(x) = 1 \quad \text{при} \quad |x| \leq 1/2, \quad G_0(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > 1/2,$$

а γ_0 и Ω_0 — интенсивность и ширина полосы частот спектральной плотности $G(\omega)$, определяющие дисперсию (среднюю мощность) $\sigma^2 = \gamma_0 \Omega_0 / 2\pi$ случайного процесса $\xi(t)$.

Будем считать, что кроме моментов появления λ_{01} и исчезновения λ_{02} стохастических сигналов (1), (2) неизвестны интенсивность γ_0 и ширина полосы частот Ω_0 спектральной плотности процесса $\xi(t)$ (средняя мощность σ^2). Обозначим через τ_0 длительность стохастического сигнала в пределах интервала $[0; T]$, причем $\tau_0 = T - \lambda_{01}$ — для сигнала (1) и $\tau_0 = \lambda_{02}$ — для сигнала (2). Пусть неизвестные параметры λ_{01} , λ_{02} и Ω_0 принимают значения из априорных интервалов $\lambda_1 \in [\Lambda_{11}; \Lambda_{21}]$, $\lambda_2 \in [\Lambda_{12}; \Lambda_{22}]$ и $\Omega \in [V_1; V_2]$ соответственно, где $0 < \Lambda_{1i} \leq \Lambda_{2i} < T$, $i = 1, 2$, $0 < V_1 \leq V_2$. Тогда неизвестная длительность τ_0 стохастического сигнала принимает

значения из интервала $\tau \in [\Gamma_1; \Gamma_2]$, где $\Gamma_1 = T - \Lambda_{21} > 0$, $\Gamma_2 = T - \Lambda_{11} < T$ - для сигнала (1); $\Gamma_1 = \Lambda_{12}$, $\Gamma_2 = \Lambda_{22}$ - для сигнала (2). Следуя [1, 3], будем полагать, что флуктуации стохастического сигнала являются быстрыми, т.е. время корреляции сигнала значительно меньше его длительности. Тогда

$$\mu_1 = \Gamma_1 V_1 / 4\pi \gg 1, \quad \mu_0 = \tau_0 \Omega_0 / 4\pi \gg 1. \quad (3)$$

Отметим, что выражение (2) для стохастического сигнала с неизвестным моментом исчезновения переходит в выражение (1) для сигнала с неизвестным моментом появления, если в (2) заменить время t на время $t^* = T - t$ и обозначить $\lambda_{01} = T - \lambda_{02}$. Это позволяет на основе единой методики решить задачи синтеза и анализа алгоритмов обработки стохастических сигналов (1), (2).

Рассмотрим обнаружение гауссовского стохастического сигнала с неизвестными моментом появления (или исчезновения) и средней мощностью, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Пусть на входе обнаружителя в течение времени $t \in [0; T]$ наблюдается случайный процесс $x(t) = i s(t) + n(t)$, где $i = 1$ при наличии стохастического сигнала $s(t)$ (гипотеза H_1), а при отсутствии сигнала $i = 0$ (гипотеза H_0). На основе наблюдаемых данных $x(t)$ и имеющейся априорной информации необходимо вынести решение о наличии или отсутствии сигнала $s(t)$ на входе обнаружителя.

§ 3. Алгоритм обнаружения стохастического сигнала

Для синтеза алгоритма обнаружения воспользуемся методами теории статистических решений [2, 4, 9 и др.]. Согласно [2, 4] оптимальная процедура обнаружения сигнала с априори известными параметрами сводится к вычислению логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП) L_0 по наблюдаемым данным $x(t)$ и к сравнению его с порогом c . Если порог превышен, то принимается решение о наличии сигнала в наблюдаемых данных (гипотеза H_1), иначе выносится решение об отсутствии сигнала (гипотеза H_0). В результате оптимальный алгоритм обнаружения можно записать в следующем виде: $L_0 > c \Rightarrow H_1$, $L_0 < c \Rightarrow H_0$ [1-3]. Величина порога c выбирается в соответствии с заданным критерием оптимальности обнаружения [2, 4, 9]. Далее будем считать, что сигнал и шум статистически независимы. Тогда аналогично [2, 5] для стохастических сигналов (1), (2) получаем

$$L_0 = L(\tau_0, \Omega_0, \gamma_0) = \frac{1}{N_0} \int_{\psi_1(\tau_0)}^{\psi_2(\tau_0)} x(t) m(t, \Omega_0, \gamma_0) dt - \frac{1}{2N_0} \int_{\psi_1(\tau_0)}^{\psi_2(\tau_0)} m^2(t, \Omega_0, \gamma_0) dt, \quad (4)$$

причем стохастический интеграл понимается в смысле Ито. Здесь $\psi_1(\tau) = T - \tau$, $\psi_2(\tau) = T$ - для сигнала (1), $\psi_1(\tau) = 0$ и $\psi_2(\tau) = \tau$ - для сигнала (2), а $m(t, \Omega, \gamma)$ - апостериорное математическое ожидание, являющееся оптимальной в среднеквадратическом смысле фильтрационной оценкой сигнала (1) при $t \in [T - \tau; T]$ и сигнала (2) при $t \in [0; \tau]$. Так как $\xi(t)$ является гауссовским процессом, то функция $m(t, \Omega, \gamma)$ может быть представлена как сигнал на выходе линейного фильтра, импульсная переходная функция которого находится из уравнения Винера-Хопфа.

При неизвестных параметрах стохастического сигнала используем адаптивный подход [4, 5, 9]. Этот подход заключается в замене неизвестных параметров, входящих в логарифм ФОП (4), на их оценки максимального правдоподобия [4, 10]. Тогда решающей статистикой алгоритма обнаружения является величина абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП $L(\tau, \Omega, \gamma)$ (4) как функции возмож-

ных значений неизвестных параметров τ_0 , Ω_0 и γ_0 стохастического сигнала [9]. В результате адаптивный алгоритм максимального правдоподобия обнаружения стохастического сигнала с неизвестными параметрами можно представить в виде

$$L_m = \sup_{(\tau, \Omega) \in \Pi} \left[\sup_{\gamma} L(\tau, \Omega, \gamma) \right] > c \Rightarrow H_1, \quad L_m < c \Rightarrow H_0, \quad (5)$$

где Π – область возможных значений длительности и ширины полосы частот сигнала, задаваемая условиями $\tau \in [\Gamma_1; \Gamma_2]$, $\Omega \in [V_1; V_2]$.

Представление логарифма ФОП (4) иногда оказывается неудобным с точки зрения аппаратной или программной реализации алгоритма обнаружения [3]. Поэтому при выполнении (3), аналогично [1, 3], перепишем функционал (4) в виде

$$L(\tau, \Omega, \gamma) = 2\gamma M_0(\tau, \Omega) / N_0(N_0 + 2\gamma) - \mu \ln(1 + 2\gamma/N_0), \quad (6)$$

$$M_0(\tau, \Omega) = \int_{\psi_1(\tau)}^{\psi_2(\tau)} y_0^2(t, \Omega) dt,$$

где $\mu = \tau\Omega/4\pi$, а функцию $y_0(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')dt'$ можно интерпретировать, как отклик фильтра с импульсной переходной функцией $h(t)$ на входной сигнал $x(t)$, причем передаточная функция $H_f(\omega)$ этого фильтра удовлетворяет соотношению $|H_f(\omega)|^2 = G_0(\omega/\Omega)$. Функционал $M_0(\tau, \Omega)$ в (6) можно сформировать, пропуская наблюдаемые данные $x(t)$ через последовательно соединенные фильтр с импульсной переходной функцией $h(t)$, квадратор и интегратор [3].

Алгоритм обнаружения (5) можно несколько упростить, если учесть, что логарифм ФОП (6) достигает абсолютного максимума по переменной γ , когда

$$\gamma = \gamma_m(\tau, \Omega) = \int_{\psi_1(\tau)}^{\psi_2(\tau)} y_0^2(t, \Omega) dt / \mu - N_0.$$

Тогда

$$L_g(\tau, \Omega) = \sup_{\gamma} L(\tau, \Omega, \gamma) = L[\tau, \Omega, \gamma_m(\tau, \Omega)] = \mu \{ M(\tau, \Omega) - 1 - \ln[M(\tau, \Omega)] \}, \quad (7)$$

$$M(\tau, \Omega) = \int_{\psi_1(\tau)}^{\psi_2(\tau)} y_0^2(t, \Omega) dt / \mu N_0, \quad (8)$$

а алгоритм обнаружения (5) с учетом (7) можно переписать в виде

$$L_m = \sup_{(\tau, \Omega) \in \Pi} L_g(\tau, \Omega) > c \Rightarrow H_1, \quad L_m < c \Rightarrow H_0. \quad (9)$$

Таким образом, в отличие от (5) для формирования решающей статистики L_m в (9) достаточно найти величину абсолютного максимума функции двух переменных (7), а не функции трех переменных (6), что значительно сокращает аппаратные и вычислительные затраты при реализации алгоритма обнаружения.

Форма записи алгоритма максимального правдоподобия в виде (7)–(9) предполагает вынесение решения в результате анализа наблюдаемых данных $x(t)$ на всем

интервале времени $[0; T]$. Однако в ряде прикладных задач, решаемых современными системами обзора и поиска, необходимо при заданном уровне ложных тревог обнаружить сигнал как можно скорее [5]. В тех случаях, когда необходимо уменьшить время обнаружения, целесообразно использовать последовательный вариант реализации алгоритма максимального правдоподобия (7)–(9).

Для реализации алгоритма (7)–(9) в виде последовательного алгоритма максимального правдоподобия обнаружения сигнала (1) с неизвестным моментом появления заменим в (7) T на текущее время t и обозначим

$$L_{m1}(t) = \sup_{\substack{\Gamma_1 \leq \tau \leq \tilde{\Gamma}_2, \\ \Omega \in [V_1; V_2]}} L_g(\tau, \Omega), \quad \tilde{\Gamma}_2 = \min(t, \Gamma_2). \quad (10)$$

В процессе последовательного обнаружения статистика $L_{m1}(t)$ непрерывно сравнивается с порогом c . Анализ прекращается в момент $t^* \leq T$ первого превышения статистикой порога c . При этом среднее время обнаружения не превосходит T . Если при всех $t \in [0; T]$ выполнено $L_{m1}(t) < c$, то принимается решение об отсутствии сигнала. Соответственно, для последовательной реализации алгоритма максимального правдоподобия обнаружения сигнала (2) с неизвестным моментом исчезновения заменим τ в (7) на текущее время t и обозначим

$$L_{m2}(t) = \sup_{\Omega \in [V_1; V_2]} L_g(t, \Omega). \quad (11)$$

Аналогично (10) статистика (11) сравнивается с порогом c , и анализ прекращается в момент $t^{**} \leq \Gamma_2$ первого превышения статистикой порога c . При этом среднее время обнаружения не превосходит Γ_2 . Отметим, что последовательная реализация алгоритма максимального правдоподобия (9) в сущности приводит к однопороговому последовательному алгоритму обнаружения типа кумулятивных сумм (CUSUM) [11].

Эффективность алгоритма обнаружения, использующего какие-либо из статистик (7), (9)–(11), будем характеризовать вероятностями ошибок 1-го рода (ложной тревоги) и 2-го рода (пропуска сигнала) [2, 4, 9 и др.]

§ 4. Вероятность ложной тревоги

Пусть справедлива гипотеза H_0 об отсутствии сигнала в наблюдаемых данных $x(t)$. Тогда вероятность ложной тревоги (ВЛТ)

$$\alpha = P \left[\sup_{(\tau, \Omega) \in \Pi} L_g(\tau, \Omega) > c \right]. \quad (12)$$

Точное выражение для вероятности (12) найти не удастся. Получим асимптотически точное (с ростом μ_1 (3) и c) выражение для ВЛТ. Обозначим через $\varepsilon = 1/\sqrt{\mu_1}$ малый параметр при выполнении (3) и представим функционал (8) в виде суммы

$$M(\tau, \Omega) = S_{m0}(\tau, \Omega) + \varepsilon N_{m0}(\tau, \Omega),$$

где $S_{m0}(\tau, \Omega) = \mathbf{E}[M(\tau, \Omega)]$ – регулярная, $N_{m0}(\tau, \Omega) = \sqrt{\mu_1} \{M(\tau, \Omega) - \mathbf{E}[M(\tau, \Omega)]\}$ – нормированная флуктуационная составляющие [9, 10]. При выполнении (3) $S_{m0}(\tau, \Omega) = 1$, следовательно, функционал (7) при справедливости гипотезы H_0 можно представить в виде

$$L_g(\tau, \Omega) = \mu \{ \varepsilon N_{m0}(\tau, \Omega) - \ln [1 + \varepsilon N_{m0}(\tau, \Omega)] \}. \quad (13)$$

Отметим, что функционал $M(\tau, \Omega)$ (8) и его флуктуационная составляющая $N_{m0}(\tau, \Omega)$ являются асимптотически (при $\mu \rightarrow \infty$) гауссовскими случайными полями [1, 3]. Поэтому в силу (3) ограничимся рассмотрением корреляционной функции централизованного случайного поля $N_{m0}(\tau, \Omega)$. При выполнении (3) получаем

$$\mathbb{E}[N_{m0}(\tau_1, \Omega_1) N_{m0}(\tau_2, \Omega_2)] = \Gamma_1 V_1 \min(\tau_1, \tau_2) \min(\Omega_1, \Omega_2) / \tau_1 \tau_2 \Omega_1 \Omega_2.$$

Следовательно, дисперсия случайного поля $N_{m0}(\tau, \Omega)$ не превосходит единицы для всех $(\tau, \Omega) \in \Pi$. Разложим функционал (13) в ряд Маклорена по степеням малого параметра ε . Удерживая лишь первый ненулевой член разложения, зависящий от наблюдаемых данных, получаем

$$L_g(\tau, \Omega) \approx \mu \varepsilon^2 N_{m0}^2(\tau, \Omega) / 2. \quad (14)$$

Относительная погрешность такого представления имеет первый порядок малости по ε . Таким образом, при $\mu_1 \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) функционал $L_g(\tau, \Omega)$ (13) для всех $(\tau, \Omega) \in \Pi$ сходится по распределению к случайному полю $\Lambda^2(\tau, \Omega)$, где $\Lambda(\tau, \Omega)$ — гауссовское централизованное случайное поле с корреляционной функцией

$$\mathbb{E}[\Lambda(\tau_1, \Omega_1) \Lambda(\tau_2, \Omega_2)] = [\min(\tau_1, \tau_2) / 2\sqrt{\tau_1 \tau_2}] [\min(\Omega_1, \Omega_2) / \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}].$$

Тогда ВЛТ (12) при выполнении (3) можно приближенно представить в виде

$$\alpha \approx P_0(\sqrt{c}), \quad P_0(c) = P \left[\sup_{(\tau, \Omega) \in \Pi} |\Lambda(\tau, \Omega)| > c \right]. \quad (15)$$

Точность аппроксимации (15) возрастает с увеличением μ_1 .

Точное выражение для функции $P_0(c)$ (15) неизвестно. Получим асимптотически точное (с ростом c) выражение для вероятности $P_0(c)$. Для этого перейдем от переменных τ и Ω к новым переменным

$$\chi = (1/2) \ln(\tau/\Gamma_2), \quad \eta = (1/2) \ln(\Omega/V_2).$$

Введем в рассмотрение однородное централизованное гауссовское случайное поле

$$\Lambda_\ell(\chi, \eta) = \sqrt{2} \Lambda(\Gamma_2 \exp(2\chi), V_2 \exp(2\eta))$$

с корреляционной функцией

$$R_\ell(\Delta\chi, \Delta\eta) = \mathbb{E}[\Lambda_\ell(\chi, \eta) \Lambda_\ell(\chi + \Delta\chi, \eta + \Delta\eta)] = \exp(-|\Delta\chi| - |\Delta\eta|).$$

Тогда согласно (15)

$$P_0(c) = P \left[\sup_{(\chi, \eta) \in \Sigma} |\Lambda_\ell(\chi, \eta)| > c\sqrt{2} \right],$$

где Σ — область возможных значений переменных χ и η , задаваемая условиями $\chi \in [-m_1; 0]$, $\eta \in [-m_2; 0]$. Здесь $m_1 = (1/2) \ln(\Gamma_2/\Gamma_1)$, $m_2 = (1/2) \ln(V_2/V_1)$ — параметры, характеризующие протяженность априорной области Σ . Учтем, что вероятность превышения высокого порога c реализацией однородного централизованного гауссовского случайного поля $\Lambda_\ell(\chi, \eta)$ определяется локальным поведением его корреляционной функции $R_\ell(\Delta\chi, \Delta\eta)$, т.е. при $\Delta\chi \rightarrow 0$, $\Delta\eta \rightarrow 0$ [13–15]. При $\delta_0 = \max(|\Delta\chi|, |\Delta\eta|) \rightarrow 0$ корреляционная функция $R_\ell(\Delta\chi, \Delta\eta)$ допускает асимпто-

гическое представление:

$$R_{\ell}(\Delta\chi, \Delta\eta) = R_0(\Delta\chi, \Delta\eta) + o(\delta_0),$$

$$R_0(\Delta\chi, \Delta\eta) = \max[0; 1 - |\Delta\chi|] \max[0; 1 - |\Delta\eta|]. \quad (16)$$

Поэтому при больших c вероятность $P_0(c)$ (15) можно приближенно представить в виде

$$P_0(c) \approx P \left[\sup_{(\chi, \eta) \in \Sigma} |\Lambda_0(\chi, \eta)| > c\sqrt{2} \right], \quad (17)$$

где $\Lambda_0(\chi, \eta)$ – однородное центрированное гауссовское случайное поле с корреляционной функцией (16). Точность аппроксимации (17) возрастает с увеличением порога c .

Будем считать, что априорная неопределенность относительно длительности и ширины полосы частот стохастического сигнала велика, т.е.

$$\chi^* = \Gamma_2/\Gamma_1 \gg 1, \quad \eta^* = V_2/V_1 \gg 1. \quad (18)$$

Известно [13–16], что значения $\Lambda_S = \sup_{(\chi, \eta) \in \Sigma} \Lambda_0(\chi, \eta)$ и $\Lambda_I = \inf_{(\chi, \eta) \in \Sigma} \Lambda_0(\chi, \eta)$ абсолютных максимума и минимума случайного поля $\Lambda_0(\chi, \eta)$ асимптотически (при $\chi^* \rightarrow \infty$ и $\eta^* \rightarrow \infty$) статистически независимы. Следовательно, при больших c с учетом (17), (18) получаем

$$P_0(c) \approx P \left[\max(\Lambda_S; -\Lambda_I)/\sqrt{2} > c \right] = P_S(c) + P_I(c) - P_S(c)P_I(c),$$

где

$$P_S(c) = P \left[\Lambda_S/\sqrt{2} > c \right], \quad P_I(c) = P \left[\Lambda_I/\sqrt{2} < -c \right].$$

Так как поле $\Lambda_0(\chi, \eta)$ центрировано и однородно, то

$$P_S(c) = P_I(c) = 1 - F \left(c\sqrt{2} \right),$$

где $F(c)$ – функция распределения величины абсолютного максимума случайного поля $\Lambda_0(\chi, \eta)$. Тогда согласно (15) получаем

$$\alpha_0 \approx 1 - F^2 \left(\sqrt{2}c \right), \quad F(c) = P \left[\sup_{(\chi, \eta) \in \Sigma} \Lambda_0(\chi, \eta) < c \right]. \quad (19)$$

Точность аппроксимации (19) возрастает с увеличением μ_1 , c , и m_4 .

Точное выражение для функции распределения $F(c)$ (19) неизвестно. В [12] найдено асимптотически точное (с ростом c) выражение для $F(c)$, полученное с помощью асимптотического (при $c \rightarrow \infty$) разложения распределения абсолютного максимума случайного поля $\Lambda_0(\chi, \eta)$ и с использованием аппроксимации [9] вероятности превышения высокого порога стационарным гауссовским случайным процессом с треугольной корреляционной функцией. Воспользовавшись этим выражением,

находим

$$F(c) = \exp \left\{ -\sqrt{2/\pi} \left(m_2 \exp(-1/2) + m_1(c\sqrt{2} - 1) \exp \left[-(c\sqrt{2} - 1)^2/2 \right] \right) \right\} + \\ + \sqrt{2/\pi} m_2 \int_1^{c\sqrt{2}-1} (x^2 - 1) \exp \left\{ -x^2/2 - \sqrt{2/\pi} \left(m_2 x \exp(-x^2/2) + m_1(c\sqrt{2} - x) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left[-(c\sqrt{2} - x)^2/2 \right] \right) \right\} dx, \quad m_1 = \ln(\chi^*)/2, \quad m_2 = \ln(\eta^*)/2, \quad (20)$$

при $c > \sqrt{2}$ и $F(c) = 0$ при $c < \sqrt{2}$. Точность формулы (20) возрастает с увеличением c , χ^* и η^* . Таким образом, ВЛТ α можно рассчитать по приближенной формуле (19), где функция $F(c)$ определяется из (20). Точность такой аппроксимации ВЛТ возрастает с увеличением μ_1 , χ^* , η^* и c .

Получим более простую, чем (19), (20), но менее точную аппроксимацию ВЛТ. В [13–15] найдено асимптотически точное (с ростом c) выражение для вероятности превышения порога c реализацией однородного гауссовского случайного поля, откуда при $c \rightarrow \infty$ находим

$$F(c) = 1 - \frac{m_1 m_2}{\sqrt{2\pi}} c^3 \zeta_a \exp \left(-\frac{c^2}{2} \right), \quad (21)$$

где

$$\zeta_a = \lim_{v \rightarrow \infty} [\zeta_a^*(v)/v^2],$$

$$\zeta_a^*(v) = 1 + \int_0^\infty P \left[\max_{(x,\eta) \in \Theta} X(x,\eta) > y \right] \exp(y) dy,$$

$X(x,\eta)$ – гауссовское случайное поле с математическим ожиданием

$$M(x,\eta) = -|x| - |\eta|$$

и корреляционной функцией

$$K(x_1, \eta_1, x_2, \eta_2) = \mathbf{E} \left\{ [X(x_1, \eta_1) - \mathbf{E}[X(x_1, \eta_1)]] [X(x_2, \eta_2) - \mathbf{E}[X(x_2, \eta_2)]] \right\} = \\ = |x_1| + |x_2| + |\eta_1| + |\eta_2| - |x_1 - x_2| - |\eta_1 - \eta_2|,$$

Θ – область значений параметров x и η , задаваемая условиями $x \in [0; v]$, $\eta \in [0; v]$. Обозначим через $X_j(t)$, $j = 1, 2$, статистически независимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $M_x(t) = -|t|$ и корреляционными функциями $K_x(t_1, t_2) = |t_1| + |t_2| - |t_1 - t_2|$. Так как $M(x, \eta) = M_x(x) + M_x(\eta)$ и $K(x_1, \eta_1, x_2, \eta_2) = K_x(x_1, x_2) + K_x(\eta_1, \eta_2)$, то статистические характеристики случайных полей $X(x, \eta)$ и $X_1(x) + X_2(\eta)$ совпадают. Поскольку

$$\zeta_a^*(v) = \mathbf{E} \left\{ \exp \left[\sup_{(x,\eta) \in \Theta} X(x,\eta) \right] \right\}$$

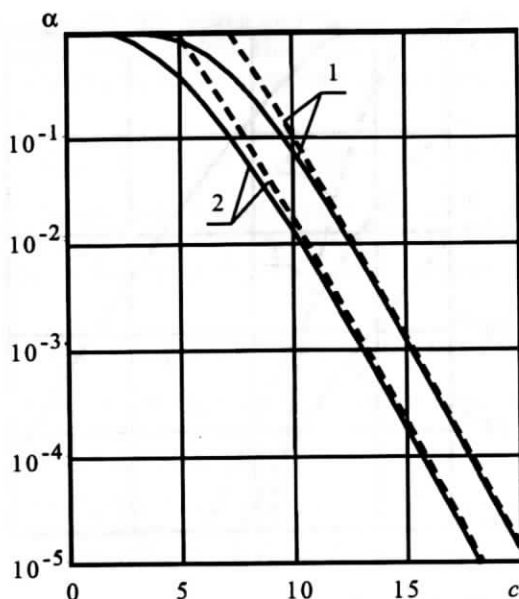


Рис. 1. Зависимость вероятности ложной тревоги от порога

(см. [13]), то в силу статистической независимости случайных процессов $X_1(\chi)$ и $X_2(\eta)$ получаем

$$\zeta_a^*(v) = \mathbf{E} \left\{ \exp \left[\sup_{\chi \in [0;v]} X_1(\chi) + \sup_{\eta \in [0;v]} X_2(\eta) \right] \right\} = \zeta_1(v) \zeta_2(v) = \zeta_1^2(v),$$

$$\zeta_i(v) = \mathbf{E} \left\{ \exp \left[\sup_{t \in [0;v]} X_i(t) \right] \right\} = 1 + \int_0^\infty P \left[\sup_{t \in [0;v]} X_i(t) > y \right] \exp(y) dy.$$

Тогда $\zeta_a = \zeta_1^2$, где $\zeta_1 = \lim_{v \rightarrow \infty} [\zeta_1(v)/v]$ – константа Пикандса [15, 16]. В [9, 15] показано, что $\zeta_1 = 1$, следовательно, $\zeta_a = 1$.

Используя асимптотическую аппроксимацию (21) при больших, но конечных значениях c , и подставляя ее в (19), находим упрощенное выражение для ВЛТ

$$\alpha \approx \ln(\chi^*) \ln(\eta^*) \sqrt{c^3} \exp(-c) / \sqrt{\pi}, \quad (22)$$

точность которого возрастает с увеличением μ_1 , χ^* , η^* и c .

Сплошными линиями на рис. 1 показана зависимость $\alpha(c)$, рассчитанная по формулам (19), (20), а штриховыми – по упрощенной формуле (22). Кривые 1 соответствуют $\chi^* = \eta^* = 10^5$, а кривые 2 – $\chi^* = \eta^* = 10^2$. Из рис. 1 видно, что погрешность формулы (22) относительно выражений (19), (20) быстро уменьшается с увеличением c (уменьшением α). Формула (22) хорошо аппроксимирует зависимость (19), (20) уже при $\alpha < 0,01$. При этом выражения (19), (20) и (22) для ВЛТ асимптотически (при $c \rightarrow \infty$) совпадают. Границы применимости асимптотических формул для ВЛТ при конечных значениях μ_1 , c , χ^* и η^* устанавливаются далее с помощью моделирования на ЭВМ.

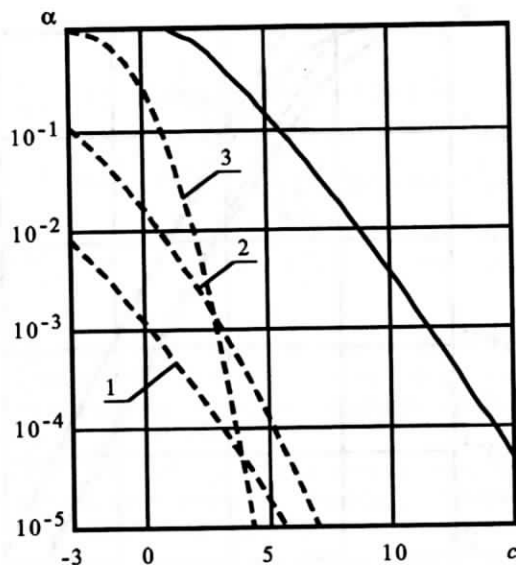


Рис. 2. Вероятность ложной тревоги при априори известных и неизвестных параметрах

Отметим, что в случае оптимального обнаружения стохастического сигнала (1), (2) с априори известными параметрами ВЛТ можно записать в виде (см. [1-3])

$$\alpha_m = 1 - \Phi(c/\sigma_1 + z_1),$$

где

$$z_1 = \sqrt{\mu_0}[(1+q) \ln(1+q)/q - 1], \quad \sigma_1 = \sqrt{\mu_0 q/(1+q)},$$

а $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ - интеграл вероятности. На рис. 2 штриховыми линиями нанесена зависимость $\alpha = \alpha_m(c)$ при $\mu_0 = 100, q = 0,5$ (кривая 1), $\mu_0 = 200, q = 0,5$ (кривая 2) и $\mu_0 = 100, q = 0,1$ (кривая 3). Там же сплошной линией показана соответствующая зависимость $\alpha = \alpha(c)$, рассчитанная по формулам (19), (20) для случая адаптивного обнаружения стохастического сигнала с неизвестными моментом появления (исчезновения) и средней мощностью при $\chi^* = \eta^* = 10$. Из рис. 2 следует, что отсутствие априорной информации о параметрах стохастического сигнала приводит к увеличению ВЛТ и для обеспечения заданной ВЛТ необходимо увеличивать порог обнаружения c . Из рис. 1, 2 видно, что ВЛТ возрастает с увеличением априорной неопределенности относительно длительности и ширины полосы частот стохастического сигнала.

§ 5. Вероятность пропуска стохастического сигнала

Пусть справедлива гипотеза H_1 о наличии сигнала в наблюдаемых данных $x(t)$. Тогда вероятность пропуска (ВП) при фиксированных истинных значениях $\gamma_0, \Omega_0, \tau_0$ параметров стохастического сигнала

$$\beta = P \left[\sup_{(\tau, \Omega) \in \Pi} L_g(\tau, \Omega) < c \right]. \quad (23)$$

Точное выражение для ВП (23) найти не удается. Получим асимптотически точное (с ростом μ_1, μ_0) выражение для ВП. Исследуем статистические характеристики функционала $L_g(\tau, \Omega)$ (7) при наличии стохастического сигнала в наблюдаемых данных. Обозначим через

$$S_{m1}(\tau, \Omega) = \mathbf{E}_0[M(\tau, \Omega)], \quad N_{m1}(\tau, \Omega) = \sqrt{\mu_1}\{M(\tau, \Omega) - \mathbf{E}_0[M(\tau, \Omega)]\}$$

регулярную и нормированную флуктуационную составляющие функционала (8) при справедливости гипотезы H_1 . Здесь $\mathbf{E}_0(\cdot)$ означает условное математическое ожидание при фиксированных τ_0, Ω_0 и γ_0 [9, 10]. Тогда функционал (7) можно представить в виде

$$L_g(\tau, \Omega) = \mu\{S_{m1}(\tau, \Omega) + \varepsilon N_{m1}(\tau, \Omega) - 1 - \ln[S_{m1}(\tau, \Omega) + \varepsilon N_{m1}(\tau, \Omega)]\}, \quad (24)$$

где $\varepsilon = 1/\sqrt{\mu_1}$ - малый параметр. При выполнении (3) находим

$$\begin{aligned} S_{m1}(\tau, \Omega) &= 1 + q \min(\tau, \tau_0) \min(\Omega, \Omega_0) / \tau \Omega, \\ \mathbf{E}_0[N_{m1}(\tau_1, \Omega_1) N_{m1}(\tau_2, \Omega_2)] &= \Gamma_1 V_1 \{ \min(\tau_1, \tau_2) \min(\Omega_1, \Omega_2) + \\ &+ q(2 + q) \min(\tau_0, \tau_1, \tau_2) \min(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2) \} / \tau_1 \tau_2 \Omega_1 \Omega_2, \end{aligned} \quad (25)$$

где $q = 2\gamma_0/N_0 > 0$. Будем считать, что величина q ограничена сверху, так что согласно (25) дисперсия флуктуационной составляющей $N_{m1}(\tau, \Omega)$ ограничена сверху при любых $(\tau, \Omega) \in \Pi$. Из (25) следует, что $S_{m1}(\tau, \Omega) > 1$ для всех $(\tau, \Omega) \in \Pi$. Тогда функционал (24) можно разложить в ряд Маклорена по степеням малого параметра ε . Удерживая аналогично (14) лишь первый ненулевой член разложения, зависящий от наблюдаемых данных, получаем

$$\begin{aligned} L_g(\tau, \Omega) &\approx \mu\{S_{m1}(\tau, \Omega) - 1 - \ln[S_{m1}(\tau, \Omega)] + \\ &+ \varepsilon N_{m1}(\tau, \Omega)[S_{m1}(\tau, \Omega) - 1]/S_{m1}(\tau, \Omega)\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Относительная погрешность формулы (26), как и формулы (14), имеет первый порядок малости по ε . Обозначим через

$$S_g(\tau, \Omega) = \mathbf{E}_0[L_g(\tau, \Omega)], \quad N_g(\tau, \Omega) = L_g(\tau, \Omega) - \mathbf{E}_0[L_g(\tau, \Omega)]$$

регулярную и флуктуационную составляющие функционала (7) при наличии стохастического сигнала в наблюдаемых данных. Тогда согласно (26)

$$\begin{aligned} S_g(\tau, \Omega) &\approx \mu\{S_{m1}(\tau, \Omega) - 1 - \ln[S_{m1}(\tau, \Omega)]\}, \\ N_g(\tau, \Omega) &\approx \mu N_{m1}(\tau, \Omega)[S_{m1}(\tau, \Omega) - 1]/\sqrt{\mu_1} S_{m1}(\tau, \Omega). \end{aligned} \quad (27)$$

Точность аппроксимаций (26), (27) возрастает с увеличением $\mu_1(\mu_0)$.

Из (25), (27) следует, что регулярная составляющая $S_g(\tau, \Omega)$ достигает абсолютного (наибольшего) максимума когда $\tau = \tau_0, \Omega = \Omega_0$. При этом флуктуационная составляющая $N_g(\tau, \Omega)$ непрерывна с вероятностью единица. Тогда выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для адаптивного алгоритма обнаружения (9) запишется в виде [9]

$$z = S_g(\tau_0, \Omega_0) / \{\mathbf{E}_0[N_g^2(\tau_0, \Omega_0)]\}^{1/2} = \sqrt{\mu_0}[1 - \ln(1 + q)/q], \quad (28)$$

причем $z \rightarrow \infty$ при $\mu_0 \rightarrow \infty$. Если ОСШ велико, то координаты τ_m и Ω_m положения абсолютного максимума случайного поля $L_g(\tau, \Omega)$ в пределах области Π находятся в малой окрестности точки (τ_0, Ω_0) , а при $z \rightarrow \infty$ величины τ_m и Ω_m , соответственно, сходятся к τ_0 и Ω_0 в среднеквадратическом [9, 10, 17 и др.]. Поэтому для нахождения

асимптотически точного (с ростом μ_1, μ_0) выражения для ВП достаточно исследовать поведение функционала $L_g(\tau, \Omega)$ в малой окрестности точки (τ_0, Ω_0) . Отметим, что в силу асимптотической гауссовости функционала $M(\tau, \Omega)$ его флуктуационная составляющая $N_{m1}(\tau, \Omega)$ является асимптотически (при $\mu \rightarrow \infty$) гауссовским случайным полем. Тогда из (26) следует асимптотически (при $\mu \rightarrow \infty$) гауссовский характер функционала $L_g(\tau, \Omega)$. Поэтому в силу (3) ограничимся рассмотрением его первых двух моментов.

Из (25), (27) получаем, что при $\delta = \max(|\tau - \tau_0|/\tau_0, |\Omega - \Omega_0|/\Omega_0) \rightarrow 0$

$$S_g(\tau, \Omega) = S_\delta(\kappa) + S_\delta(\nu) + o(\delta), \quad \kappa = \tau/\tau_0 - 1/2, \nu = \Omega/\Omega_0 - 1/2,$$

$$S_\delta(x) = [\mu_0 q^2 / (1 + q)] \min(x, 1/2) + \mu_0 [q / (1 + q) - \ln(1 + q)] x. \quad (29)$$

Аналогично для корреляционной функции флуктуационной составляющей $N_g(\tau, \Omega)$ (27) при $\delta \rightarrow 0$ получаем

$$\mathbf{E}_0[N_g(\tau_1, \Omega_1)N_g(\tau_2, \Omega_2)] = K_\delta(\kappa_1, \kappa_2) + K_\delta(\nu_1, \nu_2) + o(\delta),$$

$$K_\delta(x_1, x_2) = \sigma_0^2 \max \{0; [\min(x_1, x_2) + q(2 + q) \min(1/2, x_1, x_2)] / (1 + q)^2 - \\ - \sigma_0^2 [x_1 + x_2 - \min(1/2, x_1) - \min(1/2, x_2)] / (1 + q)\}, \quad (30)$$

где $\sigma_0^2 = \mathbf{E}_0[N_g^2(\tau_0, \Omega_0)] = \mu_0 q^2$, $\kappa_j = \tau_j/\tau_0 - 1/2$, $\nu_j = \Omega_j/\Omega_0 - 1/2$, $j = 1, 2$.

Обозначим через $L_i(x)$, $i = 1, 2$, статистически независимые совместно гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $S_\delta(x)/\sigma_0$ и корреляционными функциями $K_\delta(x_1, x_2)/\sigma_0^2$. Из (29), (30) следует, что первые два момента функционала $L_g(\tau, \Omega)$ приближенно совпадают с соответствующими моментами гауссовского случайного поля $L^*(\tau, \Omega) = \sigma_0 \{L_1(\tau/\tau_0 - 1/2) + L_2(\Omega/\Omega_0 - 1/2)\}$ в малой окрестности точки (τ_0, Ω_0) . Поэтому статистические характеристики случайных полей $L_g(\tau, \Omega)$ и $L^*(\tau, \Omega)$ асимптотически (при $\mu_1 \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$) совпадают. Тогда ВП (23) при выполнении (3) можно приближенно представить в виде

$$\beta \approx P \left[\sup_{\kappa \in [\vartheta_{11}; \vartheta_{21}]} L_1(\kappa) + \sup_{\nu \in [\vartheta_{12}; \vartheta_{22}]} L_2(\nu) < u \right] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u - x) W_2(x) dx, \quad (31)$$

где $u = c/\sigma_0$ - нормированный порог, $\vartheta_{11} = \max[0; \Gamma_1/\tau_0 - 1/2]$, $\vartheta_{12} = \max[0; V_1/\Omega_0 - 1/2]$, $\vartheta_{21} = \Gamma_2/\tau_0 - 1/2$, $\vartheta_{22} = V_2/\Omega_0 - 1/2$, $F_i(c) = P \left[\sup_{x \in [\vartheta_{1i}; \vartheta_{2i}]} L_i(x) < c \right]$ - функция распределения величины абсолютного максимума случайного процесса $L_i(x)$, $i = 1, 2$, а $W_i(c) = dF_i(c)/dc$ - соответствующая плотность вероятности. Точность выражения (31) возрастает с увеличением μ_1 и $\mu_0(z)$.

Чтобы найти асимптотически точное (с ростом μ_1, μ_0) выражение для ВП (31), необходимо исследовать поведение случайных процессов $L_1(\kappa)$ и $L_2(\nu)$ в малой окрестности значений $\kappa = 1/2$ и $\nu = 1/2$, соответствующих значениям $\tau = \tau_0$ и $\Omega = \Omega_0$. При $\delta = \max(|\kappa - 1/2|, |\nu - 1/2|) \rightarrow 0$ и $\mu_1 \rightarrow \infty$ случайные процессы $L_1(\kappa)$ и $L_2(\nu)$ являются гауссовскими марковскими процессами диффузионного типа [18]

с коэффициентами сноса A и диффузии B , где

$$A = \begin{cases} z, & \text{при } \kappa, \nu < 1/2, \\ -z_2, & \text{при } \kappa, \nu > 1/2, \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1, & \text{при } \kappa, \nu < 1/2, \\ 1-g, & \text{при } \kappa, \nu > 1/2, \end{cases} \quad (32)$$

$$z_2 = \sqrt{\mu_0}[\ln(1+q) - q/(1+q)]/q, \quad g = q(2+q)/(1+q)^2,$$

а z определяется из (28). Введем в рассмотрение случайные процессы $\Delta_i(x) = c - L_i(x)$, $x \geq 0$, $i = 1, 2$. Тогда [18]

$$F_i(c) = P \left[\sup_{x \in [\vartheta_{1i}; \vartheta_{2i}]} \Delta_i(x) > 0 \right] = \int_0^{\infty} W(y, \vartheta_{2i}) dy, \quad i = 1, 2, \quad (33)$$

где функция $W(y, t)$ является решением уравнения Фоккера - Планка - Колмогорова

$$\partial W(y, t) / \partial t + A \partial W(y, t) / \partial y - (B/2) \partial^2 W(y, t) / \partial y^2 = 0$$

[18] при граничных условиях

$$W(y = 0, t) = 0, \quad W(y = \infty, t) = 0$$

и начальном условии

$$W(y, t = \vartheta_{1i}) = \exp[-(y - c + z\vartheta_{1i})^2 / 2\vartheta_{1i}] / \sqrt{2\pi\vartheta_{1i}}$$

при $\vartheta_{1i} > 0$, $W(y, t = \vartheta_{1i}) = \delta(y - c)$ при $\vartheta_{1i} = 0$. Решая это уравнение и подставляя результат в (33), получаем

$$F_i(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - c + \frac{z}{2} \right)^2 \right] f(x, z_2, g, \vartheta_{2i}) \rho(x, c, \vartheta_{1i}) dx, \quad (34)$$

$$f(x, z, g, \vartheta) = \Phi \left[z\sqrt{(\vartheta - 1/2)/(1-g)} + x/\sqrt{2(1-g)(\vartheta - 1/2)} \right] -$$

$$- \exp \left[-\sqrt{2}xz/(1-g) \right] \Phi \left[z\sqrt{(\vartheta - 1/2)/(1-g)} - x\sqrt{2(1-g)(\vartheta - 1/2)} \right],$$

$$\rho(x, c, \vartheta) = \Phi \left[c\sqrt{(1-2\vartheta)/\vartheta} + x\sqrt{2\vartheta/(1-2\vartheta)} \right] -$$

$$- \exp \left[-2\sqrt{2}xc \right] \Phi \left[c\sqrt{(1-2\vartheta)/\vartheta} - x\sqrt{2\vartheta/(1-2\vartheta)} \right],$$

$$W_i(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - c + \frac{z}{2} \right)^2 \right] f(x, z_2, g, \vartheta_{2i}) r(x, c, \vartheta_{1i}) dx, \quad (35)$$

$$r(x, c, \vartheta) = 2\sqrt{2}x \exp \left[-2\sqrt{2}xc \right] \Phi \left[c\sqrt{(1-2\vartheta)/\vartheta} - x\sqrt{2\vartheta/(1-2\vartheta)} \right].$$

Таким образом, ВП β можно представить в виде (31), где функции $F_1(x)$ и $W_2(x)$ определяются из (34), (35). Точность такой аппроксимации возрастает с увеличением μ_1 и $\mu_0(z)$. Границы применимости асимптотической формулы (31) при конечных значениях μ_1 , μ_0 и z устанавливаются далее с помощью моделирования на ЭВМ.

Отметим, что в случае оптимального обнаружения стохастического сигнала (1), (2) с априори известными параметрами ВП можно записать в виде $\beta_m = \Phi(c/\sigma_0 - z)$

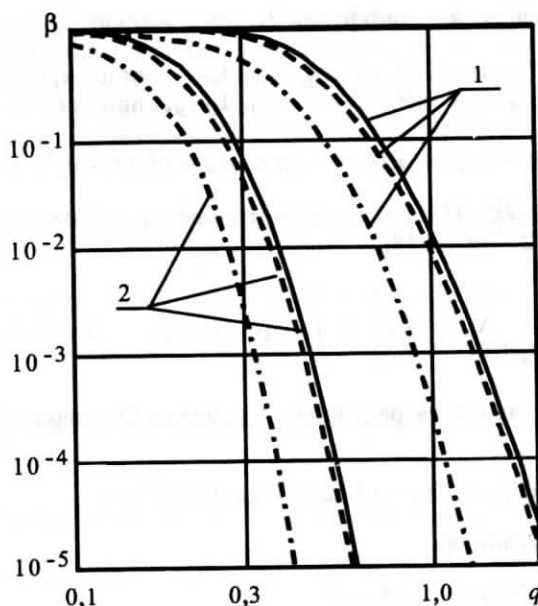


Рис. 3. Вероятность пропуска сигнала при априори известных и неизвестных параметрах

[1-3]. На рис. 3 штрихпунктирными линиями нанесена зависимость $\beta = \beta_m(q)$ в случае обнаружения сигнала (1), (2) с априори известными параметрами по критерию Неймана - Пирсона [2, 4, 9], когда порог обнаружения c вычисляется по формуле $\alpha_m = 1 - \Phi(c/\sigma_1 + z_1)$ при фиксированной ВЛТ $\alpha_m = 10^{-3}$. Там же показана соответствующая зависимость $\beta = \beta(q)$, рассчитанная по формулам (31), (34), (35) для случая адаптивного обнаружения сигнала с неизвестными параметрами при $\chi^* = \eta^* = 10$ (сплошные линии) и при $\chi^* = \eta^* = 4$ (штриховые линии). Здесь порог обнаружения c вычисляется по формулам (19), (20) при фиксированной ВЛТ $\alpha = 10^{-3}$. Кривые 1 на рис. 3 соответствуют $\mu_0 = 100$, а кривые 2 - $\mu_0 = 500$. Видно, что незнание момента появления (исчезновения) и средней мощности стохастического сигнала приводит к увеличению ВП β при обнаружении по критерию Неймана - Пирсона.

§ 6. Результаты статистического моделирования

С целью проверки работоспособности адаптивного алгоритма обнаружения стохастического сигнала и установления границ применимости асимптотически точных формул (19), (20), (22), (31), (34), (35) для характеристик обнаружения выполнялось статистическое моделирование алгоритма (9) на ЭВМ. В процессе моделирования для наблюдаемых данных $x(t)$ при наличии и отсутствии сигнала формировались отсчеты случайных процессов $\xi(t)$ и $y_0(t, \Omega)$ с шагом дискретизации $\Delta t = 0, 2/\mu_1 \chi^* \eta^*$, а затем отсчеты функционала $L_g(\chi \Gamma_1, \eta V_1)$ (7) на интервалах $\chi \in [1; \chi^*]$, $\eta \in [1; \eta^*]$ с шагом дискретизации $\Delta \chi = \Delta \eta = 0, 005$ по переменным χ и η . В результате среднеквадратическая погрешность ступенчатых аппроксимаций непрерывных реализаций случайных процессов и полей на основе дискретных отсчетов не превышала 10%. Сформированные отсчеты функционала (7) при отсутствии сигнала в наблюдаемых

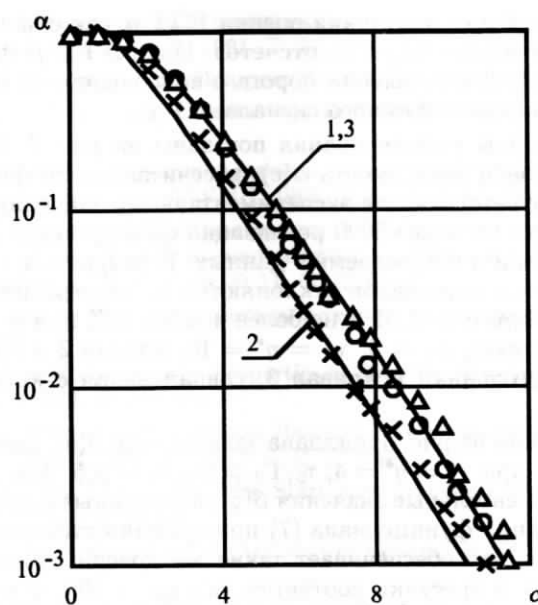


Рис. 4. Теоретические и экспериментальные зависимости вероятности ложной тревоги

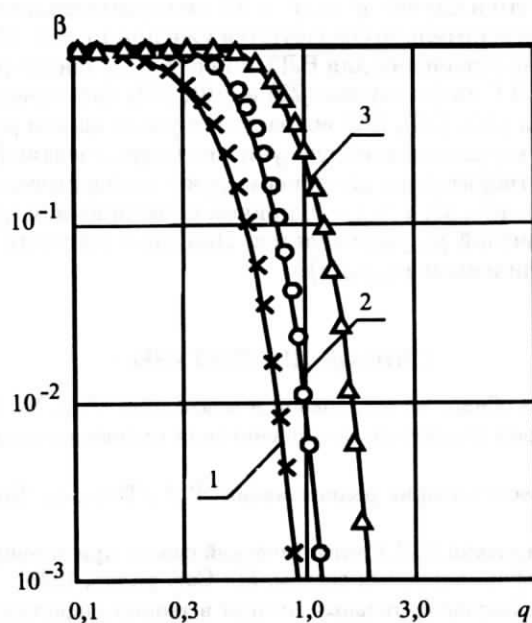


Рис. 5. Теоретические и экспериментальные зависимости вероятности пропуска сигнала

данных использовались для получения оценки ВЛТ α как относительной частоты превышения порога c наибольшим из отсчетов. Оценка ВП β формировалась как относительная частота непревышения порога c наибольшим из отсчетов функционала (7) при наличии стохастического сигнала.

Некоторые результаты моделирования показаны на рис. 4, 5. Сплошными линиями на рис. 4 показана зависимость $\alpha(c)$, рассчитанная по формулам (19), (20). Там же нанесены соответствующие экспериментальные значения $\alpha(c)$, полученные в результате обработки не менее 5000 реализаций функционала (7) при отсутствии стохастического сигнала в наблюдаемых данных. В результате с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений не более чем на 25% при $\alpha > 0,01$ и не более чем на 35% при $\alpha > 0,005$. Кривая 1 и кружочки соответствуют $\mu_1 = 5$, $\chi^* = \eta^* = 10$, кривая 2 и крестики — $\mu_1 = 25$, $\chi^* = \eta^* = 4$, а треугольники и кривая 3, совпадающая с кривой 1, — $\mu_1 = 25$, $\chi^* = \eta^* = 10$.

Сплошными линиями на рис. 5 показана зависимость $\beta(q)$, рассчитанная по формулам (31), (34), (35) при $\chi^* = \eta^* = 4$, $\tau_0/\Gamma_2 = \Omega_0/V_2 = 0,5$. Там же нанесены соответствующие экспериментальные значения $\beta(q)$, полученные в результате обработки не менее 5000 реализаций функционала (7) при наличии стохастического сигнала в наблюдаемых данных, что обеспечивает такие же доверительные интервалы, что и на рис. 4. Кривая 1 и крестики соответствуют $\mu_0 = 100$, $\alpha = 10^{-2}$, кривая 2 и кружочки — $\mu_0 = 100$, $\alpha = 10^{-4}$, а кривая 3 и треугольники — $\mu_0 = 50$, $\alpha = 10^{-4}$. Порог обнаружения c вычислялся для заданной ВЛТ α по теоретическим формулам (19), (20).

Из рис. 4 и других результатов моделирования следует, что теоретические асимптотические формулы (19), (20) для ВЛТ α удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные уже при $\mu_1 \geq 20 - 25$, $\chi^* \geq 3 - 4$, $\eta^* \geq 3 - 4$, причем с увеличением χ^* и η^* нижняя граница допустимых значений μ_1 уменьшается. Так из рис. 4 видно, что в случае $\chi^* = \eta^* = 10$ экспериментальные и теоретические значения ВЛТ удовлетворительно согласуются уже при $\mu_1 = 5$. Упрощенная формула (22) дает завышенные значения для ВЛТ при $\alpha > 0,1$, однако при $\alpha < 0,01 - 0,001$ результаты расчета ВЛТ по формулам (22) и (19), (20) практически совпадают. При этом точность формул (19), (20), (22) возрастает с увеличением μ_1 , χ^* и η^* . Из рис. 5 и других результатов моделирования следует, что теоретические формулы (31), (34), (35) для ВП β удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные уже при $\mu_1 \geq 20 - 25$, $\mu_0 \geq 40 - 50$, $z \geq 1 - 2$, причем с увеличением χ^* и η^* нижняя граница допустимых значений μ_1 уменьшается. При этом точность формул (31), (32), (35) возрастает с увеличением μ_1 , $\mu_0(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 3. М.: Сов. радио, 1977.
2. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978.
3. Вопросы статистической теории радиолокации. Т. 1 / Под ред. Тартаковского Г.П. М.: Сов. радио, 1963.
4. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977.
5. Тартаковский А.Г. Последовательные методы в теории информационных систем. М.: Радио и связь, 1991.
6. Тартаковский А.Г. Оптимальное обнаружение сигналов случайной длительности // Пробл. передачи информ. 1987. Т. 23. № 3. С. 39-47.
7. Тартаковский А.Г. Обнаружение сигналов со случайными моментами появления и исчезновения // Пробл. передачи информ. 1988. Т. 24. № 2. С. 39-50.

8. Репин В.Г. Обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 1. С. 61–72.
9. Теория обнаружения сигналов / Под ред. Вакута П.А. М.: Радио и связь, 1984.
10. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
11. Ширяев А.Н. Минимаксная оптимальность метода кумулятивных сумм (CUSUM) в случае непрерывного времени // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 173–174.
12. Трифонов А.П., Захаров А.В. Эффективность обнаружения разрывного случайного радиопульса с неизвестными временем прихода и центральной частотой // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. № 11. С. 1329–1337.
13. Питербарг В.И. Асимптотические методы в теории гауссовских процессов и полей. М.: Изд-во МГУ, 1988.
14. Qualls C., Watanabe H. Asymptotic Properties of Gaussian Random Fields // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 177. P. 155–171.
15. Питербарг В.И., Фаталов В.Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 57–156.
16. Pickands J. Upcrossing Probabilities for Stationary Gaussian Processes // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 145. P. 51–73.
17. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
18. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.

Поступила в редакцию
27.08.2001

После переработки
14.03.2002